数理解析研究所講究録
第 390 巻 1980 年 1-12

TAYLOR渦流の時間的発展

広島大 理　八幡英雄

最近，有限自由度の決定論的微分方程式の解で，非周期性を示すものが多くの体系において知られるようになり，混沌解として注目を集めている。これらの体系は通常ベクトル$x(t)$に対する非線型連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X_\mu(x) \tag{1}$$

によって表現される。ここでμは励起または分岐パラメタとよばれ，体系を外部からエネルギー注入などによって駆動し，その静的平衡状態から異なる状態へと移すに際し，その駆動の大きさの度合を表わす。静的平衡状態は$X_\mu(\xi)=0$をみたすξによって表わされるが，μが増大するにつれある値$\mu=\mu_1$でJACOBI行列$DX_\mu(\xi)$の1組の共役複素固有値の実数部分の値が負から正に転ずると，ξは不安定となり周期解が現われる（HOPF分岐）。この周期解が安定に存続する場合，さらにμ

を増していくにつれ遂に混沌解が現われるに至るまでに経る遷移の類型を理論的に導出すると共に，具体的な模型についてそれらのうちどれが実際現れるか確かめてみることは，当面の興味ある課題と考えられる。

現在のところ，これらの遷移の経路は大別して2つに分けられると思われる。一つはHOPF分岐によって現われた周期的閉軌道が，閉軌道はそのままであるが，その周期がその後に起る分岐の度毎に2倍になっていく。つまり周期は，$2 \to 4 \to 8 \to \cdots \to 2^n \to \cdots$倍となって，同時に各分岐の起る$\mu$の値の間隔が次第に短くなり遂には集積して，その後非周期解の形で混沌解が現われる。この型の遷移を経て混沌解が現われる例は，現在非常に多数知られている。[1] これに対し，もう一つの類型では，μをμ_1以上さらに増していくと，HOPF分岐がさらに起って，運動は複数個の振動数成分を含んだ準周期的運動となり，円環面上の軌道を描くようになる。この際，十分多数の互に非通約な振動数成分を含んだ準周期的運動の示す複雑な挙動によって乱流を理解しようとするLANDAU−HOPFの描像[2]と，少数の有限個（実際には3以上）の振動数成分を含んだ準周期的運動は現実には，strange attractorとよばれるattractor上の乱雑・彷徨的運動として現われうるので，これによって乱流を理解しようとするRUELLE−TAKENSの描像[3]

とがある。RUELLE-TAKENSの描像の示すように混沌解が現われるか否かを，具体的な模型で実際に確かめようとする試みは，散逸的非線型振動子を有限個結合した模型を用いていくつかなされているが，[4] 先述の周期が2倍になりながら混沌解が発生する場合に比べて，この場合の混沌解の発生の機構は具体的過程としてより解明を要する点が多い。さらにこれら二つの類型によってすべて可能な場合が尽されているわけではないから，現実のさまざまな模型に対して混沌解を生ずる周期解の経る遷移をしらべてみることは，依然重要と考えられる。

このように，有限次元常微分方程式が混沌解をもちうることが確かな事実になってきたので，流体乱流をもこれによって記述することを試みることは，当面無意味なことではないであろう。非圧縮性粘性流体の速度場 $\boldsymbol{v}$ および圧力場 p を記述するNAVIER-STOKESおよび連続の方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad}\, \boldsymbol{v} = -\,\mathrm{grad}\,\dfrac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

（ここで ρ は密度・ν は運動粘性率）において，$\boldsymbol{v}$，p を問題の境界条件に応じて適当な基底に関して展開し，切断を導入すれば，考えるモード変数の時間発展を記述する有限変数

常微分方程式を導くことができる。この有限変数系がもとの偏微分方程式系の解をどの程度反映するかについては，現在ある程度の数学的理論は存在するけれども，具体的な流体の問題に対して十分一般的に適用できるようにはなっていない様子なので，今後解明を要する点である。[5] そこで当面，同一の問題に対してもさまざまな模型方程式を構成することができ，それらの計算結果を実験と比較することによって，対応する模型の現実からの距離を確かめるという立場をとって，問題を考えることにする。

取扱う問題は，二つの同軸円筒（内側・外側の半径を各々 R_1, R_2 とする）間の COUETTE 流である。内側の円筒を角速度 Ω_1 で次第に速く回転していくと，はじめ方位角方向の一様流が生じるが，ある角速度 $(\Omega_1)_c$ でこの一様流に円環体状の渦流（TAYLOR 渦流とよばれる）が重畳してくる。さらに角速度を上げていくと，方位角方向に伝播波動を伴った TAYLOR 渦流が現われ，この渦流はより大きな角速度で乱流に遷移していく。この事実は COLES の実験によって古くから知られていたが，[6] 最近光散乱を用いて流れの時間的変動が精しく測定されるようになった。[7～9] これらの実験では方位角方向に存続する渦流の波の個数が，円筒角速度を増していくにつれ変化しないような条件で乱流遷移までを追っている。

次にこの現象に対して筆者の試みた模型計算について述べる。定式化については既発表の論文[10]で詳述したので，くりかえすことはやめて簡単に筋道だけを示す。まずTAYLOR渦流に伴ったモードを表現するため，方位角方向一様流

$$V_r = V_z = 0, \quad V_\theta(r) = \frac{\Omega_1 \eta^2}{1-\eta^2}\left(-r + \frac{R_2^2}{r}\right) \qquad (3)$$

（ここで$\eta = R_1/R_2$; r, θ, zは円筒座標）に対する擾乱の速度場$u(u_r, u_\theta, u_z)$，圧力場pを次のように展開する：

$$u_r(r,\theta,z,t) = \sum_{\epsilon=\pm}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\, e^{im\theta} f^{\epsilon}(laz)$$

$$u_\theta(r,\theta,z,t) = \sum_{\epsilon=\pm}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\, e^{im\theta} f^{\epsilon}(laz)$$

$$u_z(r,\theta,z,t) = \sum_{\epsilon=\pm}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\, e^{im\theta} f^{-\epsilon}(laz)$$

$$p(r,\theta,z,t)/\rho = \sum_{\epsilon=\pm}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Pi_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\, e^{im\theta} f^{\epsilon}(laz) \qquad (4)$$

ここで$f^+(x) = \cos x$, $f^-(x) = \sin x$, aは軸方向TAYLOR渦の波数を示す。以下すべての物理量は長さ$d = R_2 - R_1$，時間d^2/νを用いて無次元化し，各モードはまとめて$(l,m)^\epsilon$で示す。(4)を，基礎方程式(2)の流れ(3)に対する擾乱方程式に代入し，$w_{l,m}^{\epsilon}(r,t)$および$\Pi_{l,m}^{\epsilon}(r,t)$を消去すると，$u_{l,m}^{\epsilon}(r,t)$, $v_{l,m}^{\epsilon}(r,t)$に対する連立偏微分方程式を得る。ここでGALERKIN法を用いて，これをtに関する常微分方程式で近似する。動

径座標を，$r=\frac{1}{2}(R_1+R_2)+(R_2-R_1)x$ により新しい変数 x を用いて表わすことにして，まず $u_{\ell,m}^{\epsilon}(x,t)$ に対する GALERKIN 展開の基底函数は，DOLPF－LEWIS 函数[11)]［これは固有値問題：$(D^2-a^2)^2\varphi=-\Lambda(D^2-a^2)\varphi$，b.c. $\varphi(\pm\frac{1}{2})=\varphi'(\pm\frac{1}{2})=0$ をみたす直交系］，$v_{\ell,m}^{\epsilon}(x,t)$ には三角函数 $\sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x$，$\sqrt{2}\sin 2n\pi x$ $(n=1,2,\cdots)$ を用いた。方位角方向の波の数 $m=4$ を保つようにして行われた SWINNEY らの実験にあわせるため，基本モード $\lambda=(1,4)^{+}$ の時間発展を考えることとすると，これに対して閉じた最も単純な発展方程式は，$\nu=(0,0)^{+}$ のモードを含めたもので，各モード振幅のみたす常微分方程式は次の形となる：

$$\frac{d}{dt}\alpha_{\lambda_i}+\mu_{1,\lambda_i}\alpha_{\lambda_i}+\sum_k M_{\lambda_i,\lambda_k}\beta_{\lambda_k}$$
$$=\sum_{k,\ell}\left(U^{112}_{\lambda_i;\lambda_k,\nu_\ell}\alpha_{\lambda_k}\beta_{\nu_\ell}+U^{122}_{\lambda_i;\lambda_k,\nu_\ell}\beta_{\lambda_k}\beta_{\nu_\ell}\right),$$
$$\frac{d}{dt}\beta_{\lambda_i}+\sum_k N_{\lambda_i,\lambda_k}\alpha_{\lambda_k}+\mu_{2,\lambda_i}\beta_{\lambda_i}$$
$$=\sum_{k,\ell}\left(U^{212}_{\lambda_i;\lambda_k,\nu_\ell}\alpha_{\lambda_k}\beta_{\nu_\ell}+U^{222}_{\lambda_i;\lambda_k,\nu_\ell}\beta_{\lambda_k}\beta_{\nu_\ell}\right),$$
$$\frac{d}{dt}\beta_{\nu_\ell}+\mu_{2,\nu_\ell}\beta_{\nu_\ell}$$
$$=\sum_{m,n}\left(U^{212}_{\nu_\ell;\lambda_m,\lambda_n^*}\alpha_{\lambda_m}\beta_{\lambda_n^*}+U^{221}_{\nu_\ell;\lambda_m,\lambda_n^*}\beta_{\lambda_m}\alpha_{\lambda_n^*}\right),$$
$$i=1,2,\cdots,N_\lambda;\quad \ell=1,2,\cdots,N_\nu. \tag{5}$$

ここで，α，β は各々 u，v に対するGALERKIN展開係数で，λ，ν の添字は動径方向のモードを示し，全体の方程式の数は $4N_\lambda + N_\nu$ である。

円筒の回転速度に対応するREYNOLDS数は $R_E = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu}$ で定義されるが，以下では定常TAYLOR渦流の発生値 $(R_E)_c$ に対する比 $r = R_E/(R_E)_c$ を用いる。$N_\lambda = 8$，$N_\nu = 8$（全体で40元）の方程式(5)を計算機で時間積分した結果，[*] r を小さな値から次第に上げていくと，1つの振動数成分 p_1 を含んだ単純周期的運動→2つの振動数成分 p_1，p_2 を含んだ準周期的運動→スペクトル線が幅をもつに至る混沌運動の遷移を経ることが示された。ここで p_1 はSWINNEYらの実験に現われる振動数 ω_1 に比して多少大きく，p_2 は実験の ω_3 に比して約2倍のところに現われた。これらについては既に他に発表した。[10]

ここでは，準周期的運動が混沌運動に遷移する近傍で，r を変化させていくにつれ振動数 p_1，p_2 がどのように変化するかを，$\mathrm{Re}\,\alpha_{\lambda 1}(t)$ に対するパワースペクトル密度（PSD）をFFTを用いて計算した結果によって示す。図は縦軸にPSDの対数，横軸に振動数を ω/Ω_1 を単位にプロットした。まず $r = 22.31$ のPSDは他に比べて横軸を1/2に縮めて目盛り，全体の様子を示すようにした。これによると，p_1，p_2 の基本線と共に，$p_1 + n_1(p_2 - p_1)$，$n_1 = \pm 1, \pm 2, \cdots$ の成分が現われ，

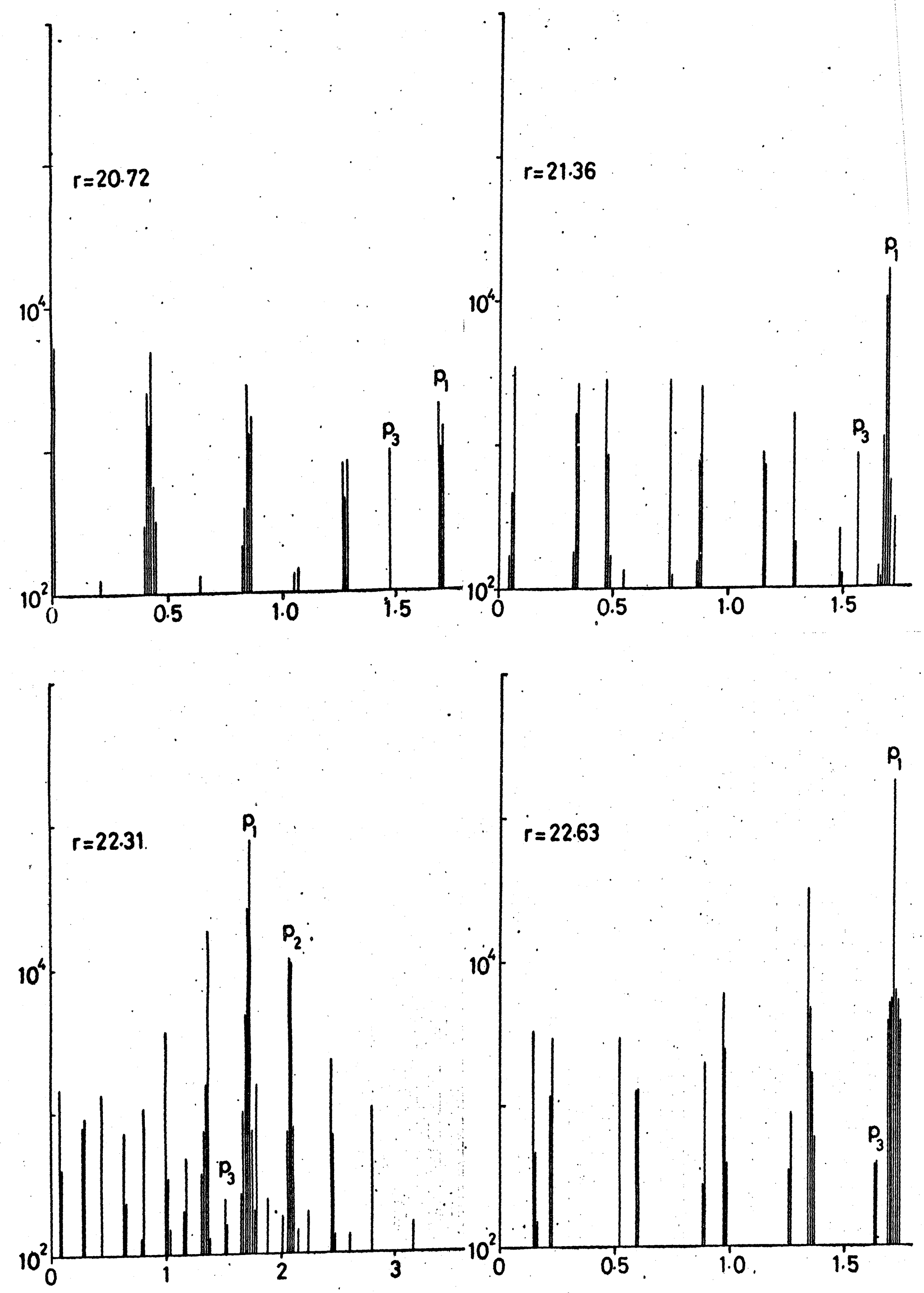

FIG. 1

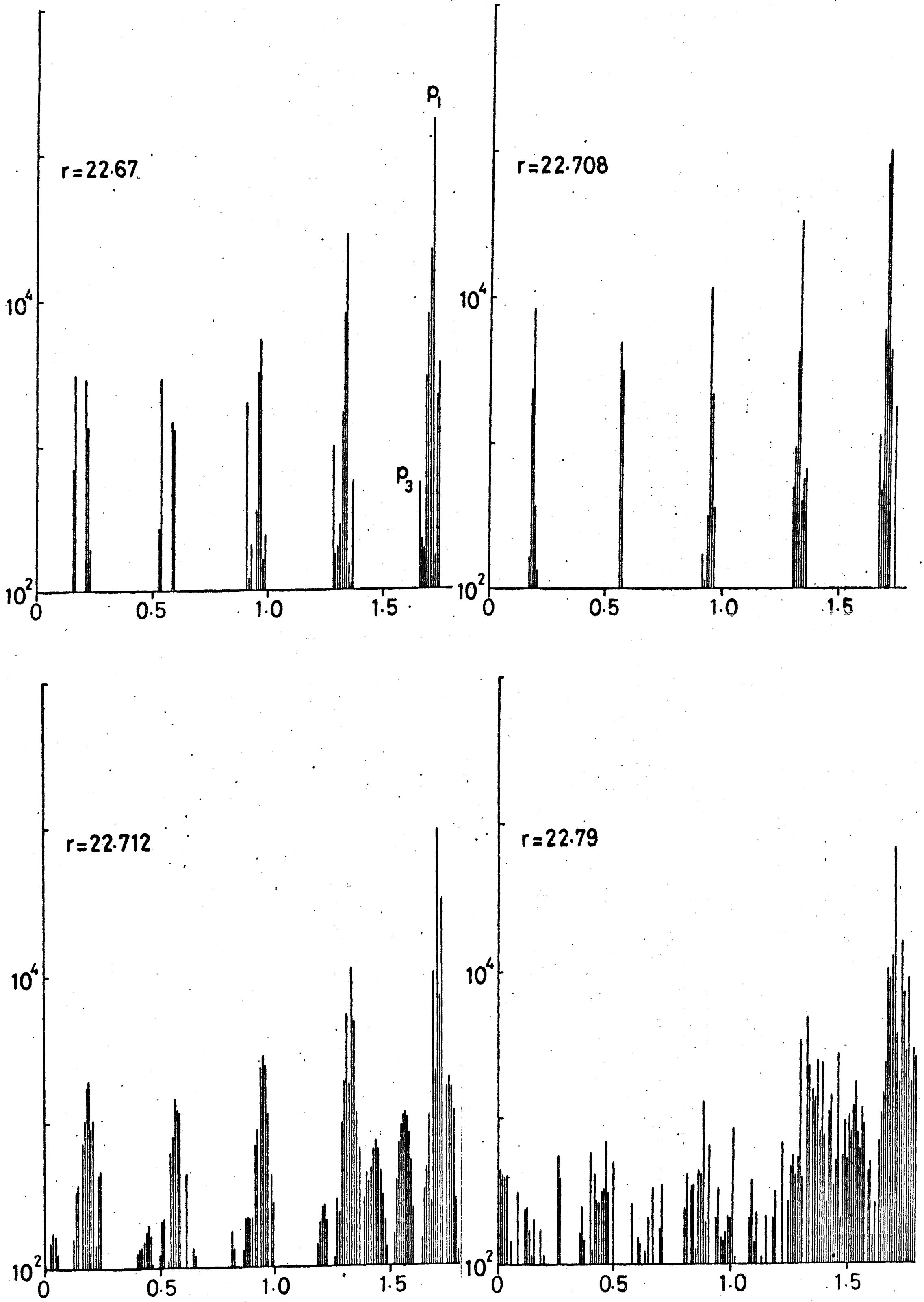

FIG. 2

さらにこの他に第3の基本成分p_3およびこれに付随した$p_3+n_3(p_2-p_1)$, $n_3=\pm1,\pm2,\cdots$の成分が加っている。[**)] そこで, rを次第に上げていくと, ここに示した一連のPSDにより, 一組の振動数$p_1+n(p_2-p_1)$, $p_3+n(p_2-p_1)$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$の間の距離がだんだん縮まり, 遂に$r=22.708$では重なってしまい, この後rを少し上げたところでスペクトル線の幅の広がりが始まり運動の乱雑化が起りだしていることがわかる。

同じような挙動を呈しながら運動の乱雑化が起る例としては, 保存力学系で周知の彷徨的不安定性stochastic instabilityがある。[12] そこでは例えば基本振動数f_1, f_2をもった準周期的運動において, 共鳴的相互作用の存在のためにその結果として生じた共鳴軌道が線幅Δf_1, Δf_2をもつようになっている状況で, 二つの振動数間の距離$|f_2-f_1|$が線幅$(\Delta f_1+\Delta f_2)/2$よりも小さくなると, 軌道の乱雑化が起ることが知られている。筆者が得た結果は散逸系におけるものであるから, これと同様に考えうるか否かは今後の問題と思われる。

文 献

1) 例えば, J.H. CURRY, Comm. Math. Phys. 60 (1978), 193.
I. SHIMADA & T. NAGASHIMA, Prog. Theor. Phys. 59 (1978), 1033.
K. TOMITA & T. KAI, Prog. Theor. Phys. Suppl. 64 (1978), 280.
P. COULLET, C. TRESSER & A. ARNÉODO, Phys. Lett. 72A (1979), 268.

2) L.D. LANDAU, Dokl. Akad. Nauk SSSR 44 (1944), 339.
E. HOPF, Comm. Pure Appl. Math. 1 (1948), 303.

3) D. RUELLE & F. TAKENS, Comm. Math. Phys. 20 (1971), 167; 23 (1971) 343.
S. NEWHOUSE, D. RUELLE & F. TAKENS, ibid. 64 (1978), 35.

4) J. McLAUGHLIN, J. Stat. Phys. 15 (1976), 307.
T. YAMADA & H. FUJISAKA, Z. Physik B28 (1977), 239.

5) O.A. LADYZHENSKAYA, Soviet Phys.-Doklady 17 (1973), 647.
J. MALLET-PARET, J. Diff. Equations 22 (1976), 619.

6) D. COLES, J. Fluid Mech. 21 (1965), 385.

7) P.R. FENSTERMACHER, H.L. SWINNEY & J.P. GOLLUB, J. Fluid Mech. 94 (1979), 103.

8) R.W. WALDEN & R.J. DONNELLY, Phys. Rev. Lett. 42 (1979), 301.

9) V.S. L'VOV & A.A. PREDTECHENSKY, "On LANDAU and Stochastic Attractor Pictures in the Problem of Transition to Turbulence", Inst. Automation and

Electrometry, Siberian Branch, USSR Ac. Sci., Preprint N111(1979).

10) H. YAHATA, Prog. Theor. Phys. Suppl. 64 (1978), 176; Prog. Theor. Phys. 61 (1979), 971; 科学 50 (1980), 15.

11) C. L. DOLPF & D. C. LEWIS, Quart. Appl. Math. 16 (1958), 97.

12) G. M. ZASLAVSKII & B. V. CHIRIKOV, Soviet Phys.-Uspekhi 14 (1972), 549.

補　　注

*) パラメタの値は $a = 2.50$, $\eta = 0.875$。

**) P_3 の成分のうちどれが基本線か判別できないので，図における指定は便宜上のものである。