数理解析研究所講究録
第 389 巻 1980 年 107-113

Real elliptic operator の解析的指数と Real Lie group の誘導表現

京大 理 河野 明
阪市大 理 橋本 伸

§1 序文

G を compact Real Lie group つまり, compact Lie group G で $\tau^2 = 1_G$ をみたす Lie group の同型 $\tau: G \to G$ を持つ物とする。τ による, G と $\mathbb{Z}/2$ の半直積を $\tilde{G}$ と書き $\tilde{G}$ の元を (g, ε), $g \in G$, $\varepsilon = \pm 1$ で表わす。Real G space とは $\tilde{G}$ space X のこととする。

<u>定義 1.1.</u> M が Real G-module とは

1) M は $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector space。
2) M に G が連続かつ $\mathbb{C}$-線型に作用する。
3) conjugate linear involution $\tilde{\tau}: M \to M$ があって, $\tilde{\tau}(g \cdot m) = \tau(g)\tilde{\tau}(m)$ $g \in G$, $m \in M$ をみたす。

上の定義で, 1) を

1)′ M は $\mathbb{C}$ 上の locally convex complete Hausdorff な linear topological space である。

に変えた物を "広い意味の Real G-module" と言う。

Real G module が irreducible e.t.c は complex G-module と同様に定義される。irreducible Real G-module で生成される自由アーベル群を $R_R(G)$ と書く。Real structure を forget して

$$\phi : R_R(G) \longrightarrow R(G)$$

が定義されるが，ϕ は単射であることがわかっている[1]。

G の closed subgroup H は $\tau(H) \subset H$ ($\Leftrightarrow \tau(H)=H$) の時 Real subgroup と呼ばれる。さて，H を Real subgroup とし $i_! : R(H) \rightarrow R(G)$ を Bott [3], Segal [6] の誘導表現とする。この時 橋本 [4] は

$$\begin{array}{ccc} R_R(H) & \xrightarrow{i_!} & R_R(G) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ R(H) & \xrightarrow[i_!]{} & R(G) \end{array}$$

を可換にする，準同型 $i_! : R_R(H) \rightarrow R_R(G)$ を定義した。しかし [4] の定義は，transfer [5] を用いており，直接幾何学的意味をとらえにくい面がある。このノートの目的は，この $i_! : R_R(H) \rightarrow R_R(G)$ が実際に，ある Real elliptic operator の解析的指数で表現出来ることを示すことにある。注意すべきは，ϕ が常に単射であるから，上の図式を可換にする $i_! : R_R(H) \rightarrow R_R(G)$ が存在すれば，それは一意的になることである。よって，上を可換にする $i_!$ は，すべて [4] の定義と一致する。

§2 Real G manifold の tangent space と tangent bundle.

M を smooth manifold とする時 $T(M)$ $(T^*(M))$ で M の tangent (cotangent) bundle を $T_x(M)$ $(T^*_x(M))$ で $x \in M$ における tangent (cotangent) space を表わす。Real G manifold とは smooth な $\tilde{G}$ manifold のこととする。今 Real G manifold M に対して，$T(M)$ に（又は同様に $T^*(M)$ に）$\tilde{G}$ が作用するが，この作用は我々の場合には少し都合が悪い。$f: \mathbb{R} \to M$ を smooth map とする。

$$((g,\varepsilon)f)(t) = (g,\varepsilon)(f(\varepsilon t))$$

とおくと $((g,\varepsilon)f): \mathbb{R} \to M$ smooth map となる。この作用は自然に tangent bundle の smooth $\tilde{G}$ 作用になるが，この作用を持つ Real G manifold を $TR(M)$ と書く。(Cotangent についても同様にして $TR^*(M)$ を定義する。)

$x \in M$ とし，$(e,\varepsilon)x = x$ $\varepsilon = \pm 1$ とする。この時

<u>補題 2.1.</u> $H_x = \{g \in G;\ (g,1)x = x\}$ は Real subgroup

証明. $(\tau(g),1) = (e,-1)(g,1)(e,-1)$ より明らか.

$T_x(M)$ には $\tilde{H}_x$ が作用するが，上と同様に作用をとりかえた space を $TR_x(M)$ と書く。($TR^*_x(M)$) も同様).

$(x,0) \in TR(M)$ をとると $(e,\varepsilon)(x,0) = (x,0)$ $H_{(x,0)} = H_x$ が成立する。

今 $TR_{(x,0)}(TR(M))$ を考えると，実数体上の vector space として，

$$TR_{(x,0)}(TR(M)) \cong T_x(M) \oplus T_x(M)$$

ここで 前の直和因子は M 方向の，後の直和因子は $T_x(M)$ 方向の tangent vector を表わす。$TR_{(x,0)}(TR(M))$ への $\hat{H}_x$ 作用は，

$$(g,\varepsilon)(u,v) = ((-1)^{\varepsilon}(g,\varepsilon)u,\ (g,\varepsilon)v)$$

と上の直和分解を使って書ける $g \in H_x$, $\varepsilon = \pm 1$, さて，

$g(u,v) = (g,1)(u,v)$ によって $TR_{(x,0)}(TR(M))$ を（実数体上の）H_x vector space と考える。この複素構造を $i(u,v) = (-v,u)$ で定義し $\tilde{\tau}(u,v) = (e,-1)(u,v)$ とおく。

$$\tilde{\tau}\circ i(u,v) = \tilde{\tau}(-v,u) = (v,u)$$

$$i\circ\tilde{\tau}(u,v) = i(-u,v) = (-v,-u) = -\tilde{\tau}\circ i(v)$$

$$\tilde{\tau}(g(u,v)) = (e,-1)(g,1)(u,v) = (e,-1)(g,1)(e,-1)(e,-1)(u,v)$$

$$= (\tau(g),1)\tilde{\tau}(u,v) = \tau(g)\tilde{\tau}(u,v)$$

従って次を得る。

定理 2.2. M を Real G manifold $x \in M$ が $(e,-1)x = x$ をみたすとする。この時

$$TR_{(x,0)}(TR(M))$$

は Real H_x-module になる。さらに complex H_x-module として

$$TR_{(x,0)}(TR(M)) \cong T_x(M) \otimes \mathbb{C}.$$

（後半は作り方より明らか。$TR^*_{(x,0)}(TR(M)) \cong T^*_x(M) \otimes \mathbb{C}$ も同様）

§3 誘導表現の定義

G を compact Real Lie group H を Real subgroup とすると，G/H は自然に Real G manifold になる。明らかに $(e,-1)[H]=[H]$ であるから，$TR=TR^*_{([H],0)}(TR(G/H))$ が定義され，Real H-module になる。

M を Real H-module とする時

$$G\times_H M \longrightarrow G/H$$

で定義される Real G vector bundle を E_M と書く。また $\Gamma(\ )$ でその smooth section 全体を表わす。任意の Real G vector bundle に対して，$\Gamma(\xi)$ は自然に（適当な topology で）広い意味の Real G module になる。

G 同変な Real connection

$$\nabla:\ \Gamma(E_M)\longrightarrow \Gamma(E_M\otimes TR)$$

を選ぶと ∇ は自然に G 同変な Real operator

$$D:\ \Gamma(E_M\otimes\Lambda^p TR)\longrightarrow \Gamma(E_M\otimes\Lambda^{p+1}TR)$$

に拡張される。（くわしくは Atiyah-Singer [2] を見よ）。この D の作る symbol の列は外変微分の定義からただちにわかるように zero section 以外では exact である。しかし $D^2\neq 0$ の可能性があるので，各 bundle に G 不変かつ $\overline{(\tau(x),\tau(y))}=(x,y)$ をみたす内積を定義し（この存在は G 不変内積 $\langle,\rangle$ に対して $(x,y)=\frac{1}{2}(\langle x,y\rangle+\overline{\langle\tau(x),\tau(y)\rangle}$

とおけばよい）; これに関する adjoint を D^* とし

$$D+D^* \quad \coprod_{p\,\mathrm{even}} \Gamma(E_M \otimes \Lambda^p T_R) \longrightarrow \coprod_{p\,\mathrm{odd}} \Gamma(E_M \otimes \Lambda^p T_R)$$

を考えると，これは G 同変 Real elliptic operator となる。

<u>定義 3.1.</u> $i_!(M) = a\text{-ind}\,(D+D^*) = \mathrm{Ker}(D+D^*) - \mathrm{Coker}(D+D^*)$

この Real structure を forget すると，Segal の定義から

<u>定理 3.2.</u>

$$\begin{array}{ccc} R_R(H) & \xrightarrow{i_!} & R_R(G) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ R(H) & \xrightarrow{i_!} & R(G) \end{array}$$

は可換である。

とくに

<u>系 3.3.</u> 上の定義は 橋本[4]の $i_!$ と一致する。

参考文献

[1] M.F. Atiyah–G.B. Segal; Equivariant K-theory and completion, J. Diff. Geom. 3(1968) 1–18.

[2] M.F. Atiyah–I.M. Singer; The index of elliptic operators V, Ann. Math.

[3] R. Bott; The index theorem for homogeneous differential operators, Diff. and comb. topology 167–186.

[4] S. Hashimoto; The transfer map in the KR_G-theory (to appear in Osaka J. Math.) (本講究録)

[5] G. Nishida; The transfer homomorphism in equivariant generalized cohomology, J. Math Kyoto Univ. 18(1978), 435–451

[6] G.B. Segal; The representation ring of compact Lie group, Publ. I.H.E.S. 34(1968), 113–128.