数理解析研究所講究録
第389巻 1980年 38-56

対称モノイダルG－圏とそれに付随する同変コホモロジー論について

京大 数理研　島川和久

§0. 序

(i) $\mathcal{C}$ を対称モノイダル圏、$|\mathcal{C}|$ をその分類空間とする。Segal, Boardman-Vogt, May 等の infinite loop space machines を用いれば、$|\mathcal{C}|$ から Ω-spectrum（＝無限ループ空間）が得られることはよく知られている。そこで本稿では、$\mathcal{C}$ が有限群 G の作用をもつ場合を考察し、島田－島川[5]の方法を用いて、$\mathcal{C}$ から G-spectrum $\mathbb{E}(\mathcal{C})$ を構成する。さらに、$\mathcal{C}$ が bimonoidal の場合には $\mathbb{E}(\mathcal{C})$ が multiplicative な G-spectrum になる事もあわせて述べる。

(ii) 一般に G-spectrum が与えられたとき、それから同変コホモロジー論を構成する方法は種々考えられる。ここでは荒木－村山[2]の τ-cohomology theory の一般化として定義したいので、§1 では G に条件(1.6)をつける。一般の G に対する取扱い方については §4. 補遺 で注意する。

§1. G-spectra

(1.1)　Gを有限群．$V_0, \dots, V_\ell$をGの実既約表現の代表系とする（V_0は1次元の自明表現）．$RO(G) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$の任意の元$\alpha$は，$\alpha = \alpha_0[V_0] + \cdots + \alpha_\ell[V_\ell]$と一意的にあらわせる．$\alpha \in RO(G)^+$，即ち$\alpha_j \geq 0$ $({}^\forall j)$のとき

$$S(\alpha) = \underbrace{V_0^c \wedge \cdots \wedge V_0^c}_{\alpha_0} \wedge \cdots \wedge \underbrace{V_\ell^c \wedge \cdots \wedge V_\ell^c}_{\alpha_\ell}$$

とおく．ただしV_j^cは表現空間V_jの一点コンパクト化．とくにGの正則表現の類を$\omega = [V_0] + \cdots + [V_\ell]$とおく；したがって，$S(\omega) = V_0^c \wedge V_1^c \wedge \cdots \wedge V_\ell^c$．

(1.2)　各j $(0 \leq j \leq \ell)$，およびGの部分群Hに対して，ベクトル空間V_j^Hの向きを一つ決めておくと、これにより$S(\alpha)^H$，$\alpha \in RO(G)^+$，の向きが定まる．今、$\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = \beta_1 + \cdots + \beta_q \in RO(G)$；$\alpha_i, \beta_j \in RO(G)^+$とする．$G$-同相写像

$$f : S(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge S(\alpha_p) \longrightarrow S(\beta_1) \wedge \cdots \wedge S(\beta_q)$$

が orientation preserving（又は Degree one）とは、各$H \subset G$に対して，$\deg(f^H) = 1$となることと定義する；これはV_j^Hの向きの選び方によらない．

(1.3) <u>例</u>.

$$\begin{aligned} S(\omega) \wedge S(n\omega) &\longrightarrow S(n\omega) \wedge S(\omega), \\ (t, x) &\longmapsto (x, J^n(t)) \end{aligned}$$

$J(t) = -t$ $(t \in \omega)$は Degree one G-homeo. である．一般に

V, W を G の表現とすると、

$$\begin{array}{ccccc} V^c \wedge W^c & \xrightarrow{T} & W^c \wedge V^c & \Rightarrow & \deg(T^H) = (-1)^{|V^H||W^H|}, \\ (v, w) & \longmapsto & (w, v) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} V^c & \xrightarrow{J} & V^c & \Rightarrow & \deg(J^H) = (-1)^{|V^H|} \\ v & \longmapsto & -v \quad (v \in V) & & \end{array}$$

となる。（ただし、$|V^H|$ はベクトル空間 V^H の次元。）

(1.4)　V を G の表現、$C(G)$ を G の部分群の conjugacy classes の集合とすると、次の図式が可換；

$$\begin{tikzcd} {[V^c, V^c]^G} \arrow[r] \arrow[d] & A(G) \arrow[d, tail] \\ \bigoplus_{C(G)} [(V^H)^c, (V^H)^c] \arrow[r, "\oplus \deg"] & \bigoplus_{C(G)} \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

$V \geqq 2\omega$ ならば横向きの写像は同型。したがって Degree one G-maps が存在すれば、それらは（安定的には）unique up to G-homotopy.

(1.5)　一般の G については Degree one G-homeo. が常にとれるとは限らないが、次の条件を仮定すれば、各整数の対 (i, j), $0 \leqq i < j \leqq \ell$ に対して、Degree one G-homeo.

$$\varphi_{i,j} : V_j^c \wedge V_i^c \longrightarrow V_i^c \wedge V_j^c$$

を選ぶことが出来る。（(1.3) の T および J を組合せる。）

(1.6) <u>条件</u>. 各 (i, j) について、G の部分群 H を動かすとき、次の I 〜 IV の全ての場合が起ることはない；

	I	II	III	IV
$\lvert V_i^H \rvert$	odd	odd	even	even
$\lvert V_j^H \rvert$	odd	even	odd	even

以下では，G は常に(1.6)をみたすものとし，任意の $\alpha, \beta \in RO(G)^+$ に対し，Degree one G-homeo.

$$\varphi(\alpha,\beta) : S(\alpha) \wedge S(\beta) \longrightarrow S(\alpha+\beta)$$

を $\varphi_{i,j}$ 達の合成で定義する．次の図式が可換になることに注意：

$$\begin{array}{ccc} S(\alpha)\wedge S(\beta)\wedge S(\gamma) & \xrightarrow{1\wedge\varphi(\beta,\gamma)} & S(\alpha)\wedge S(\beta+\gamma) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi(\alpha,\beta)\wedge 1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(\alpha,\beta+\gamma)} \\ S(\alpha+\beta)\wedge S(\gamma) & \xrightarrow{\varphi(\alpha+\beta,\gamma)} & S(\alpha+\beta+\gamma) \end{array}$$

(1.7) <u>G-spectra.</u> $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n\}$ が G-spectrum $\Longleftrightarrow$ 各 E_n $(n=0,1,2,\dots)$ が G-space で，$\varepsilon_n : S(\omega)\wedge E_n \to E_{n+1}$ が G-map．とくに E_n が G-CW-complex で ε_n が cellular inclusion のときには，$\mathbb{E}$ を G-CW-spectrum と呼ぶ．

$\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ を G-CW-spectra とするとき，$\mathbb{E}$ から $\mathbb{F}$ への G-map を（CW-spectra の場合と同様）cofinal な sub-spectrum $\subset \mathbb{E}$ からの equivariant な functions の同値類として定義する．

(1.8) <u>Fixed-point spectrum.</u> $\mathbb{E}$ を G-CW-spectrum，H を G の部分群とすると，CW-spectrum $\mathbb{E}^H = \phi_H\mathbb{E} = \{E_n', \varepsilon_n'\}$ が次のように定義される：

$$E'_{nd(H)} = E^H_n, \quad E'_{nd(H)+1} = S^1 \wedge E'_{nd(H)}, \ \cdots$$

$$\varepsilon'_{nd(H)} = id : S^1 \wedge E'_{nd(H)} \to E'_{nd(H)+1}, \ \cdots$$

$$\varepsilon'_{(n+1)d(H)-1} : S^1 \wedge E'_{(n+1)d(H)-1} \approx S(\omega)^H \wedge E^H_n \xrightarrow{\varepsilon^H_n} E^H_{n+1} = E'_{(n+1)d(H)},$$

ここで、$d(H) = |\omega^H|$.

(1.9) <u>G-sphere spectrum.</u> $\mathbb{S}_G = \{S(n\omega), \varepsilon_n\}$,

$$\varepsilon_n : S(\omega) \wedge S(n\omega) \approx S((n+1)\omega) \quad \text{Degree one}$$

と定義する. 任意の G の部分群 H に対し, $\phi_H \mathbb{S}_G$ は sphere spectrum と同値.

(1.10) $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ を G-CW-spectra とするとき,

$$[\mathbb{E}, \mathbb{F}]^G = G\text{-homotopy classes of } G\text{-maps} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

とおく. $^\forall H \subset G$ に対し, $\phi_H : [\mathbb{E}, \mathbb{F}]^G \to [\phi_H \mathbb{E}, \phi_H \mathbb{F}]$;
$\phi_H[f] = [f^H]$ が定義される.

(1.11) $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n\}$ G-CW-spectrum, $\alpha \in RO(G)^+$ とする. G-CW-spectrum $\Sigma^\alpha \mathbb{E}$ を

$$\Sigma^\alpha \mathbb{E} = \mathbb{E} \wedge S(\alpha) = \{E_n \wedge S(\alpha), \varepsilon_n \wedge id\}$$

で定義する. $^\forall H \subset G$ に対し, $\phi_H(\Sigma^\alpha \mathbb{E}) = \Sigma^{|\alpha^H|} \mathbb{E}^H$. 写像

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{E}, \mathbb{F}]^G & \xrightarrow{\Sigma^\alpha} & [\Sigma^\alpha \mathbb{E}, \Sigma^\alpha \mathbb{F}]^G \\ \cup & & \cup \\ [f] & \longmapsto & [f \wedge id] \end{array}$$

は同型となる. とくに $\alpha \geqq 2\omega$ のとき, 右辺は $A(G)$-module となり, それによって $[\mathbb{E}, \mathbb{F}]^G$ に $A(G)$-module の構造を入れる.

(1,12) $\mathbb{X}$, $\mathbb{E}$ を G-CW-spectra とする. $\forall \gamma \in RO(G)$ に対し,

$$\tilde{\mathbb{E}}^{\gamma}(\mathbb{X}) = \operatorname*{colim}_{\substack{\beta-\alpha=\gamma \\ \alpha,\beta\in RO(G)^+}} [\Sigma^{\alpha}\mathbb{X}, \Sigma^{\beta}\mathbb{E}]^G$$

とおく. ただし極限は

$$[\Sigma^{\alpha}\mathbb{X}, \Sigma^{\beta}\mathbb{E}]^G \xrightarrow{\Sigma^{\delta}} [\Sigma^{\delta}\Sigma^{\alpha}\mathbb{X}, \Sigma^{\delta}\Sigma^{\beta}\mathbb{E}]^G \xrightarrow{\cong} [\Sigma^{\alpha+\delta}\mathbb{X}, \Sigma^{\beta+\delta}\mathbb{E}]^G$$

についてとるものとする. (後の写像は Degree one G-homeo $\varphi(\alpha,\delta)$, $\varphi(\beta,\delta)$ で定義されるもの.)

とくに, X が G-CW-complex のとき,

$$\tilde{\mathbb{E}}^{\gamma}(X) = \tilde{\mathbb{E}}^{\gamma}(\mathbb{S}_G \wedge X) = \operatorname*{colim}_{n} [S(n\omega-\gamma)\wedge X, E_n]^G$$

とおくことにより, [1] の意味における $RO(G)$-graded, $A(G)$-module valued cohomology theory が得られる; $\forall \varepsilon \in RO(G)^+$ に対し, suspension 同型 $\sigma^{\varepsilon}: \tilde{\mathbb{E}}^{\gamma}(X) \to \tilde{\mathbb{E}}^{\gamma+\varepsilon}(\Sigma^{\varepsilon}X)$ が ~~合成~~

$$\operatorname{colim}[S(n\omega-\gamma)\wedge X, E_n]^G \longrightarrow \operatorname{colim}[S(n\omega-\gamma-\varepsilon)\wedge(S(\varepsilon)\wedge X), E_n]^G$$

で定義出来る.

(1,13) <u>Sign convension</u>. $\alpha, \beta \in RO(G)^+$ とすると, 次の図式が可換;

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{\mathbb{E}}^{\gamma+\alpha}(\Sigma^{\alpha}X) \arrow[r] & \tilde{\mathbb{E}}^{\gamma+\alpha+\beta}(\Sigma^{\beta}\Sigma^{\alpha}X) \arrow[d, "(\tau(\alpha,\beta)\wedge 1)^*"] \\
\tilde{\mathbb{E}}^{\gamma}(X) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \tilde{\mathbb{E}}^{\gamma+\beta}(\Sigma^{\beta}X) \arrow[r] & \tilde{\mathbb{E}}^{\gamma+\alpha+\beta}(\Sigma^{\alpha}\Sigma^{\beta}X)
\end{tikzcd}$$

ここで, $\tau(\alpha,\beta) = \varphi(\beta,\alpha)^{-1}\circ\varphi(\alpha,\beta)$; $S(\alpha)\wedge S(\beta) \xrightarrow{\cong} S(\beta)\wedge S(\alpha)$.

さらに、$(\tau(\alpha,\beta)\wedge 1)^* = \rho_{\alpha,\beta}(T\wedge 1)^*$ と書ける。ただし、$\rho_{\alpha,\beta}$ は G-map : $S(\alpha+\beta) \underset{\varphi}{\approx} S(\alpha)\wedge S(\beta) \xrightarrow{T} S(\beta)\wedge S(\alpha) \underset{\varphi}{\approx} S(\alpha+\beta)$ で代表される $A(G)$ の unit である。

(1.14) <u>Fixed-point cohomology</u>. 部分群 $H\subset G$ に対し、自然変換

$$\phi_H : \hat{\mathbb{E}}^{\gamma}(X) \longrightarrow \widetilde{\phi_H \mathbb{E}}^{|\gamma^H|}(X^H)$$

が存在して、次の図式が可換:

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathbb{E}}^{\gamma}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^{\varepsilon}"] & \widetilde{\phi_H \mathbb{E}}^{|\gamma^H|}(X^H) \arrow[d] \\
\hat{\mathbb{E}}^{\gamma+\varepsilon}(\Sigma^{\varepsilon}X) \arrow[r] & \widetilde{\phi_H \mathbb{E}}^{|\gamma^H|+|\varepsilon^H|}(\Sigma^{|\varepsilon^H|}X^H).
\end{tikzcd}$$

(1.15) <u>Ring G-spectra</u>. $\mathbb{E}=\{E_n, \varepsilon_n\}$ を G-spectrum とする。G-maps

$$\mu_{m,n} : E_m\wedge E_n \longrightarrow E_{m+n}, \quad \iota_n : S(n\omega) \longrightarrow E_n$$

が存在して、次の図式を(up to G-homotopy で)可換にするとき、$\mathbb{E}$ を ring G-spectrum と呼ぶことにする:

(1)

$$\begin{tikzcd}
(S(\omega)\wedge E_m)\wedge E_n \arrow[r, "\varepsilon_m\wedge 1"] & E_{m+1}\wedge E_n \arrow[dr, "\mu_{m+1,n}"] & \\
S(\omega)\wedge(E_m\wedge E_n) \arrow[u, "="] \arrow[d, "\nu"] \arrow[r, "1\wedge\mu_{m,n}"] & S(\omega)\wedge E_{m+n} \arrow[r, "\varepsilon_{m+n}"] & E_{m+n+1} \\
E_m\wedge(S(\omega)\wedge E_n) \arrow[r, "1\wedge\varepsilon_n"] & E_m\wedge E_{n+1} \arrow[ur, "\mu_{m,n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで、$\nu(s,u,v) = (u, J^m(s), v)$; $s\in S(\omega)$, $u\in E_m$, $v\in E_n$,

(2)
$$\begin{tikzcd} E_m \wedge E_n \wedge E_p \arrow[r] \arrow[d] & E_m \wedge E_{n+p} \arrow[d] \\ E_{m+n} \wedge E_p \arrow[r] & E_{m+n+p} \end{tikzcd},$$

(3)
$$\begin{tikzcd} S(m\omega) \wedge E_n \arrow[r] \arrow[dr, "\varepsilon_{m+n-1}\circ\cdots\circ\varepsilon_n"'] & E_m \wedge E_n \arrow[d, "\mu"] & E_m \wedge S(n\omega) \arrow[l] \arrow[d, "\nu'"] \\ & E_{m+n} & S(n\omega) \wedge E_m \arrow[l] \end{tikzcd}$$

ここで, $\nu'(u, s) = (J^{mn}(s), u)$; $u \in E_m$, $s \in S(n\omega)$.

更に,

$$\begin{tikzcd} E_m \wedge E_n \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu_{m,n}"'] & & E_n \wedge E_m \arrow[dl, "\mu_{n,m}"] \\ & E_{m+n} & \end{tikzcd}$$

において, $\mu_{n,m} \circ T \simeq_G J^{mn} \mu_{m,n}$ (stably) のとき, $\mathbb{E}$ を可換な ring G-spectrum と呼ぶ。 ring-G-spectrum $\mathbb{E}$ に対しては, "積"

$$\mu : \hat{\mathbb{E}}^{\alpha}(X) \underset{A(G)}{\otimes} \hat{\mathbb{E}}^{\beta}(Y) \longrightarrow \hat{\mathbb{E}}^{\alpha+\beta}(X \wedge Y)$$

が定義される.

§2. 対称モノイダルG-圏の delooping

(2.1) topological G-category $\mathcal{C}$ が対称モノイダル G-圏 (sym. mon. G-cat.) $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ G-functor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\oplus} \mathcal{C}$,

$0 \in \mathcal{C}^G$, および次の coherent natural G-isomorphisms が存在する:

$$a \oplus (b \oplus c) \cong (a \oplus b) \oplus c$$

$$a \oplus 0 \cong a \cong 0 \oplus a$$

$$a \oplus b \cong b \oplus a$$

(2.2) $\mathcal{C}$ に対し, Γ-G-category $\hat{\mathcal{C}} : \Gamma^{op} \to (G\text{-categories})$ を次のように定義する. ([5], §2 参照.)

(i) $\hat{\mathcal{C}}(\underline{0}) = *$

(ii) $n \geq 1$ のとき, (a) $\hat{\mathcal{C}}(\underline{n})$ の objects は $\langle a_S, \alpha_{S,T} \rangle$ の全体, ただし,

$$\begin{cases} a_S = O\mathcal{C}; & \forall S \subset \underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\},\ a_\phi = 0 \\ \alpha_{S,T} : a_{S \cup T} \xrightarrow{\cong} a_S \oplus a_T ; & S, T \subset \underline{n},\ S \cap T = \phi \end{cases}$$

で, $\alpha_{S,T}$ は [5] Def. 2.1 の条件をみたすもの. $O\hat{\mathcal{C}}(\underline{n})$ は $\prod_S O\mathcal{C} \times \prod_{S,T} M\mathcal{C}$ の部分空間と考える.

(b). $a = \langle a_S, \alpha_{S,T} \rangle$, $b = \langle b_S, \beta_{S,T} \rangle \in O\hat{\mathcal{C}}(\underline{n})$ のとき, a から b への morphism とは, $f = \langle f_S \rangle$; $f_S : a_S \to b_S$ で次の図式を可換にするもの;

$$\begin{array}{ccc} a_{S \cup T} & \xrightarrow{f_{S \cup T}} & b_{S \cup T} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{S,T}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{S,T}} \\ a_S \oplus a_T & \xrightarrow{f_S \oplus f_T} & b_S \oplus b_T . \end{array}$$

(ii) $\langle a_S, \alpha_{S,T}\rangle \in O\hat{\zeta}(\underline{n})$, $g\in G$ のとき、

$$g\langle a_S, \alpha_{S,T}\rangle = \langle g a_S, g\alpha_{S,T}\rangle.$$

(iii) $\theta : \underline{m} \longrightarrow \underline{n} \Rightarrow \theta^* : \hat{\zeta}(\underline{n}) \to \hat{\zeta}(\underline{m})$, $\theta^*\langle a_S, \alpha_{S,T}\rangle$ $= \langle b_U, \beta_{U,V}\rangle$; $b_U = a_{\theta U}$, $\beta_{U,V} = \alpha_{\theta U, \theta V}$ ($U, V \subset \underline{m}$).

(2.4) (2.3) で定義した $\hat{\zeta}(\underline{n})$ の objects および morphisms の空間を考えることにより、2つの Γ-G-spaces

$$O\hat{\zeta} : \underline{n} \longmapsto O\hat{\zeta}(\underline{n}),$$
$$M\hat{\zeta} : \underline{n} \longmapsto M\hat{\zeta}(\underline{n})$$

および Γ-G-spaces の maps

$$O\hat{\zeta} \xrightarrow{\text{identity}} M\hat{\zeta} \underset{\text{target}}{\overset{\text{source}}{\rightrightarrows}} O\hat{\zeta},$$
$$M\hat{\zeta} \times_{O\hat{\zeta}} M\hat{\zeta} \xrightarrow{\text{composition}} M\hat{\zeta}$$

が得られる。

(2.5) 任意の pointed G-space X に対して、G-category $X\otimes\zeta$ を次のように定義する：

$$O(X\otimes\zeta) = \coprod_n X^n \times O\hat{\zeta}(\underline{n})/\Gamma$$

$$M(X\otimes\zeta) = \coprod_n X^n \times M\hat{\zeta}(\underline{n})/\Gamma$$

とおき、$X\otimes\zeta$ の構造写像は、(2.4) の Γ-G-maps から得られるものとする。

(2.6) <u>命題</u>. $X\otimes\mathcal{C}$ の分類空間 $|X\otimes\mathcal{C}|$ は G-space として

$$X\otimes_{\Gamma} C = \coprod_{n} X^{n}\times|\hat{\mathcal{C}}(\underline{n})| \,/\, \Gamma$$

に natural に同相である. ここで C は $\underline{n}\mapsto|\hat{\mathcal{C}}(\underline{n})|$ ($\hat{\mathcal{C}}(\underline{n})$ の分類空間) なる Γ-G-space.

<u>略証</u>. 次の図式を考えればよい.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{X\otimes} & & \\
 & O\hat{\mathcal{C}}(\underline{0}) & O\hat{\mathcal{C}}(\underline{1}) & \cdots & O\hat{\mathcal{C}}(\underline{n}) & \dashrightarrow & O(X\otimes\mathcal{C}) \\
\text{geom.} & M\hat{\mathcal{C}}(\underline{0}) & M\hat{\mathcal{C}}(\underline{1}) & \cdots & M\hat{\mathcal{C}}(\underline{n}) & \dashrightarrow & M(X\otimes\mathcal{C}) \\
\text{real.} & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & N_q\hat{\mathcal{C}}(\underline{0}) & N_q\hat{\mathcal{C}}(\underline{1}) & \cdots & N_q\hat{\mathcal{C}}(\underline{n}) & \dashrightarrow & N_q(X\otimes\mathcal{C}) \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & |\hat{\mathcal{C}}(\underline{0})| & |\hat{\mathcal{C}}(\underline{1})| & \cdots & |\hat{\mathcal{C}}(\underline{n})| & \dashrightarrow & X\otimes C \cong |X\otimes\mathcal{C}|
\end{array}
$$

ここで, 横の列は Γ-G-space, たての列は simplicial space で, 右端および下端は, それらから得られる coend. iterated coend は coend のとり方の順序を変えても natural に同型である.

(2.7) 図式

$$
\begin{tikzcd}
 & X\times C(\underline{1}) \arrow[d] & \\
{*}\times C(\underline{1}) \arrow[ur, "\delta_*\times 1"] \arrow[dr, "1\times\delta_*"'] & X\otimes C & X\times C(\underline{0}) \arrow[ul, "1\times\varepsilon^*"'] \arrow[dl, "\varepsilon_*\times 1"] \\
 & {*}\times C(\underline{0}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
,\qquad \underline{0} \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \underline{1}
$$

は可換．したがって G-map

$$X \wedge C(\underline{1}) = X \wedge |\mathcal{C}| \longrightarrow |X \otimes \mathcal{C}|$$

が導かれる．

(2.8) <u>定理</u>．$X \otimes \mathcal{C}$ は再び，対称モノイダル G-圏になる．

<u>略証</u>．次の順序で示す．

(i) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: sym. mon. G-cat $\Rightarrow (\mathcal{C} \times \mathcal{D})^\wedge = \hat{\mathcal{C}} \times \hat{\mathcal{D}}$

$\Rightarrow X \otimes (\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \cong (X \otimes \mathcal{C}) \times (X \otimes \mathcal{D})$.

(ii) $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\oplus} \mathcal{C}$ は sym. mon. G-functor $\Rightarrow$

$(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\wedge \xrightarrow{\hat{\oplus}} \hat{\mathcal{C}}$ (Γ-G-functor)

が導かれる．

(iii) (ii) より G-functor $X \otimes \mathcal{C} \times X \otimes \mathcal{C} \cong X \otimes (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \xrightarrow{\oplus} X \otimes \mathcal{C}$ が定義され，これにより，$X \otimes \mathcal{C}$ は sym. mon. G-cat. となる．

(2.9) <u>定義</u>．対称モノイダル G-圏 $\mathcal{C}$ に対し，

$$B\mathcal{C} = S(\omega) \otimes \mathcal{C}$$

とおくと，これは対称モノイダル G-圏となる．以下帰納的に

$$B^{n+1}\mathcal{C} = S(\omega) \otimes B^n\mathcal{C}, \quad n \geq 1$$

とおく．(3.7) より G-maps

$$S(\omega) \wedge |B^n\mathcal{C}| \xrightarrow{\varepsilon_n} |B^{n+1}\mathcal{C}|$$

が存在する．

(2.10) <u>系</u>. $\mathbb{E}(\mathcal{C}) = \{ |B^n \mathcal{C}|, \varepsilon_n \}$ は G-spectrum.

(2.11) <u>注意</u>. 適当な条件の下では ε_n の adjoint

$$|B^n \mathcal{C}| \longrightarrow \Omega^\omega |B^{n+1}\mathcal{C}|$$

は G-homotopy equivalence になる.

§3. G-pairings

(3.1) $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$; sym. mon. G-categories, $P : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$: G-functor とする. (定義) P が G-pairing $\Longleftrightarrow$ natural G-isomorphisms

$$\delta : P(a \oplus a', b) \xrightarrow{\cong} P(a, b) \oplus P(a', b)$$

$$\delta' : P(a, b \oplus b') \xrightarrow{\cong} P(a, b) \oplus P(a, b')$$

が存在して, P は各変数について sym. mon. G-functor になり, 次の図式が可換 :

$$\begin{array}{ccc}
P(a, b\oplus b') \oplus P(a', b\oplus b') & \cong & (P(a,b)\oplus P(a,b'))\oplus(P(a',b)\oplus P(a',b')) \\
\wr\| \, \delta' & & \\
P(a\oplus a', b\oplus b') & & \wr\| \\
\wr\| \, \delta & & \\
P(a\oplus a', b)\oplus P(a\oplus a', b') & \cong & (P(a,b)\oplus P(a',b))\oplus(P(a,b')\oplus P(a',b')).
\end{array}$$

とくに, $\mathcal{C}$ が2つの sym. mon. structure $(\oplus, 0)$, $(\otimes, 1)$ をもち, $\otimes : (\mathcal{C}, \oplus) \times (\mathcal{C}, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{C}, \oplus)$ が G-pairing になるとき, $\mathcal{C}$ を対称バイモノイダル G-圏 (symmetric bimonoidal G-category) と呼ぶ.

$\mathcal{C}$ を対称バイモノイダル G-圏とし、$\oplus$ に関して、$B^n\mathcal{C}$ を構成する（$B^0\mathcal{C} = \mathcal{C}$）.

(3.2) <u>定理</u>. 任意の整数の組 (m, n); $m, n \geq 0$ に対して、G-pairing $P_{m,n} : B^m\mathcal{C} \times B^n\mathcal{C} \longrightarrow B^{m+n}\mathcal{C}$ で次の性質をみたすものが存在する.

(i) $P_{0,0} = \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

(ii) 次の図式が coherent な natural G-isom. を除いて可換.

$$\begin{tikzcd}
B^m\mathcal{C} \times B^n\mathcal{C} \times B^p\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & B^m\mathcal{C} \times B^{n+p}\mathcal{C} \arrow[d] \\
B^{m+n}\mathcal{C} \times B^p\mathcal{C} \arrow[r] & B^{m+n+p}\mathcal{C}
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
B^m\mathcal{C} \times B^n\mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & B^n\mathcal{C} \times B^m\mathcal{C} \arrow[d] \\
B^{m+n}\mathcal{C} \arrow[r] & B^{n+m}\mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

ここで、$\tau_{m,n}$ は (m, n) に対して定まる $B^{m+n}\mathcal{C}$ のある自己同型.

<u>略証</u>. (i) X, Y pointed G-space とするとき、G-同型 $\tau : X \otimes (Y \otimes \mathcal{C}) \cong Y \otimes (X \otimes \mathcal{C})$ が存在する.

(ii) $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ G-pairing とするとき、G-pairings

$$(X \otimes \mathcal{C}) \times \mathcal{D} \to X \otimes \mathcal{E} \quad (\Leftarrow \hat{\mathcal{C}}(\underline{n}) \times \mathcal{D} \to \hat{\mathcal{E}}(\underline{n})),$$

$$\mathcal{C} \times (Y \otimes \mathcal{D}) \to Y \otimes \mathcal{E} \quad (\Leftarrow \mathcal{C} \times \hat{\mathcal{D}}(\underline{n}) \to \hat{\mathcal{E}}(\underline{n}))$$

が定義され、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd} & X\otimes(Y\otimes\varepsilon) \arrow[d, "\tau", "\cong"'] \\ (X\otimes\zeta)\times(Y\otimes D) \arrow[ur] \arrow[r] & Y\otimes(X\otimes\varepsilon). \end{tikzcd}$$

(iii) (ii) を用いて $P_{m,n}: B^m\zeta\times B^n\zeta \longrightarrow B^{m+n}\zeta$ を帰納的に構成する： $X_1,\dots,X_{m+n}=S(\omega)$, $B^m\zeta = X_1\otimes\cdots\otimes X_m\otimes\zeta$, $B^n\zeta = X_{m+1}\otimes\cdots\otimes X_{m+n}\otimes\zeta$ とおくとき、

$$\begin{tikzcd} (X_1\otimes\cdots\otimes X_m\otimes\zeta)\times(X_{m+1}\otimes\cdots\otimes X_{m+n}\otimes\zeta) \arrow[r, "P_{m,n}"] \arrow[d, "T"] & X_1\otimes\cdots\otimes X_{m+n}\otimes\zeta \arrow[d, "\tau_{m,n}"] \\ (X_{m+1}\otimes\cdots\otimes X_{m+n}\otimes\zeta)\times(X_1\otimes\cdots\otimes X_m\otimes\zeta) \arrow[r, "P_{n,m}"] & X_{m+1}\otimes\cdots\otimes X_{m+n}\otimes X_1\otimes\cdots\otimes X_m\otimes\zeta \end{tikzcd}$$

となる。ここで、$\tau_{m,n}$ は置換 $\begin{pmatrix}1 & \cdots\cdots & \cdots & m+n\\ m+1, \cdots & m+n & 1 & \cdots\ m\end{pmatrix}$ に対応する同型（(i)の τ 達の合成）。

(3.3) G-pairings $P_{m,n}$ は G-maps $\mu_{m,n}: |B^m\zeta|\times|B^n\zeta| \longrightarrow |B^{m+n}\zeta|$ を誘導する。また $\iota_0: S^0\longrightarrow|\zeta|$ （$\iota_0(1)$ は $1\in O\zeta$ の類）を suspend して G-maps $\iota_n: S(n\omega)\longrightarrow|B^n\zeta|$ が得られる。

(3.4) <u>系</u>. $E(\zeta)=\{|B^n\zeta|, \varepsilon_n\}$ は可換な ring G-spectrum になる。

§4. 補遺

Gを有限群，$RO(G)$をその実表現環とする．

(4.1) $\Xi = \{G, I, \{V(\alpha); \alpha \in I^+\}, \{\varphi(\alpha, \beta); \alpha, \beta \in I^+\}\}$

を次の data から成る系とする．

(i) I は $RO(G)$ の部分群，$I^+ = I \cap RO(G)^+$，

(ii) $V(\alpha)$ は $\alpha \in I^+$ を代表する G-module，

(iii) $\varphi(\alpha, \beta) : V(\alpha) \times V(\beta) \xrightarrow{\approx} V(\alpha+\beta)$ は表現の同型で，次の図式を可換にするもの：

$$\begin{array}{ccc}
V(\alpha) \times V(\beta) \times V(\gamma) & \xrightarrow{1 \times \varphi(\beta, \gamma)} & V(\alpha) \times V(\beta+\gamma) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi(\alpha,\beta) \times 1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(\alpha, \beta+\gamma)} \\
V(\alpha+\beta) \times V(\gamma) & \xrightarrow{\varphi(\alpha+\beta, \gamma)} & V(\alpha+\beta+\gamma)
\end{array}$$

以下では，I は 1（自明表現）および $d\omega$（ωは正則表現，dはある正整数）を含むものと仮定する．

(4.2) 例．$I = RO(G)$の場合を考える．§1 と同様，Gの既約表現の代表系 $V_0, \cdots, V_\ell$ を選んで，

$$V(\alpha) = \underbrace{V_0 \times \cdots \times V_0}_{\alpha_0} \times \cdots \times \underbrace{V_\ell \times \cdots \times V_\ell}_{\alpha_\ell}$$

とおく．$\varphi(\alpha, \beta)$ を与える為には，各 (i, j)，$0 \leq i < j \leq \ell$ に対して，G-同型 $\varphi_{i,j} : V_j \times V_i \xrightarrow{\approx} V_i \times V_j$ で，次の図式

$$\begin{tikzcd}
V_k \times V_j \times V_i \arrow[r] \arrow[d] & V_k \times V_i \times V_j \arrow[d] \\
V_j \times V_k \times V_i \arrow[d] & V_i \times V_k \times V_j \arrow[d] \\
V_j \times V_i \times V_k \arrow[r] & V_i \times V_j \times V_k
\end{tikzcd}$$

が可換となるものを定めればよい。とくに実数 $a_i^j \neq 0$, $b_i^j \neq 0$ を選んで、$\varphi_{i,j}(y, x) = (a_i^j x, b_i^j y)$; $x \in V_i$, $y \in V_j$ とおけばよい。

(4.3) $H \subset G$ 部分群とし、$res^G_H : RO(G) \to RO(H)$ を表現の制限とする。このとき $res^G_H \Phi = \{H, res^G_H I, \{V(res^G_H \alpha)\}, \{\varphi(res^G_H \alpha, res^G_H \beta)\}\}$ が定義される。

(4.4) Φ ; orientable $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \alpha \in I^+$, $\forall H \subset G$ に対して、$V(\alpha)^H$ の向きを決めて、

$$\varphi(\alpha, \beta)^H : V(\alpha)^H \times V(\beta)^H \longrightarrow V(\alpha+\beta)^H$$

が orientation preserving になる時。

§1 で扱ったのは、$I = RO(G)$ で Φ ; orientable の場合。

(4.6) <u>G-spectra</u>. $\alpha \in I^+$ に対し、$S(\alpha) = V(\alpha)^c$ とする。§1 と同様に G-spectrum (G-CW-spectrum) を定義する。ただし、$\omega \notin I$ $(d\omega \in I)$ のときには、$E = \{E_n, \varepsilon_n\}$ において、$\varepsilon_n ; S(d\omega) \wedge E_n \longrightarrow E_{n+1}$ と思う。

(4.7) 定義. $\mathbb{E}$: G-spectrum, $\alpha \in I^+$ のとき、

$$\Sigma^\alpha \mathbb{E} = \{ E_n \wedge S(\alpha),\ \varepsilon_n \wedge id \}$$

とおく。G-CW-spectra $\mathbb{X}$, $\mathbb{E}$, $\forall \gamma \in I$ に対して、§1 同様 $\{\varphi(\alpha, \beta)\}$ を用いて、

$$h_{\Phi}^{\gamma}(\mathbb{X} ; \mathbb{E}) = \operatorname*{colim}_{\substack{\beta-\alpha=\gamma \\ \alpha,\beta \in I^+}} [\Sigma^\alpha \mathbb{X}, \Sigma^\beta \mathbb{E}]^G$$

とおく。(勿論、これは Φ のとり方に依存する。)

$\forall \varepsilon \in I^+$ に対し、$\sigma^\varepsilon : h_{\Phi}^{\gamma}(\mathbb{X} ; \mathbb{E}) \xrightarrow{\approx} h_{\Phi}^{\gamma+\varepsilon}(\Sigma^\varepsilon \mathbb{X} ; \mathbb{E})$ が定義される；

$$\operatorname{colim} [\Sigma^\alpha \mathbb{X}, \Sigma^\beta \mathbb{E}]^G \xrightarrow{\approx} \operatorname{colim} [\Sigma^{\alpha-\varepsilon} \Sigma^\varepsilon \mathbb{X}, \Sigma^\beta \mathbb{E}]^G.$$

(4.8) Restriction to subgroups. $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n\}$ を G-spectrum, H を G の部分群とする。G の作用を H に制限することにより、$\mathbb{E}$ は H-spectrum と思うことが出来、次の自然変換

$$rest_H^G : h_{\Phi}^{\gamma}(\mathbb{X} ; \mathbb{E}) \longrightarrow h_{rest_H^G \Phi}^{rest_H^G(\gamma)}(\mathbb{X} ; \mathbb{E})$$

が定義される。$rest_H^G$ は suspension と可換である。

(4.9) Fixed-point theory. Φ が orientable のときは §1 と同様にして、Fixed-point coh. theory が定義され、自然変換 $\phi_H : h_{\Phi}^{\gamma}(\mathbb{X} ; \mathbb{E}) \longrightarrow h^{|\gamma^H|}(\mathbb{X}^H ; \mathbb{E}^H)$ が得られる。

参考文献

[1] Araki, S. and Murayama, M., G-homotopy types of G-complexes and representations of G-cohomology theories. Publ. RIMS, 14(1978), 203 – 222.

[2] ――――――, τ-cohomology theories. Japan. J. Math., 4(1978), 363 - 416.

[3] Kosniowski, C., Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann., 210(1974), 83 - 104.

[4] Segal, G., Equivariant stable homotopy theory, Actes. Congres Intern. Math., 2(1970), 59 - 63.

[5] Shimada, N. and Shimakawa, K., Delooping symmetric monoidal categories, Hiroshima Math. J., 9(1979), 627 - 645.