

確率微分方程式と微分同相写像

阪大 理学部 池田信行

1. 序. 有名な多様体上の確率微分方程式は係数を変え得るベクトル場とランダムな力を変え得る semi-martingale の組によって定まる。その解は初期条件とその semi-martingale を変数とする汎関数になる。解の定める拡散過程の測度は良く研究されてきたが、近年汎関数そのものの構造が注目されてきた。その考察から対応する拡散過程について一歩進んだ研究が進められてきた。このことはその上において、2, 3の注意を変え得るのが目的である。

2. 確率微分方程式とリー代数. M は σ -compact, connected な d 次元 C^∞ 多様体で、 A_1, A_2, \dots, A_m は M 上の完備な C^∞ なベクトル場とする。 $[0, \infty) \rightarrow M$ なる連続写像 w の作る空間を $W(M)$ とする。同様に $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ なる連続写像 w の作る空間を W^m とする。これは通常の距離で完備可分な距離

空間になる。 W^m の位相的 σ -field を与え、確率 P は $\{W^m, \mathcal{F}\}$ 上の Wiener 測度とする。確率空間 $\{W^m, \mathcal{F}, P\}$ 上で確率微分方程式

$$(1) \quad dx_t = \sum_{j=1}^m A_j \cdot dw_t^j$$

を考へる。この意味は M 上の任意の C^∞ 関数 f に対して

$$(2) \quad df(x_t) = \sum_{j=1}^m (A_j f)(x_t) \cdot dw_t^j$$

が成立する \Leftrightarrow である。 \Rightarrow は Stratonovich の対稱な確率微分を表現する。任意の $x \in M$ を初期条件とする (1) の解 $X(t, \omega; x)$ が存在する \Leftrightarrow が知られている。事情を簡単にするためにつぎの仮定が常に成立するとする。

仮定 1. 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $X(t, \omega; x) \in M$ 。つまり $[t \mapsto X(t, \omega; x)] \in W(M)$ とする。

注意。一般の M の場合にはこの仮定 1. が与えられる条件を A_1, A_2, \dots, A_m の言葉で具体的に表現するのは必ずしも簡単ではない。しかし多くの場合充分条件が知られている。

P は同じ強くとすべきの W に対して事後

$$(3) \quad W^m \ni \omega \mapsto X(t, \omega; x) \in M$$

$$(4) \quad W^m \ni w \longmapsto [t \longmapsto X(t, w; x)] \in W(M)$$

$$(5) \quad M \ni x \longmapsto X(t, w; x) \in M$$

が定まるが、 \Rightarrow は (4), (5) の写像に特に注目する。最も簡単なのは次の例の場合である。 \Rightarrow は $\sigma = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ は A_1, A_2, \dots, A_m の生成するリー代数とする。

例. 2.1. (Doss [2]). $M = \mathbb{R}^d$, σ が Abelian の場合。い

き

$$A_i = \sum_{j=1}^d A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

とおけば全微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial \beta^i} h^j(\alpha, \beta) = A_i^j(h(\alpha, \beta)), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d, \\ \alpha \in \mathbb{R}^d, \beta \in \mathbb{R}^m$$

が完全積分可能になり、

$$X(t, w; x) = h(x, w_t)$$

となる。これは (4), (5) の写像のこの場合の性質が容易にわかる。例えば (4) の写像は W^m の連続写像になっている。

(4) の写像の W^m 上の連続性は一般に成立しないことは、McShane [5] によって指摘されている。その事情は次の例で知ることも出来る。

例. 2.2. (McShane [5], Gaveau [5]). Heisenberg 群の場合。 $H_{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ の座標を $(z, \eta) = (z^1, z^2, \dots, z^n, \eta)$, $z^j = x^j + iy^j$ とし、

積を $(z, \gamma)(z', \gamma') = (z+z', \gamma+\gamma'+2\text{Im} \sum_{j=1}^n z^j \bar{z}'^j)$ で定めると, 2-step
の巾零群になる。この時不変なベクトル場

$$(6) \quad A_{2j+1} = \frac{\partial}{\partial x^j} + 2y^j \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad A_{2j} = \frac{\partial}{\partial y^j} - 2x^j \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad j=1, 2, \dots, n$$

が得られる。この A_1, A_2, \dots, A_{2n} を満たす方程式 (1) ($m=2n$)
の解はつぎの形で与えられる。

$$X^i(t, w; 0) = w_t^i, \quad i=1, 2, \dots, 2n, \quad X^{2n+1}(t, w; 0) = 4 \sum_{j=1}^n S_t^{2j+1, 2j}(w)$$

$$(7) \quad S_t^{2j+1, 2j}(w) = \frac{1}{2} \int_0^t (w_s^{2j} \circ dw_s^{2j+1} - w_s^{2j+1} \circ dw_s^{2j})$$

この $S_t^{2j+1, 2j}(w)$ は (w_s^{2j+1}, w_s^{2j}) , $0 \leq s \leq t$, より定まる確率積分
と呼ばれる, W^m 上で連続である。この証明については
Ikeda-Nakao-Yamato [7] 参照。

以上の例は写像 (4) や (5) の考察は \mathcal{G} の代数的性質が
重要な役割を持つことを示している。この考えを推進するのは
役に立つのは [48] によつて具体的に指摘された次の事
実である。つまり connected リー群 G が \mathcal{L} 上に変換群と
して effective に作用しているとする。 G の右不変なベクト
ル場の生成するリー代数 \mathcal{G} は \mathfrak{g} として \mathcal{L} 上のベクトル場の
生成するリー代数 \mathcal{G} が自然に対応する。これは \mathcal{G} の元 X
は \mathfrak{g} として \mathcal{L} 上のリー代数変換群が定まるので、これは \mathfrak{g} として

上のベクトル場 A が定まる。この対応で \tilde{g} と g の間の同型が得られる。いま $A_1, A_2, \dots, A_m \in g$ に対応して、 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m \in \tilde{g}$ が対応してゐるとする。このとき

(I) G 上の確率微分方程式、

$$(8) \quad dg_t = \sum_{i=1}^m \tilde{A}_i \circ dw_t^i, \quad g_0 = e$$

(II) M 上の確率微分方程式、

$$(9) \quad dx_t = \sum_{i=1}^m A_i \circ dw_t^i, \quad x_0 = x$$

を考へる。この2つの方程式の解はつゞいて

命題。1。(III [18])。殆んどすべての w に対応して、 t を固定すれば写像

$$(10) \quad M \ni x \longmapsto X(t, w; x) \in M$$

が M の微分同相写像になっている。さらにこれは (8) の解 $g(t, w)$ である。すなわち

$$(11) \quad X(t, w; x) = g(t, w)x$$

となる。

ところが方程式 (1) を考へる時、もし

仮定。2。 $g = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_{2m})$ が有閉次元、

が満たされてゐるならば、一詳論の結果より、先は述べた形

のリー群が存在することを知ることが出来る。したがって命題1が使えることになり、確率微分方程式(1)の構造はリー群上の確率微分方程式で決定されることになり、さらには(8)の形の解より定まる拡散過程は群上で存在する加法過程になることとも知られる(McKean [4] 参照)。

注意。このように多様体上の確率微分方程式を微分同相写像の値をとる確率微分方程式に帰着して考察する試みは、仮定2が満たされる場合にも、たとえば M が compact の時は Elworthy [3] によつて行われている。ここで微分同相写像の全体が写像の合成によって作られる群を用いている。

このようにして、仮定2の下ではリー群上の確率微分方程式の考察が基本であることがわかったが、その時々の導関数が有効に使える。

connected なリー群 G_1, G_2 があり、 G_1 は simply connected とする。さらには $G_i, i=1,2$ の右不変なベクトル場の生成するリー代数を $\mathfrak{g}_i, i=1,2$ とする。いま $\alpha: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ なる準同型が存在するとする。その時準同型 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ で $\varphi_* = \alpha$ とするものが存在する。いま確率微分方程式

$$(12) \quad dX_t = \sum_{i=1}^m A_i \circ dW_t^i, \quad A_i \in \mathfrak{g}_1, \quad i=1,2,\dots,m$$

$$(13) \quad dY_t = \sum_{i=1}^m \alpha(A_i) \circ dW_t^i$$

をそれぞれ G_1, G_2 上で示すとき、つぎのことが成立する。

命題. 2. $x \in G_1$ に対する値 $t \in \mathbb{R}^1$, $X_0 = x$ を与えた (12) の解 $X(t, w; x)$, $y \in G_2$ を与えた (13) の解 $Y(t, w; y)$ とする、このとき

$$(14) \quad Y(t, w; \varphi(x)) = \varphi(X(t, w; x)).$$

この事実より、リー群が *simply connected* の場合には示すことは本質的には構造が定まってしまうことがわかる。

3. 中零なリー代数の場合。仮定 2 を与えたものは典型的な場合が中零の場合である。しかも *simply connected* の場合を示すことはよい。すなわち、 m 生成元の p -step 自由中零リー代数 $\mathcal{L}_{m,p}$ の場合を任意の $p \in \mathbb{N}$ と示すことより。(この概念については Jacobson [8], Rothschild-Stein [17] 等参照)。通常のリー群論と語ることが出来るためリー代数はリー群の左不変なベクトル場より生成されるように、この節では示す。

この時

$$(15) \quad \mathcal{L}_{m,p} = \sum_{i=1}^p \oplus V^i$$

\Rightarrow V^1 の基 A_1, A_2, \dots, A_m とし、各 V^i は

$$[A_{j_1} [A_{j_2} \dots [A_{j_{i-1}}, A_{j_i}] \dots]] \quad , \quad j_1, j_2, \dots, j_i = 1, 2, \dots, m$$

で生成される。 $N_{m,p}$ は リ-代数 $\mathcal{N}_{m,p}$ を持つ simply connected
 な connected リ-群とし、 Z の上には確率微分方程式

$$(16) \quad dg_t = \sum_{i=1}^m A_i(g(t)) \cdot dw_t^i$$

を考へる。 Z の解は $p=2$ の時 Gaveau [5] に非し、
 一般の p に非し Z は Yamato [20] によつて詳細に考察されて
 いる。 Z の場合は Z の構造に依つて次の形になる。

いま $E = \{1, 2, \dots, m\}$, $E[1, \infty) = \{(i_1, \dots, i_a) ; i_1, \dots, i_a \in E, 1 \leq a < \infty\}$
 $E[1, p] = \{(i_1, i_2, \dots, i_a) \in E[1, \infty) ; 1 \leq a \leq p\}$, (A_E, τ) を E の生成
 する自由代数, (\mathcal{L}_E, τ') を E の生成する自由リ-代数とする。
 $E[1, \infty)$ へ $I = (i_1, i_2, \dots, i_a)$ に非し $[I] \in \mathcal{L}_E$ を

$$(17) \quad [i_1 i_2 \dots i_a] = [[i_1 i_2 \dots i_{a-1}], i_a], \quad [i] = i \in E$$

で定める。 $[I], I \in E[1, p]$ の生成する \mathcal{L}_E の部分空間を $\mathcal{L}_{E[1, p]}$
 とする。 Z の時 $S \subset E[1, p]$ へ $\{[I], I \in S\}$ が $\mathcal{L}_{E[1, p]}$ の基とな
 るものが少くとも一つとれる。 いま $I = (i_1, \dots, i_a) \in E[1, \infty)$ に非し

$$A_{[I]} = [\dots [A_{i_1}, A_{i_2}] \dots] A_{i_a}$$

とおけば、

$$(18) \quad \mathbb{R}^{\#S} \ni \{u^{[I]} ; I \in S\} \longrightarrow \exp \left\{ \sum_{I \in S} u^{[I]} A_{[I]} \right\} \in N_{m,p}$$

に非つて $N_{m,p}$ は座標が定まる。 Z の座標を用ひて、 (16)
 の解 $g_t(w)$ を $g_t(w) = (\xi_t^{[I]} ; I \in S) \in \mathbb{R}^{\#S}$ と表せ

14"

$$(19) \quad d\zeta_t^{[I]} = \sum_{k=1}^p \sum_{\substack{I_k \rightarrow I_{k+1} \in S \\ |I_1| + \dots + |I_{k+1}| = |I| - 1}} K^{[I]}(k, i; [I_1], \dots, [I_{k+1}]) \zeta_t^{[I_1]} \dots \zeta_t^{[I_{k+1}]} \circ dW_t^i$$

が成立する。 \Rightarrow $|I|$ は $I \in S$ の表すを求めた。 また係数 $K^{[I]}(k, i; [I_1], \dots, [I_{k+1}])$ は Campbell-Hausdorff の公式を用いて具体的に決定された定数である。 よって、 $\{\zeta_t^{[I]}; |I| \leq \delta\}$ がわかると、 Σ の積の確率積分の一次結合として、 $\zeta_t^{[I]}$, $|I| = \delta + 1$ が求まる。 また \mathcal{G} が step p の中層リ-代数を形成するリ-群 G とする。 この時は準同型 $\alpha: \mathcal{N}_{m,p} \rightarrow \mathcal{G}$, 準同型 $\varphi: \mathcal{N}_{m,p} \rightarrow G$, $\varphi_* = \alpha$ となる。

$$(20) \quad \varphi\left(\exp\left\{\sum_{I \in S} \zeta_t^{[I]} A_{[I]}\right\}\right) = \exp\left\{\sum_{I \in S} \zeta_t^{[I]} A_{\alpha([I])}\right\}$$

となるので、 2 節の命題 2 を用いると \mathcal{G} を形成する確率微分方程式の解は $\mathcal{N}_{m,p}$ の場合の解よりきわめて単純な方法で得られる。

特に $p=2$ のときは $S = \{1, 2, \dots, m, (1,2), (1,3), \dots, (1,m), (2,3), (2,4), \dots, (2,m), \dots, (m-1,m)\}$ となることを加えるので、

$$(21) \quad d\zeta_t^{[J]} = dW_t^J, \quad |J|=1 \text{ の時}$$

$$d\zeta_t^{[J]} = \frac{1}{2} (W_t^i \circ dW_t^j - W_t^j \circ dW_t^i), \quad J=(i,j) \text{ の時},$$

とわり, Gaveau [5] の結果が得られる。Heisenberg 群の時の例 2.2 に述べたときは, (20), (21) より容易に導かれる。

また Kaplan [9] は 2-step 中層で 2 次形式に閉じて定まるリー代数のあるクラスについて, 対応するラプラス作用素の基本解を求めているが, この場合も (20), (21) を用いて確率微分方程式によって考察することが出来る。逆に解の与えべき性質によつて, Kaplan が与えたクラスを特徴づけることも出来る。

注意。重川 [8], 田田 [10] で論じられている解の分解に関する公式を用いると, 仮定 2 の下でもっと一般の場合の考察が出来る。たとえば田田 [10] は \mathfrak{g} が可解の場合を論じている。

4. 近似論, $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ が有限次元の時はこれまで述べたように, リー群上の確率微分方程式の解により, 微分同相写像の値をとる加法過程に帰着された。しかるものの構造も具体的に説明されることも多い。この内容を \mathfrak{g} が有限次元でない時は研究することは興味深いことである。既に述べたように Elworthy [3] はその 1 つの方法を提供している。M がコンパクトな時は大森 [6] が研究している ([4] 参照)。とくにこの問題を系統的に追求しているのは Malliavin [2], たとえば [27], [3] 等で考察されている。彼の考へは確率微分方

程式 (1) でブラウノ運動 W を適当に近似した W_n でおきか
 え常微分方程式系を得ることを基礎にしている。この近似 W_n
 に対応する方程式の解 $X_n(t, W; x)$ は近似が全く一般では $X(t, W; x)$
 に収束しないことは既に述べたが、適当な近似をとれば収束
 するとも知られている。しかも近似の段階で目的の性質を
 示すことは比較的容易に出来る。 $Z = Z^n X_n(t, W; x)$ の持つこ
 いろ性質の極限移行として $X(t, W; x)$ の性質を示そうとするの
 が Malliavin [2] [3] の方法である。 $M = \mathbb{R}^d$ の場合には、こ
 の Malliavin の考えに詳細な証明が Ikeda-Watanabe [6] で予
 りされている。 $Z = Z^n$ は $M = \mathbb{R}^d$ とし、例えば A_1, A_2, \dots, A_n
 の係数が 1 次の増大度で、すべて Z^n の次数の偏微分が有界の時
 に、任意に t を固定すると、 a.a.w(P) に於いて

$$(22) \quad \mathbb{R}^d \ni x \longmapsto X(t, W; x) \in \mathbb{R}^d$$

が微分同相写像になることを示している。最近 Bismit [7] は
 a.a.w(P) に於いて、任意の t に於いて (22) が微分同相写
 像になることを上の結果より単く方法を予りしている。

78 お Ikeda-Watanabe [6] で示した近似の方法による時は、
 単に収束を示すだけでなく、特定の性質が保存されるような
 収束であることも示す必要がある。そのため近似についての
 の結果についても新たな考察をすることが必要である。たと

2 は

$$(23) \quad W_n(t) = n \left[\left(\frac{d+1}{n} - t \right) w \left(\frac{d}{n} \right) + \left(t - \frac{d}{n} \right) w \left(\frac{d+1}{n} \right) \right], \quad \frac{d}{n} \leq t \leq \frac{d+1}{n}$$

に 対し,

$$(24) \quad \frac{dX_n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^m A_i(X_n(t)) \frac{dW_n^i(t)}{dt}$$

の解で初期条件 x のものは $X_n(t, w; x)$ とする。このとき、任意に固定し $T > 0$ と N に 対し

$$(25) \quad \sup_{|x| \leq N} \sup_n E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \| D^\alpha X_n(t, w; x) \|^p \right] < \infty, \quad p \geq 2$$

を示す必要がある。ここで D^α は multi-index α による偏微分を表す。 (24) の形の近似の特徴として、 $X_n(t, w; x)$ および w の微分が $X(t, w; x)$ による証明の評價で直接的なマルチンゲール不等式の使用だけでなく工夫を要する部分があるが、(25) の評価では特にこれらの工夫が重要になる。

a.a.w に 対して、任意の t に 対して (22) の写像が微分同相写像であることを示す時の onto, 1対1 の部分の証明は Varadhan [19] は最近新たな考えを提出した。彼の考えは \mathbb{R}^d を一対コンパクト化し、 ∞ での連続性を確かめることと、伊藤の公式より $X(t, w; x) - X(t, w; y)$ のノルムの中の平均に關する評価の不等式を基礎として行われる。国田 [17] はこの

未三三用"で、係数が定めらるゝ時は位相同型の問題を論じている。

一般にここでの問題を論ずることは、関連の問題もともに未解明の多い。

- [1] Bismut, 未発表。
- [2] H. Doss, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, Ann. Inst. H. Poincaré 13 (1977).
- [3] K. D. Elworthy, Stochastic dynamical systems and their flows, Stochastic Analysis ed. by A. Friedman and M. Pinsky 79-95. 1978.
- [4] T. Funaki. Construction of a solution of random transport equation with boundary condition, J. Math. Soc. Japan 31 (1979)
- [5] B. Gaveau, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certain groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977)
- [6] N. Ikeda - S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, 講談社, 近刊。
- [7] N. Ikeda, S. Nakao and Y. Yamato, A class of approximations of Brownian motion. Publ. RIMS., Kyoto Univ. 13 (1977).
- [8] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience. Publ.
- [9] A. Kaplan, Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms. Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980).
- [10] H. Kunita, On the representation of solutions of stochastic differential equation. Lecture Notes, No. 784, 1980.
- [11] H. Kunita, 1980年阪大集中講義。
- [12] P. Malliavin, Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976, ed. by K. Itô, 1978.
- [13] P. Malliavin, C^k -hypoellipticity with degeneracy, Stochastic Analysis, ed. A. Friedman and M. Pinsky, 1978.

- [14] H. P. McKean, Stochastic integrals. Academic Press, 1969.
- [15] E. J. McShane, Stochastic differential equations and models of random processes. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 1972.
- [16] H. Omori, Symp.の報告。
- [17] L. P. Rothschild and E. M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups Acta Math. 137 (1977).
- [18] I. Shigekawa : 阪大確実論セミナー報告, 1980.
- [19] S. R. S. Varadhan : 未発表(阪大における討論)。
- [20] Y. Yamato, Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebras, Z. Wahr. Geb. 47 (1979).