数理解析研究所講究録
第 392 巻 1980 年 42-52

Semi-positivity

東大 理　趙 康治

この§では次の定理を証明する.

定理. X, Y; complete non-singular projective varieties

$f: X \longrightarrow Y$; fiber space

で次の条件を満たすものとする.

(i) $Y \supset Y_0$ Zariski-open set で $D \underset{def}{=} Y - Y_0$ は正規交叉因子とする.

(ii) $X_0 \underset{def}{=} f^{-1}(Y_0)$ $f_0 \underset{def}{=} f|_{X_0}$ とすると, $X - X_0$ は正規交叉因子で f_0 は smooth.

(iii) $n = \dim X - \dim Y$ とする.

$R^n f_{0*}\mathbb{C}_{X_0}$ の D のまわりの local monodromy は unipotent.

このとき $f_* K_{X/Y}$ は locally free かつ semi-positive.

但し, $K_{X/Y} \underset{def}{=} K_X \otimes (f^* K_Y)^{\otimes -1}$. K_X, K_Y はそれぞれ X, Y の canonical invertible sheaf.

Definition: complete normal algebraic variety X 上の locally free sheaf $\mathcal{F}$ が semi-positive であるとは.

(i) C: 任意の非特異射影曲線

(ii) $\varphi: C \longrightarrow X$ 任意の morphism

(iii) $\varphi^*\mathcal{F}$ の任意の quotient invertible sheaf Q

に対して $\deg_C Q \geqq 0$ が成り立つこと.

最初に Variations of Hodge Structure の復習をする.

$\mathcal{H}_0 \underset{Def}{=} (R^n f_{0*}\mathbb{C}_{X_0})_{prim} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}$, $\mathcal{F}_0 \underset{Def}{=} f_{0*}K_{X_0/Y_0}$

'prim' は primitive part を表わす.

このとき $\mathcal{H}_0$ には Hodge filtration $\{F^p\}_{0 \leq p \leq n}$ が入り, $\mathcal{F}_0 = F^n(\mathcal{H}_0)$ となる.

さて $\mathcal{H}_0$ は次のようにして標準的に Y 上のある locally free sheaf $\mathcal{H}$ に拡張出来る:

$p \in D$, p での small open neighborhood $\mathcal{U}$ を充分小さくとって $\mathcal{U} \cong \Delta^d$, $\mathcal{U} \cap Y_0 \cong \Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$ とする. ここで $d = \dim Y$, Δ は disc. $\Delta^* = \Delta - \{0\}$

p のまわりの local coordinates を $(t_1, \cdots, t_d)$

D の local equation を $t_1 \cdots t_e = 0$ とする.

Hを上半平面とすると $H^e \times \Delta^{d-e}$ は $\Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$ の universal covering で, covering map π は次の様になる.

$$\pi : H^e \times \Delta^{d-e} \longrightarrow \Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$$
$$(z_1, \cdots, z_e, t_{e+1}, \cdots, t_d) \longmapsto (\exp 2\pi i z_1, \cdots, \exp z_e, t_1, \cdots, t_d)$$

このとき $\pi^*\mathcal{H}_0$ は trivial. 以下 line bundle と invertible sheaf を同一視する. $\pi^*\mathcal{H}_0$ の fiber を $H_{\mathbb{C}}$ とすると,

$\mathcal{H}_0$ は $H_{\mathbb{C}} \times H^e \times \Delta^{e-d}/\sim$ と同一視出来る.

但し. $(v, z, t) \sim (v', z', t')$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} v &= \gamma_i v' \\ z_j &= z_j' \quad (j \neq i) \\ z_i &= z_i' + 1 \\ t &= t' \end{aligned}$$

$\gamma_i \in \pi_1(\Delta^{*e} \times \Delta^{d-e})$ は $t_i = 0$ のまわりの local monodromy.

v: $H_{\mathbb{C}}$-valued hol. function

従って $s \in \mathcal{H}_0(U \cap Y_0)$ は $v(z_1, \cdots z_{i-1}, z_i+1, z_{i+1}, \cdots, z_e, t) = \gamma_i v(z_1, \cdots, z_e, t)$ をみたす ある $H_{\mathbb{C}}$-valued holomorphic function と1対1に対応する.

さて $v^*(z, t) \underset{\text{def}}{=} \exp(-\sum_{i=1}^{e} z_i N_i)\, v(z, t)$

$N_i = \log \gamma_i \quad (i = 1, \cdots e)$ とすると

$v^*(z_1, \cdots, z_{i-1}, z_i + 1, z_{i+1}, \cdots, z_e, t) = v^*(z, t)$

よって v^*は $U \cap Y_0$ 上の holomorphic $H_{\mathbb{C}}$-valued function と見なせる.

故に $\mathcal{H}_0 \cong \mathcal{O}_{U \cap Y_0} \otimes H_{\mathbb{C}}$

このisomorphismによって$\mathcal{H}_0$は$\mathcal{U}$上に延長出来る.
即ち, $s \in \mathcal{H}_0(\mathcal{U} \cap Y_0)$

$$s = \sum_{i=1}^{m} f_i s_i \qquad f_i: \text{multi-valued holomorphic function}$$
$$s_i: \text{multi-valued flat section}$$

とすると, $s = \sum_{i=1}^{m} f_i \exp\left(\sum_{j=1}^{e} z_j N_j\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^{e} z_j N_j\right) s_i$ が成り立つから, sが$\mathcal{U}$上にのびる$\Leftrightarrow f_i$はDに沿って高々logarithmic singularityをもつ.
またNilpotent Orbit Theoremによって$\{F^p\}$も$\mathcal{U}$上に拡張出来る. 拡張したfiltrationも同じく$\{F^p\}$とかく. $\mathcal{F} \underset{\text{def}}{=} F^n(\mathcal{H})$ $\mathcal{F}$は$\mathcal{F}_0 = f_{0*}K_{X_0/Y_0}$の延長である.
主張: $\mathcal{F} = f_* K_{X/Y}$.

$s = \sum f_i s_i$ (f_i, s_iは前と同じもの.)
をDに沿う$\mathcal{F}_0$のrational sectionとする.

$$\int_{X_t} s \wedge \bar{s} = \sum a_{ij} f_i \bar{f_j}$$

$a_{ij} \underset{\text{def}}{=} \int_{X_t} s_i \wedge \bar{s_j}$ ここでs_i達はflat, でX_tはC^∞-多様体としてtによらず同型であるからa_{ij}は定数.

$s \in \Gamma(\mathcal{U}\cap Y_0,\ f_{0*}K_{X_0/Y_0})$

$\quad = \Gamma(f_0^{-1}(\mathcal{U}\cap Y_0),\ \mathcal{H}om(f_0^{*}K_{Y_0}, K_{X_0}))$

$f_0^{*}(dt) \in \Gamma(f_0^{-1}(\mathcal{U}\cap Y_0),\ f_0^{*}K_{Y_0})$ $\qquad dt = dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d$

$f_0^{*}(dt)$ は明らかに $f^{*}(dt) \in \Gamma(f^{-1}(\mathcal{U}),\ f^{*}K_Y)$ にのびる。

$s(f_0^{*}dt) \in \Gamma(f_0^{-1}(\mathcal{U}\cap Y_0),\ K_{X_0})$

従って s が $\Gamma(\mathcal{U},\ f_*K_{X/Y})$ の元にのびる.

$\Longleftrightarrow$ $s(f_0^{*}dt)$ が $\Gamma(f^{-1}(\mathcal{U}),\ K_X)$ の元にのびる.

$$\Longleftrightarrow \quad \left| \int_{f^{-1}(\mathcal{U}\cap Y_0)} s(f_0^{*}dt) \wedge \overline{s(f_0^{*}dt)} \right| < \infty \quad (\text{Sakai})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left| \int_{\mathcal{U}\cap Y_0}\int_{X_t} s \wedge \bar{s} \right| < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left| \sum a_{ij} \int_{X_t} f_i \bar{f}_j \ dt \wedge d\bar{t} \right| < \infty$$

$\Longleftrightarrow$ f_i は高々 *logarithmic singularity* を持つ.

$\Longleftrightarrow$ s が $\mathcal{F}$ の section に拡張出来る。

即ち, $\mathcal{F} = f_*K_{X/Y}$ $\qquad$ q.e.d.

(2) D_1：Dのirreducible componentとする．

$D_1^\circ \underset{def}{=} D_1 - \overline{(D-D_1)}$

U：D_1のsmall open nbd.

$U^\circ \underset{def}{=} U - \overline{(D-D_1)}$

γ_1：$\mathcal{H}|_{U-D}$のD_1のまわりのlocal monodromy.

このとき$\mathcal{H}|_{U-D}$上にascending filtration $\{W_\ell\}_{0\leq \ell \leq 2n}$が存在して．

(i) $N(W_\ell) \subset W_{\ell-2}$ $\qquad N = \log \gamma_1$

(ii) $N^\ell : Gr^W_{n+\ell}(\mathcal{H}|_{U-D}) \xrightarrow{\sim} Gr^W_{n-\ell}(\mathcal{H}|_{U-D})$ $\quad \ell \geq 0$

また$Gr^W(\mathcal{H}|_{U-D})$上で$\gamma_1 \equiv 1$であるから$\{W_\ell\}$は$\mathcal{H}|_{U^\circ}$上にのび，$Gr^W(\mathcal{H}|_{U^\circ})$はもとのGauss-Manin connectionから誘導されたflat connectionを持つ．

$\{W_\ell\}$, $\{\mathcal{F}^p\}$は$\mathcal{H}|_{D_1^\circ}$上にvariation of mixed Hodge structureを定める．即ち$\{\mathcal{F}^p\}$は$Gr^W(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$上にvariation of Hodge structureを定める．但しpolarizationはない．

$P^\circ_\ell \underset{def}{=} \operatorname{Ker} N^{\ell-n+1}$ $\qquad N^{\ell-n+1} : Gr^W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1^\circ}) \longrightarrow Gr^W_{2n-\ell-2}(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$

$(\ell \geq n)$ $\qquad \ell < n$のときは$P^\circ_\ell = 0$とおくと．

P°_ℓ $(n \leq \ell \leq 2n)$は polarization S_ℓを持つvariation of Hodge structuresとなる．但し，S_ℓは次の様に定義される：

$y \in D_1^\circ$, $\tilde{u}, \tilde{v} \in P^\circ_{\ell, y}$ とする.

u, v を $W_\ell(\mathcal{H}|_{U-D})$ の multi-valued flat sections で, $\tilde{u}, \tilde{v}$ に行く $Gr^W_\ell(\mathcal{H}|_{U^\circ})$ の flat sections を誘導するものと仮定する.

$S_\ell(\tilde{u}, \tilde{v}) \underset{def}{=} S(u, N^{\ell-n}v)$ S は元々の polarization

P_ℓ° は前と同様な議論によって D_1 上の P_ℓ にのびる.

一方 $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$ も $\mathcal{H}|_{D_1}$ の locally free subsheaves $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1})$ にのびる.

このとき $Gr^W_\ell(\mathcal{F}|_{D_1^\circ}) = F^n(P_\ell^\circ)$

∵ $\supset$ は明らか. $\subset$ を示す.

$$x \in F^n \cap W_\ell . \quad N^{\ell-n+1} x \in F^{2n-\ell-1} \cap W_{2n-\ell-2} = F^{2n-\ell-1} \cap W_{2n-\ell-2}.$$

$$\left(\because\ F^{2n-\ell-1} Gr^W_{2n-\ell-2} = 0 \right)$$

■

さて $\deg_C Q \geq 0$ を証明する.

(i) $\varphi(C) \cap Y_0 \neq \phi$ とする.

$h(u, v) \underset{def}{=} S(u, \bar{v})$ $u, v \in \mathcal{F}_{0,y}$ $y \in Y_0$ によって $\mathcal{F}_0$ 上に positive definite hermitian metric を定義する. S は $\mathcal{H}_0$ の polarization.

$C_0 \underset{def}{=} \varphi^{-1}(Y_0)$.

$Q|C_0$ には h から誘導された hermitian metric h_Q が入る． Griffith により，Θ は positive semi-definite

従って Θ_Q も positive semi-definite になる．

但し，Θ は h に associate した metric curvature.

Θ_Q h_Q に associate した metric curvature.

一方，Schmid により $h(v_p, v_p) = O(|t|^{-2\alpha'_p} |\log t|^{\beta'_p})$

v_p : $\mathcal{H}_0$ の uniformizing section , $p \in D$.

$\alpha'_p \geqslant 0$, $\beta'_p \geqslant 0$ となることがわかるから．

$h_Q(v_q, v_q) = O(|t|^{-2\alpha_q} |\log t|^{\beta_q})$

v_q : Q の uniformizing section $q \in C - C_0$

t は q での local coordinate

$\alpha_q \geqslant 0$, $\beta_q \geqslant 0$ となる．

従って次の lemma から $\deg_C Q \geqslant 0$ となる．

Lemma : L : 非特異射影曲線 C 上の invertible sheaf

$C \supset C_0$ Zariski-open set.

h : hermitian metric on $L|C_0$

$\Theta = \bar{\partial}\partial \log h$ metric connection

$p \in C - C_0$.

t_p : p での local coordinate

pの近くの uniformizing section を v_p とする。
このとき $h(v_p, v_p) = O(|t|^{-2\alpha_p} |\log t|^{\beta_p})$ が成り立つならば $(\alpha_p \geq 0,\ \beta_p \geq 0)$

$$\deg_C L = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{C_0} \Theta + \sum_{p \in C - C_0} \alpha_p$$

∵) $U_p = \{ x ; |t_p(x)| < \varepsilon \}$ $\quad p \in C - C_0$
h を U_p 内だけで変形して L 上の C^∞ metric h' をつくる。$\Theta' = \bar\partial\partial \log h'$

$$\deg_C L = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_C \Theta' = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{C - \bigcup_p U_p} \Theta + \sum_{p \in C - C_0} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{U_p} \Theta'$$

Stokes の定理によって

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{U_p} \Theta' = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\partial U_p} \partial \log h(v_p, v_p) \quad \left(\because)\ h = h' \text{ on } \partial U_p \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h}{\partial \log r} d\theta \qquad t_p = r e^{2\pi i \theta}$$

また $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h}{\partial \log r} d\theta = -2\alpha_p$

これから 上の 公式が出る。 ■

(ii) $\varphi(C) \subset D_1$, $\varphi(C) \cap D_1^\circ = \phi$ の場合.

$$\varphi^*\mathcal{F} \xrightarrow[g]{} Q \longrightarrow 0$$

$\exists\, l$ $\varphi^* W_{l-1}(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Ker}\, g$, $\varphi^* W_l(\mathcal{F}) \not\subset \mathrm{Ker}\, g$

となるから, $\varphi^* Gr_l^W(\mathcal{F}|_{D_1}) \longrightarrow Q$ なる non-zero homomorphism が誘導される. Q'をこの homomorphism の像とする. (i)の議論において $\mathcal{F} = F^n(\mathcal{H})$ のかわりに $Gr_l^W(\mathcal{F}|_{D_1}) = F^n(\mathcal{P}_l) \subset \mathcal{P}_l$ を使えば, $\deg_C Q' \geq 0$ が証明出来る. 故に $\deg_C Q \geq \deg_C Q' \geq 0$

(iii) D_2: Dの他の irreducible component.

$D_{12} = D_1 \cap D_2$

$D_{12}^\circ = D_{12} - \overline{(D - D_1 - D_2)}$

$\varphi(C) \subset D_{12}$, $\varphi(C) \cap D_{12}^\circ \neq \phi$ の場合も (ii)と同様に証明出来る.

以下, $\varphi(C)$ と D の包含関係によって帰納的に証明出来る.

参考文献:

Fujita: On Kaehler fiber spaces over curves
J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 779-794

Griffiths: Periods of integrals on algebraic manifolds III, Publ. Math. IHES, 38 (1970) 125-180

Sakai: Kodaira dimensions of complements of divisors, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 1977, Iwanami, 239-257

Schmid; Variation of Hodge structure; the singularities of period mapping
Inv. Math. 22 (1973), 211-319