数理解析研究所講究録
第389巻 1980年 114-121

KRのtransferについて

京大　数理研　　永田　雅嗣

Gを有限群とする。G-コホモロジー論h_G^*において、同変ファイバーバンドルに対して定義されるBecker-Gottlieb型のtransfer, Nishida transferが、KR_G-群においては、同変有限被覆に対して幾何学的に定義されるAtiyah transferと一致することを証明する。この結果を使って、KR-論におけるSegal-Becker型定理を証明することもできる。

§1. 定義

Gを有限群、Γをコンパクトリー群，$\alpha: G \to \mathrm{Aut}\,\Gamma$を準同型とする。$F \to E \xrightarrow{p} B$が$(\Gamma, \alpha, G)$-bundleであるとは、

$E = \tilde{E} \times_\Gamma F$,　$\tilde{E} \xrightarrow{\tilde{p}} B$はprincipal Γ-bundle,

$\tilde{E}$は$\Gamma \rtimes_\alpha G$-spaceで$\tilde{p}$はG-map,

Fはclosed $\Gamma \rtimes_\alpha G$-manifold,　Bはcompact G-space

が成り立つときをいう。([5] 参照。)

h_G^* を Kosniowski [4] の意味での $RO(G)$-graded な G-コホモロジー論とする。(Γ, α, G)-bundle $F \to E \xrightarrow{p} B$ に対する Nishida transfer

$$p_!:\ h_G^*(E) \longrightarrow h_G^*(B)$$

は、[5] において次のように定義された。

$F \hookrightarrow W$ を実 $\Gamma \times_\alpha G$-module W への $\Gamma \times_\alpha G$-embedding，$\nu(F)$ をその法束とする。G-ベクトル束 $\eta = \widetilde{E} \times_\Gamma W \to B$ に対して、$\eta \oplus \eta^\perp \cong B \times V$ （V は実 G-module）となる $\eta^\perp$ をとる。

$$t(p):\ B_+ \wedge V^c = (B \times V)^c \longrightarrow (E \times V)^c = E_+ \wedge V^c$$

を、$B \times V \cong (\widetilde{E} \times_\Gamma W) \oplus \eta^\perp \underset{\text{open embedding}}{\hookleftarrow} (\widetilde{E} \times_\Gamma \nu(F)) \times_B \eta^\perp \underset{\text{proper map}}{\hookrightarrow} (\widetilde{E} \times_\Gamma (F \times W)) \times_B \eta^\perp \cong E \times V$ の一点コンパクト化によりつくる。ここに X_+ は $X \amalg$ (一点)，V^c は V の一点コンパクト化をあらわす。合成

$$p_!:\ h_G^*(E) = \widetilde{h}_G^*(E_+) \underset{\cong}{\xrightarrow{\sigma}} \widetilde{h}_G^{*+V}(E_+ \wedge V^c) \xrightarrow{t(p)^*} \widetilde{h}_G^{*+V}(B_+ \wedge V^c) \underset{\cong}{\xrightarrow{\sigma^{-1}}} \widetilde{h}_G^*(B_+) = h_G^*(B)$$

を Nishida transfer という。

以下では (Γ, α, G)-bundle $F \to E \xrightarrow{p} B$ が finite G-covering，すなわち F が有限集合のときを考える。

$h_G^* = KR_G^*$ とする。すなわち KR_G は実性 G-ベクトル束の K-理論であって、（G は実性有限群，すなわち対合 $\tau: G \to G$ をもつ。）

$$KR_G^{V-W}(X) = \widetilde{KR}_G(X_+ \wedge (W \oplus \overline{V})^c)$$

とおくことにより $RO(G \times_\tau \mathbb{Z}_2)$-graded な $G \times_\tau \mathbb{Z}_2$-コホモロジー論になる。（ここに $\overline{V}$ は $V \oplus \overline{V} \in RR(G)$ となるような実表現で

ある。$\overline{V}$の定義，およびKR_G^*の定義については［3］参照。）

Atiyahの幾何学的transfer $\tau: KR_G(E) \to KR_G(B)$ は、E上の実性G-ベクトル束$\xi \to E$に対し、実性G-ベクトル束$\tau\xi \to B$を、

$$(\tau\xi)_x = \bigoplus_{y \in p^{-1}(x)} \xi_y$$

とおくことにより定義された。（［1］）

§2. 命題と系

<u>命題</u>　$E \xrightarrow{p} B$がfinite G-coveringのとき、

$$\tau = p_! : KR_G^0(E) \longrightarrow KR_G^0(B)$$

<u>系</u>　$G=\{e\}$とする。$U(2n)/\{1\} \times N(T^{n-1}) \times U(n) \longrightarrow U(2n)/T^1 \times N(T^{n-1}) \times U(n)$ に同伴した1次元実性ベクトル束をα，$U(2n)/\{1\} \times U(n) \longrightarrow U(2n)/N(T^n) \times U(n)$ に同伴したn次元実性ベクトル束をβとする。ただし$U(2n)$およびその部分群には標準的な複素共役による対合が与えられているものとする。このときn重covering $p: U(2n)/T^1 \times N(T^{n-1}) \times U(n) \longrightarrow U(2n)/N(T^n) \times U(n)$ に対するtransferを$p_!$とすると、

$$p_!(\alpha) = \beta .$$

この系は、次の定理の証明に使われる。

<u>定理</u>([6]) $\mathbb{C}P^\infty$ に標準的な複素共役による対合を与える。X を基点をもった finite $\mathbb{Z}_2$-complex とすると、自然な split epimorphism

$$\lambda_* : \{X, \mathbb{C}P^\infty\}_{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow \widetilde{KR}(X)$$

が存在する。

§3. 命題の証明

$F \to E \xrightarrow{p} B$ が finite G-covering のときは、$\nu(F) \cong F \times W$ となるから、transfer を定義する写像 $t(p)$ は、$t(p) = i^c$, ただし

$$i : E \times V \hookrightarrow B \times V$$

は実性 G-open embedding で合成 $E \hookrightarrow E \times V \xrightarrow{i} B \times V \to B$ が p と一致するもの、としてよい。

コンパクトな実性 G-space X に対し、KR_G-論の懸垂同型 σ は、次の合成により得られる。

$$KR_G(X) \xrightarrow[\cong]{\otimes \Lambda_{V \oplus \bar{V}}} KR_G(X \times V \times \bar{V}) \xrightarrow[\cong]{f} \widetilde{KR}_G(X_+ \wedge (V \oplus \bar{V})^c) = KR_G^V(X_+ \wedge V^c)$$

ただし $\Lambda_{V \oplus \bar{V}}$ は、$V \oplus \bar{V} \in RR(G)$ を複素ベクトル空間とみての外積べきによる Thom 要素, また局所コンパクト実性 G-space Y に対する $KR_G(Y)$ は、コンパクトな support をもつ Y 上の実性 G-ベクトル束の複体に、[7], §3 に示されたような同値関係を入れたもののなす集合と定義する。このとき "$\otimes \Lambda_{V \oplus \bar{V}}$"

が同型になることは[2], §5に示されている。

Segalの結果([7])はKR$_G$にも同様に拡張される:

(i) Yがコンパクトのときに$KR_G(Y)$の二つの定義は一致する。

(ii) X, Aがコンパクト, X⊃Aのとき、

$$KR_G(X, A) \xrightarrow{\cong} KR_G(X-A)$$

これにより上の写像fは同型になる。

VをV⊕$\overline{V}$でとりかえることにより、命題の証明は、図式

$$\begin{tikzcd} KR_G(E) \arrow[r, "\otimes\Lambda", "\cong"'] \arrow[d, "\tau"'] & KR_G(E\times V) \arrow[r, "f", "\cong"'] & \widetilde{KR}_G(E_+\wedge V^c) \arrow[d, "(i^c)^*"] \\ KR_G(B) \arrow[r, "\otimes\Lambda", "\cong"'] & KR_G(B\times V) \arrow[r, "f", "\cong"'] & \widetilde{KR}_G(B_+\wedge V^c) \end{tikzcd}$$

の可換性を示せば十分である。

<u>補題</u> $i: X \hookrightarrow Y$を局所コンパクトな実性G-spacesのopenな実性G-embedding, Y上の任意の実性G-ベクトル束がinverse bundleをもつと仮定する。

$KR_G(X) \ni \xi = [\xi_0 \xrightarrow{\partial} \xi_1]$, $KR_G(Y) \ni \zeta = [\zeta_0 \xrightarrow{\partial'} \zeta_1]$が

$$supp(\zeta) \subset X, \qquad \zeta|_X = \xi \ \ in\ KR_G(X)$$

を満たすとき、$\zeta = f^{-1} \circ (i^c)^* \circ f(\xi)$が成り立つ。

<u>証明</u> 次の図式は可換である:

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{KR}_G(X^c) \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & KR_G(Y^c, Y^c-X) \arrow[rr, "j^*"] \arrow[dr, "res"] \arrow[dd, "\cong"] & & KR_G(Y^c, *) = \widetilde{KR}_G(Y^c) \arrow[d, "\cong", "f^{-1}"'] \\
& & KR_G(Y, Y-X) \arrow[r, "j^*"] \arrow[dl, "res"] & KR_G(Y) \\
& KR_G(X) \arrow[uul, "f", "\cong"'] & &
\end{tikzcd}
$$

ただし φ はコンパクト対の切除同型（[7], (2.9)）, 従って第一行の合成は $(i^c)^*$ に等しい。また res はベクトル束の複体の制限による写像で、従って垂直方向の写像は前述の (ii) により同型である。

$KR_G(X) \ni \xi = \zeta|_X$ は、$supp(\zeta) \subset X$ であるから $KR_G(Y, Y-X)$ の元 ζ の像であるが、補題の仮定によりこの元は $KR_G(Y^c, Y^c-X)$ の元に拡張できる。（[7], (A.4) 参照） $\varphi\circ f$ が同型であるから この元は $\varphi\circ f(\xi)$ と一致し、$f^{-1}\circ j^*\circ\varphi\circ f(\xi)$ は ζ と一致する。これで補題が証明された。

E 上の実性 G- ベクトル束 α をとる。$i: E\times V \hookrightarrow B\times V$ について $\xi = \alpha\otimes\Lambda$, $\zeta \cong \tau(\alpha)\otimes\Lambda$ となり補題の条件を満たす ξ, ζ を、以下で構成する。

$\xi = \alpha\otimes\Lambda = [\ \alpha\otimes\Lambda_0 \xrightarrow{id\otimes\partial^E} \alpha\otimes\Lambda_1\ ]$, $\tau(\alpha)\otimes\Lambda = [\ \tau(\alpha)\otimes\Lambda_0 \xrightarrow{id\otimes\partial^B} \tau(\alpha)\otimes\Lambda_1\ ]$

とおく。$supp(\tau(\alpha)\otimes\Lambda) = B\times\{0\}$ である。

$\{U_\lambda\}$ を、$G \cong Z_2$- 不変 *finite open covering of* B で、

$$p^{-1}(U_\lambda) = \coprod_j W_\lambda^j, \quad p: W_\lambda^j \xrightarrow{\cong} U_\lambda \text{（非同変な同相）}$$

となるものとする。 $\tau(\alpha)|_{U_\lambda} = \bigoplus_j \alpha|_{W_\lambda^j}$ が成り立つ。

$s \in I = [0, 1]$ に対して、$W_\lambda^j \times V \cong U_\lambda \times V$ 上の複素ベクトル束準同型 $\varphi_\lambda^j(s) : \alpha|_{W_\lambda^j} \otimes \Lambda_0 \longrightarrow \alpha|_{W_\lambda^j} \otimes \Lambda_1$ を、

$$\varphi_\lambda^j(s)_{(x,v)}(y \otimes w) = y \otimes \partial^B_{v - s \cdot \pi i(x,0)}(w),$$

$$x \in W_\lambda^j,\ y \in \alpha_x,\ v, w \in V,\ (\pi : B \times V \longrightarrow V \text{ は射影})$$

で定義する。

j について直和をとることにより、$U_\lambda \times V \times I$ 上の束準同型

$$\Delta_\lambda : (\tau(\alpha) \otimes \Lambda_0) \times I \longrightarrow (\tau(\alpha) \otimes \Lambda_1) \times I$$

が定まる。$\pi \circ i : E \times V \longrightarrow V$ が $G \times \mathbb{Z}_2$-同変写像であることにより、Δ_λ が実性 G-ベクトル束準同型であることは容易にわかる。

$\pi \circ i(x, 0) \in V$ は λ のとり方によらないから、Δ_λ は、$B \times V \times I$ 上の実性 G-ベクトル束準同型

$$\Delta : (\tau(\alpha) \otimes \Lambda_0) \times I \longrightarrow (\tau(\alpha) \otimes \Lambda_1) \times I$$

を定める。

$\xi = [\ \tau(\alpha) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|_{B \times V \times \{1\}}} \tau(\alpha) \otimes \Lambda_1\ ] \in KR_G(B \times V)$ とおく。$s = 0$ のとき $\varphi_\lambda^j(0) = id \otimes \partial^B$ だから $\xi \cong \tau(\alpha) \otimes \Lambda$ である。また $supp(\xi) = i(E \times \{0\}) \subset i(E \times V)$ である。よって $\xi|_{i(E \times V)} \cong \alpha \otimes \Lambda$ を示せばよい。

$p^*(\tau(\alpha)) = \alpha \oplus \gamma$, $\gamma|_{W_\lambda^j} = \bigoplus_{k \neq j} \alpha|_{W_\lambda^k}$ と分解することに注意すると、

$$\xi|_{i(E \times V)} = [p^*(\tau(\alpha)) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|} p^*(\tau(\alpha)) \otimes \Lambda_1]$$
$$= [\alpha \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|} \alpha \otimes \Lambda_1] \oplus [\gamma \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|} \gamma \otimes \Lambda_1]$$

と分解する。ここで $\Delta|_{\alpha\otimes\Lambda_0} = id \otimes \tau^* \partial^B$, $\tau : V \cong U \hookrightarrow V$, ただし$U$は$V$の原点におけるある開近傍で、標準的に$V$と同一視できるもの，という形をしていることは容易にたしかめられ、従って再び補題を使えば $[\alpha\otimes\Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|} \alpha\otimes\Lambda_1] \cong \alpha\otimes\Lambda \in KR_G(E\times V)$ がわかる。また $\Delta|_{\gamma\otimes\Lambda_0}$ はあきらかに束の同型写像であるから $[\gamma\otimes\Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|} \gamma\otimes\Lambda_1] = 0$ である。これで命題が証明された。

なお、この報告は〔6〕の命題2.4を紹介したものである。

文献

〔1〕 M.F. Atiyah, Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. IHES 9 (1961), 23-64.

〔2〕 M.F. Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math. Oxford (2), 19 (1968), 113-40

〔3〕 橋本 伸, The transfer maps in the KR_G-theory, 本講究録.

〔4〕 C. Kosniowski, Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann. 210 (1974), 83-104.

〔5〕 G. Nishida, The transfer homomorphism in equivariant generalized cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978) 435-451.

〔6〕 M. Nagata, G. Nishida and H. Toda, Segal-Becker theorem for KR-theory, preprint.

〔7〕 G. Segal, Equivariant K-theory, Publ. Math. IHES 34 (1968), 129-151.