数理解析研究所講究録
第391巻 1980年 66-73

コンパクト・リーマン面上のブラウン運動の道の homological behavior

阪大 教養　真鍋 昭治郎

§1. 問題の設定と定理

(M, g)を，二次元コンパクト，連結，向きづけ可能なC^∞リーマン多様体で，その種数を，$k(\geq 1)$とする。以下，等温座標をとってMをリーマン面と見なす。XをM上のブラウン運動，即ち，その local generator が，$\Delta/2$（Δ＝ラプラス・ベルトラミ作用素）なるM上の拡散過程とする。$A_1, \cdots, A_{2k}$を，Mの標準ホモロジー基底とする（但し，A_iとA_{k+i}は，丁度1回交わり，他は交わらないようとる$(i=1, \cdots, k)$）。Xの道$t \mapsto X_t$に対して，$X[0,t] = \{X_s ; 0 \leq s \leq t\}$とおく。$X[0,t]$のホモロジー的な性質を調べるのが，このノートの目的である。そのために次のように問題を設定する。

任意の$x, y \in M$を与えたとき，$\varphi_{x,y}(0) = x$，$\varphi_{x,y}(1) = y$となる滑らかな曲線$\varphi_{x,y}$でどのA_i $(1 \leq i \leq 2k)$とも交わらぬものをとって固定し，$C = \{\varphi_{x,y} \mid x, y \in M\}$とおく。$X[0,t]$の

終点と始点を $\varphi_{X(t),X(0)} \in C$ で結んで得られる閉曲線を $\bar{X}[0,t]$ とすると，これは，$A_1, \cdots, A_{2k}$ を用いて

$$\bar{X}[0,t] = \sum_{i=1}^{2k} x_i(t) A_i \quad , \quad x_i(t) : \text{整数}$$

と表わされる（等号は，両辺がホモローグを意味する）。

$(x_1(t), \cdots, x_{2k}(t))$ を，Arnold - Avez [1] に従って $X[0,t]$ の"ホモロジー的位置"と呼ぶ。ここで問題にするのは，これの $t \to \infty$ の時の漸近的挙動である。以下でこれが，M の Abelian covering surfaces の型問題と関係していることを述べる。

N を，$1 \leqq N \leqq 2k$ なる自然数，$1 \leqq i_1 < \cdots < i_N \leqq 2k$, $I = (i_1, \cdots, i_N)$ とする。

定義　　X が，$(A_{i_1}, \cdots, A_{i_N})$ にホモロジー的に巻きつく

$$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{t\to\infty} \sum_{\lambda=1}^{N} x_{i_\lambda}(t)^2 = \infty \quad , P_x\text{-a.s.}$$

結果は，次の通り。

定理　　X が，$(A_{i_1}, \cdots, A_{i_N})$ にホモロジー的に巻きつくための必要十分条件は，$N \geqq 3$．

注意 1．$x_i(t)$ は，$\bar{X}[0,t]$ が，A_{k+i} と交わる回数を示していると考えられる（[5] 参照）．

注意 2．（ホモトピー的な巻きつき方との比較）$\pi_1(M)$ の generator を，$(a_1, \cdots, a_{2k})$ とする。$\bar{X}[0,t] = a_{j_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{j_{n(t)}}^{\varepsilon_{n(t)}}$,

($\varepsilon_i = \pm 1$) とホモトープの意味で書き表わしたとき,

$$l(t) = \min\{ n(t) ; \ \bar{X}[0,t] = a_{j_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{j_{n(t)}}^{\varepsilon_{n(t)}} \}$$

とおいて, $l(t)$ を $X[0,t]$ の長さと呼ぶことにする。X が, $(A_1, \cdots, A_{2k})$ をホモトピー的に巻きつくというのを, $\lim_{t\to\infty} l(t) = \infty$, P_x-a.s. で定義すれば, 次が成立: X が, $(A_1, \cdots, A_{2k})$ にホモトピー的に巻きつく $\Leftrightarrow$ $k \geq 2$.

§2. $x_i(t)$ の表現

$\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(2k)}$ を, 調和一次微分型式で,

$$\int_{A_j} \alpha^{(i)} = \delta_{ij} \quad , \ 1 \leq i, j \leq 2k$$

となるものとする。そうすれば,

$$x_i(t) = \int_{X[0,t]} \alpha^{(i)} + \int_{\varphi_{X(t), X(0)}} \alpha^{(i)} ,$$

ここで, 右辺第1項は, $\alpha^{(i)}$ の X の path に沿う積分を表わす ([2])。この時, 次のことが容易にわかる。

Lemma 1 $\int_{\varphi_{X(t),X(0)}} \alpha^{(i)}$ は, t, ω について有界。

Lemma 2 α を, 調和一次微分型式とすると,

(i) $\int_{X[0,t]} \alpha$ は, マルチンゲール,

(ii) $\int_{X[0,t]} \alpha$ は, $X[0,t]$ のホモロジー類のみに依存する.

この2つのlemmaを用いると，次の命題は直ちにわかる。

命題　$m(dx)$を，Mの体積要素とすると，

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{x_i(t)}{\sqrt{2t\log\log t}}=-\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{x_i(t)}{\sqrt{2t\log\log t}}=\left(\int_M \langle\alpha^{(i)},\alpha^{(i)}\rangle(x)m(dx)\right)^{1/2}$$

従って，特に，§1の定理が，$N=1$の場合は，示せたことになる。

§3. Covering motionとの関係

この節からあとでは，$2\leqq N\leqq 2h$とする。$\tilde{Y}^{(i)}(t)$，$\tilde{Y}_I(t)$を，それぞれ

$$\tilde{Y}^{(i)}(t)=\int_{X[0,t]}\alpha^{(i)},\qquad \tilde{Y}_I(t)=(\tilde{Y}^{(i_1)}(t),\cdots,\tilde{Y}^{(i_N)}(t))$$

で定義する。

まずIに応じたMの被覆面$\tilde{M}(I)$を定義する。$x_0\in M$を固定する。関数 $M\ni x\longmapsto\left(\int_{x_0}^{x}\alpha^{(i_1)},\cdots,\int_{x_0}^{x}\alpha^{(i_N)}\right)$（積分路は，N個の積分について同じものをとる）は，M上の関数としては多価関数。これを，一価にするMの最小の被覆面を$\tilde{M}(I)$とする。$\pi_I:\tilde{M}(I)\to M$を自然な射影とする。$\tilde{M}(I)$は，不分岐，正規なMの被覆面であるから，Xのcovering motionを次のように定義できる（Itô-McKean [3] 参照）。

定義　(covering Brownian motion)　$\tilde{x}_0\in\tilde{M}(I)$を，$\pi_I(\tilde{x}_0)=x_0$なるものとして固定．$X_t$の$\tilde{M}(I)$への持ち上げで，$\tilde{x}_0$から出発するものがただ一つ決まるから，これを$\tilde{X}_I$として$\tilde{M}(I)$上の

ブラウン運動と呼ぶ。 $\pi_I(\hat{X}_I(t)) = X(t)$ が成立.

次に，今定義した $\hat{X}_I$ と，$\tilde{Y}_I$ の関係を，調べる。

γ を，$x_0(\in M)$ から出発する M の曲線とし，$\tilde{\gamma}$ を，$\tilde{x}_0(\in \tilde{M}(I))$ から出る γ の持ち上げとする（$\pi_I(\tilde{x}_0) = x_0$）。

$$\Psi_I(\gamma) = \left(\int_\gamma \alpha^{(i_1)}, \cdots, \int_\gamma \alpha^{(i_N)} \right)$$

を考える。容易に次のことがわかる。

Lemma 3. (i) $\Psi_I(\gamma) = \left(\int_{\tilde{\gamma}} \pi_I^* \alpha^{(i_1)}, \cdots, \int_{\tilde{\gamma}} \pi_I^* \alpha^{(i_N)} \right)$ かつこの右辺の値は，$\tilde{\gamma}$ の終点 $\tilde{x}$ のみによって定まる。

(ii) この値を，$\Phi_I(\tilde{x})$ と書くと，Φ_I は，1 : 1.

こうして定まった Φ_I を用いると，次の命題が証明できる。

命題 $\tilde{Y}_I(t) = \Phi_I(\tilde{X}_I(t))$, $\forall t \geq 0$.

証明は，$X[0,t]$ を滑らかな曲線 γ_m で，一様近似すれば，§2 の *Lemma* 2 を用いていえる。

この命題とその直前の *Lemma* によって，

Lemma 4. X が，$(A_{i_1}, \cdots, A_{i_N})$ にホモロジー的に巻きつくための必要十分条件は，$\tilde{X}_I$ が，*transient* であることである。

§4. $\tilde{M}(I)$ の型問題

§3 の最後の *Lemma* 4 によって，問題が，$\tilde{X}_I$ の *transience* に

帰着されたが，$\tilde{X}_I$ の transience, recurrence の問題は，実は次のようにして $\tilde{M}(I)$ の型問題と同等であることが示される。
最初に，$\tilde{M}(I)$ の型を定義する。

定義. $\tilde{M}(I)$ が放物型 ($\tilde{M}\in O_G$ と書く) $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{M}(I)$ 上の有限なグリーン関数は，存在しない。

$\tilde{M}(I)\notin O_G$ のとき，$\tilde{M}(I)$ は，双曲型という。

Lemma 5. $\tilde{M}(I)\notin O_G$ のための必要十分条件は，$\tilde{X}_I$ が transient であることである。

この結果は，単連結なリーマン面の場合には，既に角谷[4]によって示されいる。

このように問題は，$\tilde{M}(I)$ の型を決めることに帰着されたが，$\tilde{M}(I)$ の型は，A. Mori [7] によって次のように決定されている。

定理 (A. Mori) $\tilde{M}(I)\in O_G$ のための必要十分条件は，$N\leqq 2$.

我々の定理は，Lemma 4, 5 及び Mori の定理より従う。

§5. ある種のフックス群の Poincaré 級数の収束・発散との関係

以下では，種数 $h\geqq 2$ とする。この時，M は，基本領域がコンパクトなフックス群 Γ を用いて，$M\cong {}_{\Gamma}\backslash H$ (H は上半平面，$\cong$ は，等角同値を表わす) となる。又，$\tilde{M}(I)$ は，

$\tilde{M}(I) \cong \tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$ ，$\tilde{\Gamma}$ は，Γ の正規部分群　　となる。

M 及び $\tilde{M}(I)$ のブラウン運動は，$\mathcal{H}$ 上のブラウン運動から構成できる。それらの推移確率密度を，p 及び $\tilde{p}_I$ とすれば，$\mathcal{H}$ 上のそれを $\hat{p}$ として，

$$p(t,x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{p}(t,\hat{x},\gamma\hat{y}) \qquad (\pi(\hat{x})=x,\ \pi(\hat{y})=y)$$

$$\tilde{p}_I(t,\hat{x},\hat{y}) = \sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}} \hat{p}(t,\hat{x},\gamma\hat{y})$$

で与えられる。 $\tilde{M}(I)$ のグリーン関数が $\int_0^\infty \tilde{p}_I(t,\hat{x},\hat{y})\,dt$ で与えられることと，$\hat{p}$ の具体的な形を用いれば，次の結果を示すことができる（ $\tilde{M}(I)\in O_G$ の条件のいいかえ）。

命題　$\displaystyle\sum_{\gamma\in\tilde{\Gamma}} \|\gamma\|^{-2} = \infty \iff N = 2$

ただし，$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，$ad-bc=1$ ，$\|\gamma\|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$.

特に，$I=(1,2,\cdots,2k)$ のときは，$\tilde{\Gamma} = [\Gamma,\Gamma]$（交換子群）で，$\displaystyle\sum_{\gamma\in[\Gamma,\Gamma]} \|\gamma\|^{-2} < \infty \quad (k\geq 2)$ が成り立つ。

注意　McKean は，$M = R^2-\{0,1\}$ の場合について同じ問題を扱っている（［6］参照）。

文　献

[1] Arnold–Avez : Problèmes ergodiques de la méchanique classique

[2] Ikeda-Manabe : Integral of differential forms along the path of diffusion process, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15 (1979) 827-852.

[3] Itô-McKean : Diffusion processes and their sample paths.

[4] Kakutani : Random walk and the type problem of Riemann surfaces, Contribution to the theory of Riemannian surfaces, p. 95-101.

[5] Manabe : On the intersection number of the path of a diffusion and chains, Proc. Japan Acad. 55 (1979) 23-26.

[6] McKean : Stochastic integrals

[7] Mori : A note on unramified abelian covering surfaces of a closed Riemann surface, J. Math. Soc. Japan 6 (1954) 162-176.