数理解析研究所講究録
第393巻 1980年 1-9



# 非定常ストークス方程式の解

東大 理学部 橋本 英典

## §1. はじめに

ナビエ・ストークスの方程式の慣性項 $\partial\mathbf{V}/\partial t+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ を $\partial\mathbf{V}/\partial t$ で置きかえた非定常ストークス方程式は i) レイノルズ数が小さい ($\rho UL/\mu \lll 1$) ときばかりでなく ii) 流れの変動時間 $1/\alpha$ が通過時間 $L/U$ にくらべて短かいとき ($\alpha L \gg U$) にも有效である。ただし $L$ は代表長，$U$ は代表流速，$\rho$ は流体の密度 $\mu$ は粘性率である。また解の存在，唯一性の議論などにも重要な役割を演ずる。

ここでは方程式の線型性にもとづき，まず固定点におかれた $Fe^{\alpha t}$ の強さの集中力源に対する基本解を導き，その重ね合わせによって一般解を構成する。また非定常流れにおかれた物体に働く力と，その物体によってひきおこされる場の遠くでのふるまいとの間に簡単な関係のあることを示す。また強さが任意の時間変化をし，任意の

運動を行なう集中力源に対する解を重ね合わせによって構成し、運動速度が一定値に近づくときそれがオセーンの方程式の基本解（オセーンレット）を与えることを示す。

## §2. 集中力 $\mathbf{F}_p e^{\alpha t}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)$ に対する基本解[1]

点 $\mathbf{x}_p$ に集中力 $\mathbf{F}_p e^{\alpha t}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)$ が働くときの基本解は因数 $e^{\alpha t}$ を除いて

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0\ , \tag{1}$$

$$\rho\alpha\mathbf{v}=\mu\Delta\mathbf{v}-\nabla p+\mathbf{F}_p\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p), \tag{2}$$

あるいは

$$L_k[\mu\mathbf{v}]\equiv(\Delta-k^2)[\mu\mathbf{v}]=\nabla p-\mathbf{F}_p\delta_p \tag{2'}$$

を満足する。ただし $k^2=\rho\alpha/\mu\quad(\mathrm{Re}\,k>0),\ \delta_p=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)$ (3)

(2) の div をとれば、(1) により

$$\Delta p=(\mathbf{F}_p\cdot\nabla)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)$$

であるから、圧力 $p$ はラプラスの方程式の基本解

$$\phi_p=\begin{cases}-1/(4\pi r)\ ; \cdots(3\text{次元}),\\ \dfrac{1}{2\pi}\log r\ ; \cdots(2\text{次元}),\end{cases}\quad r=|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p|, \tag{4}$$

を用いて力の方向に軸をもつ2重わき出し

$$p_p=(\mathbf{F}_p\cdot\nabla)\phi_p \tag{5}$$

の形に表わすことができる。これを(2')に代入し，ヘルムホルツの方程式の基本解（$L_k[\chi_p]=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p)$）

$$\chi_p=\begin{cases}-e^{-kr}/(4\pi r) & (3次元),\\ -\dfrac{1}{2\pi}K_0(kr) & (2次元),\end{cases} \quad (6)$$

（ただし$K_0$は第2種の変形ベッセル函数）を用いれば速度$\boldsymbol{v}$に対して

$$\mu\boldsymbol{v}_p=-\frac{1}{k^2}(\boldsymbol{F}_p\cdot\nabla)\nabla(\phi_p-\chi_p)-\boldsymbol{F}_p\chi_p$$

$$=\frac{1}{k^2}\left[-\nabla p_p+\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\boldsymbol{F}\chi_p)\right] \quad (7)$$

が得られる。

(7)の第1項は渦なしで$\phi_p$は圧力に関係し，$\boldsymbol{F}_p\chi_p$の項は

$$\mu\boldsymbol{\omega}_p=\mathrm{rot}(\mu\boldsymbol{v}_p)=\boldsymbol{F}_p\times\mathrm{grad}\,\chi_p \quad (8)$$

が示すように渦度$\boldsymbol{\omega}_p$を与えるが，純非定常（$k\neq0$）である限り遠く（$kr\to\infty$）で指数函数的に小さくなって遠方場が渦なしであることを示す。

任意の流れの中におかれた物体による撹乱場は流体に$\boldsymbol{F}_p$の力をおよぼす基本解の重畳（$\boldsymbol{x}_p$, $\boldsymbol{F}_p$の種々の値に対して）によって表わされるが（ストークス近似の成り立つ領域で）遠方の場を考えれば$\chi_p$の重畳によるものは指数函数的に小さく（非定常境界層の外），物体の中心を原点と

する　　　二重わき出しのポテンシャル場

$$\mathbf{v} = \nabla\left(-\frac{1}{\rho c^2}p\right), \quad p = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\phi_0 \qquad (9)$$

に近づく。 ここに $\mathbf{F}$ は $\mathbf{F}_p$ の總和であって固定した物体に流体がおよぼす力 $-\mathbf{F}$ の反作用である。 このように、静止物体に働く力が二重わき出しの形で与えられる圧力場（遠方速度場）の係数からただちにみいだされることは $\alpha$ についてのフーリエ合成を行なってもかわらない一般的な性質であることは明らかである。

以上では物体が静止しているばあいを考えたが、体積 $v_b$ の物体が $\mathbf{V}_0 e^{\alpha t}$ の速度で運動するときは、物体に固定した加速座標系をとればよい。 $\alpha \mathbf{V}_0 e^{\alpha t}$ の加速度をもつ一様な力の場における浮力 $\alpha \rho v_b \mathbf{V}_0 e^{\alpha t}$ が物体に働く力につけ加わることがわかる。

また $e^{\alpha t}$ を分離した一般解は (5), (7) を流れの外側（あるいは物体内）に分布させて得られるものであり、重ね合わせの結果は、一般解として

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho c^2}\left(\nabla p + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Phi}\right) \\ &= \boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{\rho c^2}\nabla\left(p + \mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}\right) \qquad (10) \end{aligned}$$

をもつ。ただし $p$ は調和関数

$$\Delta p = 0 \tag{11}$$

$\Psi$はヘルムホルツの方程式

$$L_k[\Psi] = (\Delta - k^2)\Psi \tag{12}$$

を満足するベクトル関数である。

例. 固定球(半径$a$)を過ぎる振動流$V_\infty$ $(\propto e^{\alpha t})$

球面上で$V = -V_\infty$, 無限遠で0に近づく擾乱場は

$e^{\alpha t}$を除って確かに

$$p = (F \cdot \nabla)\phi_0, \quad \frac{F}{6\pi\mu a} = -EV_\infty \tag{13}$$

$$E = 1 + ka + \frac{1}{3}k^2a^2$$

$$\Psi = -\frac{3\mu a}{2r} e^{k(a-r)} \tag{14}$$

で与えられる。$-F$は流体が球におよぼす力である。

$E$の第3項は$F$に$-2\pi\rho a^3\dot{V}_\infty$を与え(・は時間微分)

さらに$\frac{4\pi}{3}\rho a^3\dot{V}_\infty$を加えれば静止流体中を$V_\infty e^{\alpha t}$の速度で

振動する球に働く抵抗$-6\pi\mu a\tilde{E}V_\infty$, $\tilde{E} = E - \frac{2}{9}k^2a^2$

を与える。一般に$V_\infty(e^{\alpha t})$の流れの中で$V_0(e^{\alpha t})$

の速度で振動する球には$6\pi\mu aE(V_\infty - V_0) + \frac{4\pi\rho a^3}{3}\dot{V}_0$

の力[2]が働くことも容易にわかる。任意の運動についてはフーリエ合成すればよい。

ここで導った一般解を用いると$V_\infty$が場所による場合について,物体に働く力を$V_\infty(x)$あるいは$p_\infty(x)$を用いてあらわす(Faxénの公式の拡張)こともできる。(次の機会に約).

§3 瞬間集中力による基本解[1)]

時刻 $t=\tau$ における瞬間集中力 $\mathbf{F}(\tau)\,\delta(t-\tau)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)$ に対する基本解 $\mathbf{v}_\tau(\mathbf{x},t)$, $p_\tau(\mathbf{x},t)$ は

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_\tau=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}_\tau}{\partial t}=\mu\Delta\mathbf{v}_\tau-\mathrm{grad}\,p_\tau+\mathbf{F}(\tau)\,\delta(t-\tau)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p) \tag{2}$$

から見い出される。

ラプラス変換 $f^*=\mathcal{L}[f]=\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)\,dt$ ($\tau>0$) を行えば (2.1), (2.2) で $\mathbf{v}$, $p$ のかわりに $\mathbf{v}_\tau^*$, $p_\tau^*$ $\mathbf{F}_p$ のかわりに $\mathbf{F}(\tau)e^{-\alpha\tau}$ とおったものが得られるので ただちに

$$p_\tau^*=(\mathbf{F}_\tau\cdot\nabla)\phi_p e^{-\alpha\tau} \tag{3}$$

$$\mu\mathbf{v}_\tau^*=\left[-\frac{1}{k^2}(\mathbf{F}_p\cdot\nabla)\nabla(\phi_p-\chi_p)-\mathbf{F}_p\chi_p\right]e^{-\alpha\tau} \tag{4}$$

と書ける。$k^2=\rho\alpha/\mu=\alpha/\nu$ ($\nu=\mu/\rho$ は動粘性率)。

ラプラス逆変換の公式 (Erdélyi[3)] p245, 283)

$$\mathcal{L}^{-1}[f^*(\alpha)e^{-\alpha\tau}]=f(t-\tau) \qquad t>\tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\exp(-\lambda^{\frac12}\alpha^{\frac12})]=\frac12\lambda^{\frac12}\pi^{-\frac12}t^{-\frac32}\exp\left(-\frac{\lambda}{4t}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha^{-1}\exp(-\lambda^{\frac12}\alpha^{\frac12})]=\mathrm{erfc}\left(\frac12\lambda^{\frac12}t^{-\frac12}\right), \tag{5}$$

$$\mathrm{erfc}(\xi)=1-\mathrm{erf}(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\xi^\infty e^{-\xi^2}d\xi$$

$$\mathcal{L}^{-1}[K_0(\lambda^{\frac12}\alpha^{\frac12})]=\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{\lambda}{4t}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha^{-1}K_0(\lambda^{\frac12}\alpha^{\frac12})]=\frac12 E\left(\frac{\lambda}{4t}\right),\quad E(\xi)=\int_\xi^\infty e^{-\xi}/\xi\,d\xi$$

ただし　$\alpha = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p|^2/\nu = R/\nu^2$,　$R = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p|$

を用いれば

$$P_\tau = (\boldsymbol{F}(\tau)\cdot\nabla)\phi_p\delta(t-\tau), \quad \phi_p = -\frac{1}{4\pi R}$$

$$\rho \boldsymbol{V}_\tau = \boldsymbol{F}(\tau)[4\pi\nu(t-\tau)]^{-N/2}\exp\left[-\frac{R^2}{4\nu(t-\tau)}\right]-(\boldsymbol{F}(\tau)\cdot\nabla)\nabla\Psi_\tau \tag{6}$$

を得る。ただし $N$ は次元数

$$\Psi_\tau = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi R}\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{R}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}\right), & : N=3 \\ \dfrac{1}{4\pi}\left[E\left(\dfrac{R^2}{4\nu(t-\tau)}\right)+2\log R\right] & : N=2 \end{cases} \tag{7}$$

である。

2次元の流れでは複素量 $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, $\mathcal{F} = F_x+iF_y$, $\zeta = z-z_p(\tau)$ を導入することによって複素速度 $w = v_x-iv_y$ を用いるのが便利である。(6),(7) から $2\pi\rho w_\tau$ に対して

$$2\pi\rho w_\tau = \frac{\bar{\mathcal{F}}}{\zeta^2}+\left\{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\zeta^2}+\frac{\mathcal{F}}{4\nu(t-\tau)}\left(1-\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right)\right\}\exp\left[-\frac{\zeta\bar{\zeta}}{4\nu(t-\tau)}\right] \tag{8}$$

が導かれる。

## §4　移動する非定常集中力による場

時刻 $t$ に $\boldsymbol{x}_p(t)$ にあり $\boldsymbol{F}(t)$ の強さをもつ非定常集中力 $\boldsymbol{F}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p(t))$ の生じる場は §3 で求めた $\boldsymbol{F}(\tau)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p(\tau))\delta(t-\tau)$ による場 $\boldsymbol{V}_\tau$, $P_\tau$ あるいは $w_\tau$ を物体が静止していた無限の過去から現在の時刻 $\tau=t$ まで $\tau$ について積分

すれば求まる。ただし$\mathbf{x}_p$は$\mathbf{x}_p(\tau)$であることに留意する。

すなわち

$$\rho\mathbf{v}=\int_{-\infty}^{t}\rho\mathbf{v}_\tau\,d\tau,\quad p=\int_{-\infty}^{t}p_\tau\,d\tau=(\mathbf{F}(t)\cdot\nabla)\phi_p,\quad 2\pi\rho w=\int_{-\infty}^{t}2\pi\rho w_\tau\,d\tau,$$

ただし　$\phi_p = -1/(4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p(t)|)$.　(1)

したがって圧力はその瞬間の源の位置と強さによって定まるものであり，(2.1), (2.2) に相当して

$$\Delta p = \mathbf{F}(t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p(t)) \tag{2}$$

から直接導くこともできる。

物体の速度が$x$軸の負の方向の一定値$U$ ($x_p=-Ut$)に，$\mathbf{F}$が一定値$\mathbf{F}$に漸近するばあいは原点を$\mathbf{x}_p(t)$に移し，極限をとることによって

$$\rho U\mathbf{v} = \frac{F}{4\pi r}e^{-\kappa(r-x)}+\frac{1}{4\pi}(\mathbf{F}\cdot\nabla)\nabla[\log(r-x)-E(\kappa(r-x))],\quad ;N=3$$

$$4\pi\rho Uw = -\frac{\mathcal{F}}{z}+\kappa e^{\kappa x}[\bar{\mathcal{F}}K_0(\kappa r)+\mathcal{F}K_1(\kappa r)\bar{z}/r],\quad ;N=2 \tag{3}$$

$\kappa = U/(2\nu)$

がえられる。これは$x$方向に一様な定常流$U$があるときの原点におかれた定常集中力に対するオセーンの方程式（ナビエ・ストークス方程式の慣性項を$U\partial/\partial x$でおきかえたもの）の基本解[1,4]に他ならない。このように非定常ストークス方程式がオセーンの方程式を特別なばあいとして含むことは，ガリレイ変換によって示すことも可能である。

# 文　献

1) Hasimoto, H : Theor. and Appl. Mech. (Tokyo Univ. Press) 22 (1972) 287.

2) Lamb, H : Hydrodynamics (Cambridge at the Univ. press, 6th ed. 1932),

3) Erdelyi, A. et al : Tables of Integral Transforms I. (McGraw-Hill, 1954),

4) 今井 功 : 流体力学 前編 (裳華房, 1973).