数理解析研究所講究録
第 392 巻 1980 年 1-23

代数多様体の分類の基本設定
(強有理写像, γ と κ.)

東大 理　飯高 茂

1. 代数多様体の双有理分類理論は、イタリア学派による代数曲面の分類をその祖型として持つ。次元についで、基本的な、双有理不変数は、代数多様体の小平次元であろう。小平次元の持つ、簡明で基本的な性格は、70年代の後半に到って漸く証明されはじめ、ここ数年間の進歩はまことに著しいものであった。

小平次元の初等的な性質を記述する3つの定理即ち、ファイバリング定理、弱加法性、被覆不変性、の証明は、一応1970年にできてはいたが、決して満足のいくものではなかった。しかし、1979年に当時学部学生であった角田は簡単で見通しのよい証明の仕方を案出した。それは、正規多様体 V の $A(V)=\Gamma(V,\mathcal{O}_V)$ の商体の超越次数を利用するもので、D次元よりも更に基礎的なものとみなされる。角田理論の紹介から始めよう。

2. まず，強有理写像 $f: V \longrightarrow W$ の定義の復習から始める。有理写像 $f: V \longrightarrow W$ は，そのグラフ $\Gamma_f \subset V \times W$ から V への射影 $p: \Gamma_f \longrightarrow V$ が固有正則写像になるとき，強有理 (strictly rational) とよばれる。

命題 (1) $f: V \to W$，$g: W \to U$ を強有理写像で，かつ，合成可能とする。そのとき $g \circ f: W \to U$ も強有理である。

(2) $f: V \to W$ を双有理写像とする。

f を固有双有理とすると，f, f^{-1} ともに強有理。又逆も成立する。

(3) $f: V \to W$ を有理写像，$g: W \to U$ を正則写像，かつ $g \circ f$ も正則写像とする。g を固有とすると，f は強有理になる。

(1)，(2) の証明は省略。

(3) を示す。$V \times_U W = \mathrm{Ker}\left(V \times W \rightrightarrows \begin{smallmatrix} V \\ W \end{smallmatrix} \rightrightarrows U\right)$ は $V \times W$ の閉部分。よって $\Gamma_f \subseteq V \times_U W$ になる。$g: W \to U$ が固有的なので，$V \times_U W \longrightarrow V$ も同様。よって $\Gamma_f \to V$ も固有的。□

定理 1. $f: V \to W$ を強有理写像とする。V を正規多様体とすると，

(i) $\mathrm{codim}(V \setminus \mathrm{dom}(f)) \geq 2$。すべての $x \in V$ について，

(ii) $f(x)$ は空でない，連結の固有スキーム。

証明は省略するが，この定理こそ，強有理写像の最も基本的な事実であることに注目したい。

系. $f: V \to W$ を強有理写像とし，V, W を正規とすると，f^* は $A(W)$ から $A(V)$ への写像となる。

ここに $A(V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ であり，$A(V) = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{A}^1)$ とも見られる。

系の証明. $\psi \in A(W)$ をとる。$\psi \circ f: V \to \mathbb{A}^1$ も強有理だから，$\mathrm{codim}(V - \mathrm{dom}(\psi \circ f)) \geq 2$. 一方，次の補題によれば，$V = \mathrm{dom}(\psi \circ f)$. 即ち，$\psi \circ f \in A(V)$。定義より $f^*(\psi) = \psi \circ f$. □

補題1. V を正規多様体，F を V の閉集合で，$\mathrm{codim}(F) \geq 2$ とする。このとき，$A(V - F) = A(V)$.

これは，Krull の正規 Noether 環の定理「A を Noether 整域とするとき，$A = \bigcap_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$」の幾何的書き換えである。

系により，$f: V \to W$ が固有双有理なら，$A(V) \cong A(W)$.（ただし，V と W とが正規のとき）即ち，正規多様体を考える限り，$A(V)$ は固有双有理不変と考えられる。

3. さて，V において，$\Phi_V: V \to \mathrm{Spec}\, A(V)$ が定まる。

$f: V \longrightarrow W$ を強有理, V, W を正規とするとき, ${}^a f^*$: $\mathrm{Spec}\ A(V) \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A(W)$ ができて, 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\,A(V) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,A(W) \end{array}$$

$\mathrm{Spec}\,A(V)$ の生成点を $*$ とすると, $\Phi^{-1}(*) \neq \phi$. そして, $\mathrm{Rat}(\Phi^{-1}(*)) = \mathrm{Rat}(V)$.

補題2. $f: V \to \mathrm{Spec}\,R$ を支配的正則写像, $0 \notin S \subsetneq R$ を乗法系とするとき, $S^{-1}V = V \otimes_R S^{-1}R$ とおくと,

$$A(S^{-1}V) = S^{-1}A(V).$$

これを $R = A(V)$, $S = R \setminus \{0\}$ について用いると, $A(\Phi_V^{-1}(*)) = S^{-1}A(V) = QA(V)$ をえる。さらに, V を正規とすると, $A(V)$ も正規で, $\mathrm{Rat}(V)$ 内で, 代数的に閉じている。なぜなら, $A(V)$ の $\mathrm{Rat}(V)$ 内整閉包を B とすると, 有理写像 $h: V \to \mathrm{Spec}\,B$; 正則写像 $\varphi: \mathrm{Spec}\,B \to \mathrm{Spec}\,A(V)$ をえて $\Phi_V = \varphi \circ h$ となる。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_V"'] & \mathrm{Spec}\ B \arrow[r, shift left, "\varphi"] & \mathrm{Spec}\ A(V) \arrow[l, shift left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

φは固有だから，hは双有理。さらに，$h(x) \subseteq \varphi^{-1}(\Phi_V(x))$ だから $h(x)$は有限．よって，定理により，$h(x)=1$点．この為 hは正則になる．即ち，$\psi: \mathrm{Spec}\, A(V) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B$ があって，$h = \psi \circ \Phi_V$．$\Phi_V : V \to \mathrm{Spec}\, A(V)$ のもつ普遍性により，ψは同型となる。 $\square$

定理2．$\Phi_V : V \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A(V)$ は支配的で，その生成ファイバー$\Phi_V^{-1}(x)$ をFとおくと，$QA(V)$上の多様体として既約であり，$A(F) = QA(V)$ になる。

さて，Vを正規多様体とし，Vの基礎体をkとすると，$k \subseteq A(V) \subseteq \mathrm{Rat}(V)$である。$A(V)$の商体を$QA(V)$と書き，これの$k$上の超越次元を$\gamma(V)$と書く．即ち $\gamma(V) = \mathrm{tr.deg}_k QA(V)$。

上記の定理のFは$QA(V)$上の多様体とみれるから $\gamma(F)=0$．$\gamma(V)$の概念は簡単であり，有用な性質をもつ（角田により，1979年に導入された）．定義により $0 \leq \gamma(V) \leq \dim V$．Vがアフィンなら $\dim V = \gamma(V)$。又，Vが完備なら $A(V)$はk上代数的になり，$\gamma(V) = 0$．$\gamma(\mathrm{Spec}\, A(V)) = \dim(A(V)) = \gamma(V)$なので，定理は，Vが$\Phi_V$により，$\gamma(F)=0$をファイバーとし，$\gamma(W) = \dim W$ をみたすWを底とするファイバー空

間の構造を持つことを意味している。

一般に $\gamma(V\times W)=\gamma(V)+\gamma(W)$ が成立している。

定理3. $f: V\longrightarrow W$ を支配的写像とし，その一般ファイバー $f^{-1}(*)$ を既約とし，F とおく。すると，

$$\gamma(V)\leqq\gamma(F)+\dim W$$ が成立する。さらに，

W がアフィンなら，

$$\gamma(V)=\gamma(F)+\gamma(W)=\gamma(F)+\dim W.$$

証明. W がアフィン多様体 $\mathrm{Spec}\,R$ のとき，$S=R-\{0\}$ とすると，$F=S^{-1}V$ だから，補題により，$A(F)=S^{-1}A(V)\subseteq \mathrm{Rat}(V)$. $L=Q(R)$, $M=QA(V)$ とおけば，$\gamma(F)=\mathrm{tr.deg}_L\, QA(F)$. $QA(F)=QA(V)$ となり，$k\subseteq L\subseteq QA(V)$. ゆえに，

$$\gamma(F)+\gamma(W)=\mathrm{tr.deg}_k L+\mathrm{tr.deg}_L M=\mathrm{tr.deg}_k M=\gamma(V).$$

一般の場合は，W のアフィン開部分集合 $(\neq\phi)$ W_α をとると，$\gamma(V)\leq\gamma(f^{-1}(W_\alpha))$. 上で示したことにより，$\gamma(f^{-1}(W_\alpha))=\gamma(F)+\dim W_\alpha=\gamma(F)+\dim W.$ □

このように簡単なものでも，γ についての加法性が綺れいに成立していることに注目してほしい。

定理4. $f: V\to W$ を固有全射正則写像とし，V, W を正規とすると，$A(W)\longrightarrow A(V)$ は整拡大. よって $\gamma(W)=\gamma(V)$.

証明. Stein 分解により, f を有限正則と仮定できる. W のアフィン被覆 $\{W_\alpha\}$ をとり $V_\alpha = f^{-1}(W_\alpha)$ とおく. $A_\alpha = A(W_\alpha) \subseteq B_\alpha = A(V_\alpha)$ は整拡大である。$\varphi \in A(V) = \bigcap_\alpha A_\alpha$ をとり, $Rat(W)$ 上既約でモニックな φ を根にもつ多項式 $F_\varphi(T)$ をとる。すると, 次の補題により, $F_\varphi(T) \in A_\alpha[T]$ がわかる。さらに, $\bigcap_\alpha A_\alpha[T] = A(W)[T]$ が成立するから $F_\varphi(\varphi) = 0$ により, φ は $A(W)$上整になる。 $\square$

補題 3　R を Noether 正規環とし, $F[T] \in R[T]$ をモニックな, かつ $R[T]$ の元として既約な多項式とする. すると, $Q(R)$ 上既約である.

証明は $R = \bigcap_{ht\,\mathfrak{p}=1} R_\mathfrak{p}$ により各 DVR $R_\mathfrak{p}$ について見ればよく, この時はよく知られている。

以上の3定理を, ファイバー定理, 加法定理, 被覆(不変の)定理とよぶ。これを基にして, D 次元についての同種の3定理; 小平次元, 対数的小平次元についても同様に3定理が定式下され証明が行われる。

4. Vを完備正規の代数多様体とする。DをV上の正因子とし $V_0 = V \setminus D$ とおくとき、

$$A(V_0) = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_V(mD).$$

ここに $L_V(D) = \{\psi \in Rat(V) \mid \psi = 0 \text{ or } div(\psi) + D \geq 0\}$ とおいた。$l(mD) = \dim_k L_V(mD)$（以後 kは$Rat(V)$内で代数的に閉としておく）とする。$l(mD)$の漸近式の係数として$\gamma(V_0)$が出てくる事をみよう。

$L_V(mD)$の生成する$Rat(V)$の部分体をQ_{mD}で示す。すると、

$$QA(V_0) = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{mD} \quad \text{かつ} \quad Q_D \subseteq Q_{2D} \subseteq \cdots$$

だから、体論の定理によりm_1が存在し $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{mD} = Q_{m_1 D}$.

ゆえに $QA(V_0) = Q_{m_1 D}$.

一般に$A(V_0)$はk上有限生成ではない（Zariski）。しかしその商体$QA(V_0)$は、有限生成の体$Q_{m_1 D}$なのである。

$L_V(mD)$の定める有理写像をΦ_{mD}又はΦ_mで示し、$W_m = \Phi_m(V)$の閉包、とおけば、$Rat(W_m) = Q_m$ ゆえに

$$QA(V_0) = Q_{m_1} = Rat(W_{m_1}).$$ 従って、W_{m_1}こそ$QA(V_0)$の幾何的モデルとして便宜なものである。

$$\varkappa(V, D) = \max_m \{\dim W_m\} = \dim W_{m_1}$$

を、VのD次元とよぶ。ゆえに $\dim W_{m_1} = tr\,deg\, QA(V_0)$ を用いて、

$$\gamma(V \setminus D) = \varkappa(V, D)$$

を得る。

$QA(V_0)$ は $Rat(V) = Rat(V_0)$ 内で代数的に閉であったのだから $Rat(W_{m_1})$ も $Rat(V)$ 内で閉であることに注意

以後 k を標数 0 の代数閉体とし，V を完備非特異としておく。$\Phi_{m_1 D} : V \longrightarrow W_{m_1}$ は不確定的点を持ち得るので，そのグラフを非特異化し，双有理正則写像 $\mu : V^{\#} \longrightarrow V$ ができ $f = \Phi_{m_1 D} \circ \mu : V^{\#} \longrightarrow W_{m_1}$，は正則になる。$D^{\#} = \mu^* D$ とおけば，$\Phi_{m_1 D^{\#}} = \Phi_{m_1 D} \circ \mu$ になることは周知であろう。

$X_1 = m_1 D^{\#}$ とおき，$|m X_1|$ の元を X_m と書く。すると，$X_m = m X_1 + div(\psi)$，$\psi \in \mathbb{L}(m m_1 D^{\#})$，と書かれる。しかし，$\psi \in A(V^{\#} \setminus m m_1 D^{\#}) = A(V_0)$ [なぜなら，$V^{\#} \setminus \mu^{-1}(D)$ は $V_0 = V \setminus D$ と固有双有理同値] なので，$\psi \in f^*(Rat(W_{m_1}))$．ゆえに $\psi' \in Rat(W_{m_1})$ を用いて $\psi = f^*(\psi')$ とかける。

さて，一般に $f : V \longrightarrow W$ のようなとき，$f(\Gamma) = W$ となる素因子 Γ を f についての水平因子，$f(\Gamma) \neq W$ となるとき垂直因子とよぶ。$D = \sum_{i=1}^{r} n_i \Gamma_i$ はすべての Γ_i が水平（垂直）因子のとき，水平（垂直）とよぶと，$D = D_{hor} + D_{ver}$ の如く一意に分解される。

さて，$div\, f^*(\psi')$ は垂直因子よりなるので，$(X_m)_{hor} = m(X_1)_{hor}$

を得る。即ち，$m(X_1)_{nor}$ は $|mX_1|$ の固定成分になり，

$l(mX_1) = l(m(X_1 - (X_1)_{nor}))$ をえる。これにより，容易に，次の漸近評式を得る。

定理5. $\alpha, \beta > 0$ があり，$\kappa = \kappa(D, V)$ とおくとき，m_2 に対し，

$$\alpha m^{\kappa} \leq l_V(mD) \leq \beta\, l(mD), \quad \forall m \geq m_2.$$

この定理は $\kappa(D, V) = \gamma(V - D)$ を思い出すと，$A(V \setminus D)$ と $\mathbb{L}(mD)$ の定量的関係を与えていると云ってよい。一般の D に対し，$|m_0 D| \ni \Delta$ に注意し，$\kappa(D, V) = \kappa(\Delta, V)$ とおく。

定理2に半連続性定理を援用すると次の定理が容易に示される。

定理6. $\kappa = \kappa(D, V) \geq 0$ のとき，固有双有理正則写像 $\mu : V^{\#} \to V$（ここに，$V^{\#}$ は非特異としておこう）と，$\dim W = \kappa$ の射影多様体 W，全射正則写像 $f : V^{\#} \to W$ とがあり次の性質を満たす。

(i) $Rat(V)/Rat(W)$ は代数的閉拡大，

(ii) W 内に閉集合の列 $\{W \supseteq W_{(1)} \supseteq W_{(2)} \supseteq \cdots\}$ の列があり $x \in W_{(1)}$ につき $f^{-1}(x)$ は既約非特異，そして，$x \in W_{(m)}$ につき $l(mm_0\, \mu^*(D)|_{f^{-1}(x)}) = 1$（ここで，$l(m_0 D) \geq 1$ をみたす m_0 ときめておく）。

$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} W_{(m)}$ をとると $\kappa(\mu^*(D)|_{f^{-1}(x)}, f^{-1}(x)) = 0$.

$\bigcap_{m=1}^{\infty} W_{(m)}$ は，スキーム論としての生成点を含むが，開集合とは限らない。$l(mD) = 0$ がすべての $m > 0$ で成立するのなら，$\kappa(D, V) = -\infty$ とおく。

定理3，定理5，及び半連続性定理を用いると次の定理が示される。

定理7. $f : V \longrightarrow W$ を全射正則，V, W を非特異の完備多様体，D を V 上の因子とする。このとき，$V_x = f^{-1}(x)$ とかくと，

$$\kappa(D, V) \leq \kappa(D_x, V_x) + \dim W.$$

ただし，x は W のある開集合 W_0 の点とした。

定理3の後半部を D次元に移すと藤田による次の補題が容易に示される。

補題. 定理7と同じ条件下で，さらに H を W の因子とし，$\kappa(H, W) = \dim W$，$\kappa(D - \alpha H, V) \geq 0$ をみたす $\alpha > 0$ のあるとき，

$$\kappa(D, V) = \kappa(D_x, V_x) + \kappa(H, W).$$

定理4と補題3を再度用いて次の結果を得る。

定理8. 今度は D を W 上の因子，E を V 上の正因子で，$\operatorname{codim}(f(E), W) \geq 2$ とする。すると，

$$\varkappa(f^*D + E,\ V) = \varkappa(D, W).$$

定理6, 7, 8 は D次元の理論にとって最も基礎的なものである。

5. Vを完備非特異とし，DをVの標準因子とするとき，$\varkappa(D,V)$を$\varkappa(V)$とかき，Vの小平次元とよぶ。標準因子は$K(V)$で書かれることが多い。D次元の理論が因子の理論であったのに対し，小平次元の理論は，n-型式の理論としての性格が強い。

定理9. $\varkappa(V) \geq 0$ のとき，$\mu: V^{\#} \to V$，$f: V^{\#} \to W$ があり，$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} W_{(m)}$ に対し $\varkappa(V^{\#}_x) = 0$. 勿論，μは双有理であり，$\dim W = \varkappa(V)$ である。$V^{\#}_x = f^{-1}(x)$ をも一般ファイバーという。

定理10. $f: V \to W$ に対して，

$$\varkappa(V) \leq \varkappa(V_x) + \dim(W).$$

定理11. $f: V_1 \to V_2$ を固有の不分岐被覆とすると，

$$\varkappa(V_1) = \varkappa(V_2).$$

さらに，$\bar{V}$を完備非特異，Dを$\bar{V}$上の正規交叉因子とするとき，$l(m(K(\bar{V})+D))$ は $V = \bar{V} \setminus D$ のみによって定まるので，$\bar{P}_m(V)$ と書き Vの対数的m種数という。さらに，

$\bar{\varkappa}(V)=\varkappa(K(\bar{V})+D,\bar{V})$ も V のみに依存するが、これらはすべて、V の固有双有理不変量である。しかも、定理9, 10, 11. は $\varkappa$ を $\bar{\varkappa}$ におきかえると、すべて成立することが証明される。

以上は、D次元、小平次元の第1段階である。まず、上野による定理をのべる。

定理12. V を Abel 多様体 $\mathcal{A}$ の部分多様体とする。このとき $\varkappa(V)\geq 0$. そして $\varkappa(V)=0$ なら V 自身アーベル多様体になる。

さらに $0<\varkappa(V)<n=\dim V$ なら、$\mathcal{A}$ には、エタール被覆 $\pi:\tilde{\mathcal{A}}\to\mathcal{A}$ があり、$\pi^{-1}(V)\to V$ もそうであり、かつ $\pi^{-1}(V)=B\times W$, ここに B はアーベル多様体で、$\dim B=n-\varkappa(V)$, W は $\dim W=\varkappa(W)$ を満たす。

即ち、定理11によれば、エタール被覆のずれを $\varkappa$ の計算上無視しえるし、このようなとき V は直積構造をもつ、というのである。

6. $\varkappa(V)=0$ なる V を研究する。V の Albanese 写像 α: $V\to \mathrm{Alb}(V)$ を考える。$Z=\alpha(V)$ に、定理12を用いる。

Z は $Alb(V)$ を生成する。 へへかえると、 Zを含む最小のアーベル多様体は、 $Alb(V)$ に限るのである。ゆえに、定理12によると、 $Z \neq Alb(V)$ なら $\kappa(Z)>0$. 即ち、このことより、 $\kappa(V)>0$ を導けるなら仮定に矛盾する。かくして、次の予想が生まれる。

予想 C_n. $f: V \to W$ に於し、 $\dim V \leq n$ なら、一般の $x \in W$ に於して、

$$\kappa(V) \geq \kappa(V_x) + \kappa(W).$$

C_2 はイタリア学派の代数曲面論に於て証明されている。勿論、このような言明を述べてはいない。しかし Shafarevich の本の中で、 $\dim V = 2$, $g(V_x) \geq 2$, $g(W) \geq 2$ (g は種数を示す) のとき V は一般型、という記述があり、これにて、2次元の時はOKと考えられる。

分類によらずに C_2 を確定したのは、上野の仕事が最初で、既に70年代に深く入り込んでいる。(イタリア学派との70年の距離に驚かされる!)

Viehweg により $\dim V = \dim W + 1$ のとき、解決され、さらに V_x がアーベル多様体のとき、上野が示した。これは、曲線の場合をカバーする。 $\dim W = 1$ のとき、 $\kappa(W) = 1$, $P_g(V_x)$

$\Sigma 1$ の仮定の下で、藤田は証明した。藤田の証明は、Hodge 構造論に依存した全く新しいもので、Viehweg，上野の証明と本質的に異なる。この方法を改良発展させて、$\kappa(W)=\dim W$, $\kappa(V)\geq 0$ のときに、森又は、C_n を証明した。これはアーベル多様体の双有理的特徴づけ等を含む、極めて応用範囲の広いものである。Viehweg は C_3 を証明している。最近(1980) 森又は、$\dim W=1$ のとき、付帯条件なしで、C_n を完全に証明した（Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves）。証明には、解析幾何の深い高度な技法が必要とされている。

定理9でその存在を主張された $V^\# \to W$ は、双有理を除くと一意である。即ち、$\mu_1 : V^\natural \to V$，$f_1 : V^\natural \to W^\natural$ が同様の条件を満たすと、双有理写像 $\rho : W^\natural \leftrightarrow W$ があり、次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd}
V^\# \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "f"] & V & V^\natural \arrow[l, "\mu_1"'] \arrow[d, "f_1"] \\
& W \arrow[r, leftrightarrow, "\rho"] & W^\natural
\end{tikzcd}$$

なお $f : V^\# \to W$ を V の <u>標準ファイバリング</u> という。

さて、一般に $\varphi : X \longrightarrow Y$ が与えられた時、$\kappa(X) \geq 0$, $\kappa(Y) \geq 0$ を仮定する。X, Y の双有理変換をし（即ち、$X^{\#}$, $Y^{\#}$ を又、X, Y と書いて）$f : X \to V$, $g : Y \to W$ を各々の標準ファイバリングとしよう。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\psi"] & Y \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, dotted, "h"] & W \end{tikzcd}$$

すると、$h : V \longrightarrow W$ ができて上図式は可換になりそうである。少く共、自然にそうあってほしいと思われる。このような h を仮定してみる。すると、一般の点 $w \in W$ をとるとき、$\psi = g \circ \varphi$ とおけば、定理10を $\psi : X \to W$ に用いて、

$$\kappa(X) \leq \kappa(\psi^{-1}(w)) + \dim W = \kappa(\psi^{-1}(w)) + \kappa(Y)$$

を得る。一方、$\psi^{-1}(w) \to h^{-1}(w)$ の一般ファイバーは $f^{-1}(v)$ であり、$\kappa(f^{-1}(v)) = 0$ をみたすから、定理10により、

$$\kappa(\psi^{-1}(w)) \leq \dim h^{-1}(w) = \dim V - \dim W = \kappa(X) - \kappa(Y).$$

即ち、$\kappa(X) \geq \kappa(\psi^{-1}(w)) + \kappa(Y)$.

かくして、等式

$\kappa(X) = \kappa(\psi^{-1}(w)) + \kappa(Y)$ を得る。これを角田の

等式として以下引用する。

一方，$\dim W = \kappa(Y) > 0$ とすると，$\dim \psi^{-1}(w) <$ $\dim X$ だから，帰納法を $\dim X$ について組み，$C_{\dim \psi^{-1}(w)}$ を用いると，$\kappa(g^{-1}(w)) = 0$ に注目すれば，

$$\kappa(\psi^{-1}(w)) \geq \kappa(\varphi^{-1}(y))$$

をえる。角田の等式の右辺に合せて，

$$\kappa(X) = \kappa(\psi^{-1}(w)) + \kappa(Y) \geq \kappa(\varphi^{-1}(y)) + \kappa(Y).$$

これは C_n の不等式である。即ち，h の存在を仮定するとき，角田の等式も C_n も示されてしまう。

しかるに，h の存在は決して自明でないばかりか，現在その証明など全然できそうにない。$K(X/Y) = K(X) - \varphi^* K(Y)$ とおく。

Viehweg の予想．$\boxed{\kappa(K(X/Y), X) \geq \kappa(X_y)\ ;\ \text{とくに}\ \kappa(X_y) \geq 0\ \text{のとき}\ \kappa(K(X/Y), X) \geq 0.}$

これを仮定する。即ち，ある $m>0$ に対して，$D_m \in |K(X/Y)|$ があるとしよう。双有理同値で適当に動かして，さらに $m \gg 0$ にとり，$g = \Phi_{mK(Y)}$ とすると，$g \circ \varphi = \Phi_{\varphi^*|mK(Y)|}$．一方 $m(K(X) - \varphi^* K(Y)) + \varphi^*|mK(Y)| \leq |mK(X)|$ であり，$g \circ \varphi$ は $f : X \to V$ を経由して，分解する。そして $h : V \to W$ をえる。即ち Viehweg 予想から，h の存在がでるが，Viehweg 自身これを自信ある態度でのべてはいない。$\dim X_y = 1$ のときは確められている。しかし $\dim X_y > 1$ のときは既に絶望的。

ともかく、C_n のもとで、$\varkappa(V)=0$ なら $\alpha : V \to \mathrm{Alb}(V)$ は全射になり、とくに $q(V)=\dim \mathrm{Alb}(V) \leq n=\dim V$ をえる。これを、予想(B_n)と書いたこともあるが、C_n の正しさを確信する以上、改めて「$q(V) \leq n$, if $\varkappa(V)=0$」を取りあげるに及ばない。従って、予想のアルファベットがずれ込む。

むしろ $q(V)=n$, $\varkappa(V)=0$ のときを考える。$V \to \mathrm{Alb}(V)$ は次元が等しく全射である。よって、その Stein 分解 $V \to Y \to \mathrm{Alb}(V)$ をとると $\varkappa(Y)=0$ かつ、$Y \to \mathrm{Alb}(V)$ は有限正則、Y は正規、さらに $V \to Y$ は双有理になる。そして、川又の定理は $Y \to \mathrm{Alb}(V)$ がエタールになることをいう。

定理13. Y を正規多様体、そして A をアーベル多様体で、$f : Y \to A$ は有限とする。$\varkappa(Y) \geq 0$ であり、$\varkappa(Y)=0$ なら、Y は A のある Abel (部分)多様体 A_0 上のエタール被覆になる。

これは、予想 B_n とよばれるもので、川又による。証明は、後に紹介される。(かつては D_n ともよばれた)。

上野の定理12が、アーベル多様体の部分多様体のみを扱ったのに対し、これは、その上の分岐被覆を考えていることに注意。

定理12の後半と同様の事が、アーベル多様体の部分多様体

についても示される。そして、これを用いれば、$\varkappa(V)=0$ なる V の研究に、証明されている C_n の部分解が使えるのである。

即ち、次の2定理を用いる。

定理14. $f: V \to W$ が全射，$\varkappa(V) \geq 0$，$\varkappa(W)=\dim W$ のとき $\varkappa(V)=\varkappa(V_y)+\varkappa(W)$.

定理15. $f: Y \to \mathcal{A}$ を有限正則とする。(但し，Y は正規，$\mathcal{A}$ はアーベル多様体)。Y にはエタール被覆 $\tilde{Y}$ があり $\tilde{Y}=B\times J$ と分解する。ここに B はアーベル多様体，J は $\varkappa(J)=\dim J$ をみたす。

$\varkappa(V)=0$ のとき $\alpha_V: V \to Z=\alpha_V(V) \subseteq Alb(V)$ の Stein 分解 $V \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{\mu} Z$ を考える。定理16 のエタール被覆 $\tilde{Y}$ をとり，$\tilde{V}=(V\times_Y \tilde{Y})_1$ をとる。(ここで1は，1既約成分の意味)。すると，$\varkappa(\tilde{V})=\varkappa(V)=0$ しかも $\tilde{Y}=B\times J$。よって $\tilde{V}\to J$ に定理14を用いて，$\varkappa(J)=0$，即ち $\dim J=0$，いいかえると，$\tilde{Y}=B$ だから $Z=Alb(V)$ であり，$Y\to Z$ はエタールとなる。$V\to Alb(V)$ は普遍性をもつから $Y=Z$ となる。即ち α_V は全射で，そのファイバーは既約となる。

定理16の証明も技巧的であり興味深いが、何といっても定理15の証明が中心的である。以下に趙と角田の両氏が詳しく紹介する。

一方、$\kappa(V)=0$, $n=q(V)$ なら $\alpha_V : V \to Alb(V)$ は双有理になり、次の判定法をうる。

Abel多様体の特徴づけ：Vはアーベル多様体と双有理同値
$$\Longleftrightarrow \kappa(V)=0,\ q(V)=n.$$

$0<\kappa(V)<n$ のとき $\alpha_V : V \to Alb(V)$ の一般のファイバー F_a は、どうなるであろうか。C_n をVに仮定する限り、$\kappa(F_a)=0$ がでてしまう。従って、これを確立できるように C_n を部分的にでも解決する必要がある。更に、この F_a は、互いに双有理同値で、Vは F_a をファイバーとするエタール・トポロジーでのファイバー束に双有理同値になると予想されている。これが上野の予想 K_n である。$q(V)=n-1$ のとき、川又はこれを確立している。

$\kappa(V)=0$, $q(V)=0$ をみたすVの研究は一般には手がつけられていない。しかし、$mK(V)\sim 0$ のとき、Vのエタール被覆 $\tilde{V}$ があって $\tilde{V}=A\times C$, Aはアーベル、Cは単連結の形に分解することがわかっているそうである。この結果は

2次元に限っても、イタリア学派を越えた結果である。$mK(V)\sim 0$ の条件を $\kappa(V)=0$ でおきかえて、同趣旨の結論を得たいものである。(これが予想 E_n である).

従って、$\kappa(V)=0$, $\pi_1(V)=\{id\}$ となる V の研究にと話が収束する。2次元であれば、これらはK3曲面であり、すべて同相。そして適当な複素変形族を介せると互いに移りあう。このままの形では、勿論高次元に移せない。現在では雲をつかむようなもので、何もわからない。

$\kappa(V)=-\infty$ のとき、やはり Albanese 写像 $\alpha_V: V\to\alpha_V(V)$ をとり、このスタイン分解 $\psi: V\to Z$ をえる。予想 C_n の下で、$\kappa(\psi^{-1}(z))=-\infty$ をえるから これの正体が第一の問題。ついで、$q(V)=0$ のとき、を調べねばならぬが Stein 分解さえつかえないので、どうしたらよいかわからない。

一般に、$\kappa(V)=-\infty$ のとき、藤木氏の意味で、Vは準線織的 (quasi ruled) になることでも期待しておこう。準線織的とは、Vに有理曲線の族が存在し、これらが V をおおう、ということである。今迄は、便宜的な概念として、単有理的 (uni ruled) 等とよばれた。しかし、藤木の研究により、準線織的でない V の、その偏極族はよい性質をもつことが示され、これらの一般論的地位も定まりつつあるように思われる。予想 C_n にしても、$-\infty$ のときが最も難かしく、この部類の

研究は本質的である。

くり返しになるが、予想C_nを示すには、

1) $\kappa(X_y)\geq 0,\ \kappa(Y)\geq 0 \Rightarrow \kappa(X)\geq 0$.

2) $\kappa(X_y)>0,\ \kappa(Y)\geq 0 \Rightarrow \kappa(X)>0$.

$\kappa(X_y)\geq 0,\ \kappa(Y)>0$

を示せば、ほぼ充分なのである。

今回の研究集会では $\kappa(X)=0$ の X を研究した川又の仕事の理解消化が中心であり、概略次のような手順をふむ。

① $\kappa(X)\geq 0$ のとき、X の有限被覆 $X'\to X$ をとり、$\kappa(X')=\kappa(X)$, $p_g(X')>0$ にする。

② $f: X\to Y$ に対し、半単化定理を示す。即ち、X, Y の双有理モデルのとりかえを行って更に、$\tilde{Y}\to Y$ なる有限正則全射をとると、$X\times_Y\tilde{Y}$ の非特異化 $\tilde{X}$ から $\tilde{Y}$ への正則写像は半単にできる。

③ $\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$ に対して、$\tilde{f}_*(K(\tilde{X}/\tilde{Y}))$ の半正値性を示す。

④ 3を基に、②の状況下で、$\kappa(X)\geq 0$, $\dim Y=\kappa(Y)$ を更に仮定するとき $\kappa(X)>0$ を示す

⑤ $\kappa(X)\geq 0$, $\kappa(Y)=\dim Y$ のとき $\kappa(X)=\kappa(X_y)+\kappa(Y)$ をいう。

技術的に最も困難なのは③の段階である。

⑥ アーベル多様体の部分多様体の分岐被覆に対して、構造定理を示す。

⑦ ⑤, ⑥を用いて、定理15を示す。

$0<\kappa(V)$ となる V については、canonical ring $\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma(V,\mathcal{O}(mK(V)))$ の有限生成の問題、測度双曲性の事など一般の問題も多いがここではふれない。しかし、$\dim V=3$, $\kappa(V)=3$ なる V についても研究の現状は満足のゆくものではない。

一般化の方向として、($\kappa(V)=0$ の分類や C_n については、)

1. 非完備な $\mathbb{C}$ 上の代数多様体への一般化。

これは、非常に旨く行っている。アフィン環の理論への応用もある。

2. コンパクト複素多様体への一般化。

Kähler(又は、藤木)多様体に限るとほぼできるが、これの外では、大抵成立しない。しかし、別種の分類理論がつくられる(上野の稿参照)

3. 正標数の完備多様体について一般化すること。

微分型式の統制力の弱さ、非特異化理論の不足等から、全然手がついていない。同じ結論は期待しえない。非Kählerと似た病理現象も見出されよう。特有の分類理論も…

4. p-進解析空間への一般化 等。 ……?!