数理解析研究所講究録
第389巻 1980年 92-101

The transfer maps in the KR_G-theory

阪市大 理学部 橋本 伸

§1 KR_G-理論

Gをinvolution τを持った実性compact Lie群，Xを実性G空間とする。

定義　$\xi=(p:E\longrightarrow X)$が実性$G$-ベクトル束であるとは，次のi)～iv)を満たすことである。

i) ξは複素ベクトル束

ii) E，Xは実性G-空間でpは実性G-写像

iii) fibrewiseにGは複素線型に作用

iv) fibrewiseにτは反線型に作用

compact実性G-空間X上の実性G-ベクトル束全体にはWhitney和$\oplus$，テンソル積$\otimes$，外積巾Λ^kが定義されてλ-半環になる。そのGrothandieck環を$KR_G(X)$と書く([2,3])。通常の場合と同様に，compactでないXに対しては実性G-ベクトル束の複体によって$KR_G(X)$を定義する。

命題1.1　([2])　KR_G-理論は実性G-空間(=$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-空間)のcategoryから可換群のcategoryへのcontravariant $G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-homotopy functorである。さらに$\widetilde{KR}_G$はharf exact functorである。すなわち$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-cofibration $X\to Y\to Z$に対して$\widetilde{KR}_G(Z)\to\widetilde{KR}_G(Y)\to\widetilde{KR}_G(X)$が完全列である。

VをGの実性表現空間とする。$\lambda_V=\sum_k(-1)^k\Lambda^k V$をかけることによりThom準同型$\Phi:\widetilde{KR}_G(X_+)\to\widetilde{KR}_G(V^c\wedge X_+)$が定義される。

定理1.2　([3])　Φは同型である。

準同型$c:RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)\to R_R(G)$を次のように定義する。$U$を$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$の実表現空間とするとき，複素ベクトル空間としては$c(U)=U\otimes\mathbb{C}$，作用は$g(u+iu')=gu+i(gu')$，$\tau(u+iu')=\tau u-i(\tau u')$と定めたものである。また$RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$のinvolution jを次のように定義する。$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$の実表現空間$U$に対して$j(U)$は実ベクトル空間としては$U$，作用を$*$で書くと$g*u=gu$，$\tau*u=-\tau u$と定めたものである。$j(U)$のことを$\overline{U}$と書くこともある。複素構造を忘れる写像$F:R_R(G)\to RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$を考える。

補題1.3　$F\circ c=1+j$

これらの性質を用いることにより次の命題を得る。

命題1.4　KR_G-理論は$RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$-gradedな$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-cohomology理論，[5]，に拡張できる。

証明　　V, W を $G\times_\tau \mathbb{Z}_2$ の実表現空間，α を $V-W$ の表わす $RO(G\times_\tau \mathbb{Z}_2)$ の元とする。$\widetilde{KR}^\alpha_G(X_+)=\widetilde{KR}_G((\bar{V}\oplus W)^c\wedge X_+)$ と定義する。$G\times_\tau \mathbb{Z}_2$ の実表現空間 U に対して懸垂同型 σ を次の列の合成によって定義する。

$$\begin{aligned}\widetilde{KR}^\alpha_G(X_+) &= \widetilde{KR}_G((\bar{V}\oplus W)^c\wedge X_+)\\ &\xrightarrow{\text{亜}} \widetilde{KR}_G((cU)^c\wedge(\bar{V}\oplus W)^c\wedge X_+)\\ &= \widetilde{KR}_G((\bar{U}\oplus\bar{V}\oplus W)^c\wedge U^c\wedge X_+)\\ &= \widetilde{KR}^{\alpha+U}_G(U^c\wedge X_+)\end{aligned}$$

§2　　transferと誘導表現

実性 G-空間はinvolutionを忘れることにより G-空間と考えることができ，実性 G-ベクトル束はinvolutionを忘れることにより複素 G-ベクトル束と考えることができる。これは函手の自然変換 $\psi: KR_G\longrightarrow K_G$ を導く。ψ を忘却写像とよぶ。

<u>補題2.1</u>　　Thom同型は ψ と可換である。

KR_G-cohomologyは可容 $G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-束 $\xi=(p: E\longrightarrow X)$ に対して西田transfer $p_!: KR_G(E)\longrightarrow KR_G(X)$ を持つ，[6]。また ξ を可容 G-束と考えると K_G-cohomology はtransfer $p_!: K_G(E)\longrightarrow K_G(X)$ を持つ。KR_G-cohomologyおよび K_G-cohomology における懸垂同型はThom同型で与えられていたので，補題1.2と西田transferの定義より次の命題を得る。

命題2.2　transferはψと可換である。

Hをの実性閉部分群，iをその包含とする。

命題2.3　([6])　Segalの誘導写像 $i_!: R(H) \longrightarrow R(G)$, [7], は可容G-束 $(p: G/H \to pt.)$ のtransfer $p_!: K_G(G/H) \longrightarrow K_G(pt.)$ と同一視される。

次の可換図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
R_R(H) \arrow[dddd, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, sloped, "\cong"] & & & R_R(G) \arrow[dddd, "\psi"] \\
& KR_G(G/H) \arrow[r, "p_!"] \arrow[d, "\psi"'] & KR_G(pt.) \arrow[d, "\psi"'] \arrow[ur, phantom, sloped, "\cong"] & \\
& K_G(G/H) \arrow[r, "p_!"] & K_G(pt.) \arrow[dr, phantom, sloped, "\cong"] & \\
& & & \\
R(H) \arrow[uur, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[rrr, "i_!"] & & & R(G)
\end{tikzcd}
$$

この図式の上の $p_!$ と同型の合成により実性誘導写像

$$i_!: R_R(H) \longrightarrow R_R(G)$$

を定義する。ψが単射であることよりψと可換になる誘導写像はuniqueであることがわかる。また実性表現の指標は複素表現と考えたときの指標だから，実性誘導写像についても指標公式，[7]，を使うことができる。Gへのinvolutionの作用がtrivialなとき $R_R(G)$ は自然に $RO(G)$ と同型である。このとき実性誘導写像は実誘導写像 $i_!: RO(H) \to RO(G)$ を導く。

Eを自由実性G-空間とする。Gの実性表現Mに対して実性ベクトル束 $(E \times_G M \longrightarrow E/G)$ を対応させる写像αは，λ-環準同

型 $\alpha: R_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow KR(E/G)$ を導く。

命題2.4　次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathbb{R}}(H) & \xrightarrow{\alpha} & KR(E/H) \\ {\scriptstyle i_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_!} \\ R_{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\alpha} & KR(E/G) \end{array}$$

証明の概略　$i_!$ は $p_!: KR_G(G/H) \longrightarrow KR_G(pt.)$ と考えてよい。$p_!: KR(E/H) \longrightarrow KR(E/G)$ は $p_!: KR_G(E\times G/H) \longrightarrow KR_G(E)$ と同一視できる。このとき α は自然な射影の導く写像と同一視される。可容 $G\times_\tau \mathbb{Z}_2$-束の pull back 図式に対して transfer は可換になることから命題を得る。([6] 参考)

G と E への involution の作用が trivial なとき, $R_{\mathbb{R}}(G)$ は $RO(G)$ に, $KR(E/G)$ は $KO(E/G)$ に自然に同型である。G/H は trivial な $\mathbb{Z}_2$-空間であるので, $\mathbb{Z}_2$ が trivial に作用する Euclid 空間に埋め込めることに注意すれば次の系を得る。

系2.5　次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} RO(H) & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/H) \\ {\scriptstyle i_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_!} \\ RO(G) & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/G) \end{array}$$

§3　直交群の実表現

$G=O(2m+1)$, $H=O(2)\times O(2m-1)$, diagonal に H を G の部分

群と考えその包含をiとする。Gのcanonicalな$2m+1$次元実表現をτ，determinantの表わす1次元実表現をν，Hのfirst projectionの表わす2次元実表現をμとする。

命題3.1　$\tau = i_! \mu + \nu$

証明　両辺の指標を計算する。Cartan部分群の生成元はGの中でdenseなので，その上での値だけを調べればよい。GのCartan部分群の共役類は2個あってSO(2m+1)のmaximal torus T^mと$T^m \times \mathbb{Z}_2$で代表される。ここに$\mathbb{Z}_2$は$-I_{2m+1}$で生成される部分群である。

$$g(\theta_1, \cdots, \theta_m ; \varepsilon) = \begin{pmatrix} D(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & D(\theta_m) & \\ & & & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とする。T^mと$T^m \times \mathbb{Z}_2$の生成元は，$\theta_1, \cdots, \theta_m$と円周率$\pi$が有理数体上一次独立であるような$g(\theta_1, \cdots, \theta_m ; \pm 1)$と書くことができる。指標はclass functionだから，これらの元における値が一致すればよい。以下の等式は明らかである。

$$\chi_\tau(g(\theta_1, \cdots, \theta_m ; \pm 1)) = \sum_{k=1}^{m} 2\cos\theta_k \pm 1$$

$$\chi_\nu(g(\theta_1, \cdots, \theta_m ; \pm 1)) = \pm 1$$

$$\chi_\mu(g(\theta_1, \cdots, \theta_m ; \pm 1)) = 2\cos\theta_1$$

指標公式を使って$\chi_{i_!\mu}(g(\theta_1, \cdots, \theta_m ; -1))$を計算する。簡単にするため$g(\theta_1, \cdots, \theta_m ; -1)$を$g$と書く。$\chi_{i_!\mu}(g) = \sum_{x \in F} \chi_\mu(x^{-1} g x)$で

ある。ここにFはgのG/Hへの作用のfixed pt.の代表の集合である。まずFを定める。$x \in F$ならば$gxH = xH$だから$x^{-1}gx \in H$である。$x^{-1}gx$は$T^m \times \mathbb{Z}_2$に同型なHのCartan部分群T'を生成する。$T^m \times \mathbb{Z}_2$とT'はHの中で共役であることがわかるので，Hの元hが存在して$T^m \times \mathbb{Z}_2 = h^{-1}x^{-1}(T^m \times \mathbb{Z}_2)xh$となる。従って$xh \in N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)$であるが，$xh$と$x$はG/Hの元として等しいのでFは最初から$N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)$の部分集合であると仮定してよい。射影$G \longrightarrow G/H$による$N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)$の像は$N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)/N_H(T^m \times \mathbb{Z}_2)$であるのでFはその代表と考えてよい。

$$N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)/(T^m \times \mathbb{Z}_2) \cong \Sigma_m \int \mathbb{Z}_2$$

$$N_H(T^m \times \mathbb{Z}_2)/(T^m \times \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_{m-1} \int \mathbb{Z}_2$$

$y = (\sigma; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) \in \Sigma_m \int \mathbb{Z}_2$, $z = (\delta; \rho; \delta_1, \cdots, \delta_{m-1}) \in \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_{m-1} \int \mathbb{Z}_2$とする。ここに$\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$と考える。このとき

$$y^{-1} g(\theta_1, \cdots, \theta_m; -1) y = g(\varepsilon_1 \theta_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, \varepsilon_m \theta_{\sigma^{-1}(m)}; -1)$$

$$z^{-1} g(\theta_1, \cdots, \theta_m; -1) z = g(\delta\theta_1, \delta_1 \theta_{1+\rho^{-1}(1)}, \cdots, \delta_{m-1} \theta_{1+\rho^{-1}(m-1)}; -1)$$

であるから，$\chi_{i,k}(g(\theta_1, \cdots, \theta_m; -1)) = \sum_{k=1}^{m} 2\cos\theta_k$がわかる。同様にして，$\chi_{i,k}(g(\theta_1, \cdots, \theta_m; 1)) = \sum_{k=1}^{m} 2\cos\theta_k$を得る。これで命題は証明された。

§4 Adams conjecture

F_nをS^nのbased homotopy同値全体の成すmonoid，BF_nをそ

の分類空間，$BF = \mathrm{colim}\, BF_n$ とする。有限CW-複体 X に対して $[X, BF]$ は X 上の spherical fibre bundle の fibre homotopy 同値類の成す加群と同型である，[9]。有限CW-複体 X に対し $Sph(X) = [X, BF\times\mathbb{Z}]$ と定義し，$J : KO(X) \longrightarrow Sph(X)$ を $J(\xi) = ([\xi], \dim\xi)$ と定義する。Segal [8] によると $\{F_n\}$ は Γ-category であり，それから得られる infinite loop space は $BF\times\mathbb{Z}$ である。従って Sph-理論は cohomology であり，transfer を持つ。また Γ-category の写像 $\{O(n) \longrightarrow F_n\}$ は infinite loop map $j : BO\times\mathbb{Z} \longrightarrow BF\times\mathbb{Z}$ を導き $j_* = J$ となる。従って J は安定自然変換であり，transfer と可換になる。

g を素数とする。可換群 A に対して $A\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{g}]$ を $A[\frac{1}{g}]$ と書く。KO-理論上の Adams 作用素 ψ^g は，$KO^*(\ )[\frac{1}{g}]$-cohomology 上の安定な作用素に拡張できる，[4]。従って ψ^g は $KO(\ )[\frac{1}{g}]$-理論における transfer と可換である。

<u>定理4.1</u>　(Adams conjecture)

$$J(\psi^g - 1) = 0 : KO(X)[\tfrac{1}{g}] \longrightarrow Sph(X)[\tfrac{1}{g}]$$

証明　この定理は一次元と二次元の場合が Adams [1] によって示された。ξ を X 上の $2m+1$ 次元実ベクトル束とする。このような ξ は $KO(X)$ を加群として生成するから $J(\psi^g - 1)(\xi) = 0$ を示せばよい。ξ の同伴主 $O(2m+1)$-束 $(E \to X)$ を考える。§2 で定義した写像 $\alpha : RO(O(2m+1)) \longrightarrow KO(X)$ は canonical 表

現ηをξに写す。次の可換図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
RO(H)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i_!"'] & KO(E/H)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "J"] \arrow[d, "p_!"'] & Sph(E/H)[\frac{1}{q}] \arrow[d, "p_!"'] \\
RO(G)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\alpha"] & KO(E/G)[\frac{1}{q}] \arrow[r, "J"] & Sph(E/G)[\frac{1}{q}]
\end{tikzcd}
$$

ここにGとHは§3と同じものとする。すると

$$
\begin{aligned}
J(\psi^q-1)(\xi) &= J(\psi^q-1)\alpha(\eta) \\
&= J(\psi^q-1)\alpha(i_!\mu+\nu) \\
&= J(\psi^q-1)\alpha i_!(\mu) + J(\psi^q-1)\alpha(\nu) \\
&= J(\psi^q-1)p_!\alpha(\mu) + J(\psi^q-1)\alpha(\nu) \\
&= p_! J(\psi^q-1)\alpha(\mu) + J(\psi^q-1)\alpha(\nu) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

References

[1] J. F. Adams : On the group J(X)-I, Topology 2 (1963), 181-195.

[2] M.F. Atiyah : K-theory, Benjamin 1967.

[3] M.F. Atiyah : Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math. Oxford (2), 19 (1968), 113-140.

[4] M.F. Atiyah and G.B. Segal : Equivariant K-theory and completions, J. Differential Geometry 3 (1969), 1—18.

[5] C. Kosniowski : Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann. 210 (1974), 83—104.

[6] G. Nishida : The transfer homomorphism in equivariant generalised cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 435—451.

[7] G.B. Segal : The representation ring of a compact Lie group, Publ. Math. I.H.E.S. 34 (1968), 113—128.

[8] G.B. Segal : Categories and cohomology theories, Topology 13 (1974), 293—312.

[9] D. Stasheff : A classification theorem for fibre spaces, Topology 2 (1963), 239—246.