

## 非定常ストークス流中の浮遊粒子の振舞い

慶大物理 松信八十男

### § 1. はじめに

本報告では、周期的に変動する任意の速度分布をもつ流れが与えられたとき、そこに浮遊する球形粒子の挙動を詳しく評価するのが目的である。この問題は、生理流体力学の立場からいえば、血管内血流中の赤血球の挙動を知るための基本的な情報を提供するであろう。また、浮遊粒子の運動から局所的に流速を計測するとき、測定誤差の限界を与えるという意味でも重要である。

以下の解析では、流体はニュートン流動性を示し、圧縮性は無視できるものと仮定する。さらに対流効果も無視できるならば、流体運動は線形の非定常ストークス方程式によって支配される。管内流の場合、壁面効果が重要となることがあるが、ここでは、粒子は壁面から十分に離れているものとし、壁面の存在は考えないことにする。

## §2. 基礎方程式と一般解

密度  $\rho$ , 粘性率  $\mu$ , 運動粘性率  $\nu (= \mu/\rho)$  の非圧縮性ニュートン流体の運動は, 対流効果が無視できるならば, よく知られているように, 非定常ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.1)$$

および連続の方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

によって支配される。ここで,  $\mathbf{v}$  は速度ベクトル,  $p$  は圧力,  $t$  は時刻を表わす。

流れの場が周期的に変動する場合, 変数  $\mathbf{v}, p$  は時間因子  $e^{i\Omega t}$  ( $i$  は虚数単位,  $\Omega$  は実の定数で角振動数を表わす) と含むものと考える。そうすれば,  $\partial/\partial t = i\Omega$  であり, パラメータ  $\kappa$  を

$$\kappa = (-i\Omega/\nu)^{1/2}, \quad \arg \kappa = -\pi/4 \quad (2.3)$$

によって定義すれば, (2.1) と (2.2) から

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{v} = \frac{1}{\mu} \nabla p \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 p = 0 \quad (2.5)$$

と導くことができる。

方程式(2.4), (2.5) の一般解は Lamb<sup>1)</sup> が示したように, 3種類の任意の体球関数を用いて表わすことができる。ここではそれを用いた以下のよう<sub>い</sub>に書く。  $\chi_n, \phi_n, \psi_n$  を任意に与えられた  $n$  次の体球関数とし,  $n$  次の球ベッセル関数  $g_n(\kappa r)$  から導かれる  $r (= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  の関数

$$g_n(r) = r^{-n} g_n(\kappa r) \quad (2.6)$$

を用いると, 求める一般解は

$$p = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n, \quad (2.7)$$

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\kappa^2} \nabla \chi_n + \left( g_{n-1} - \frac{n}{\kappa} g_n \right) \nabla \phi_n + n g_{n+1} \phi_n r + g_n \nabla \times (r \psi_n) \right] \quad (2.8)$$

で与えられる。

球ベッセル関数  $g_n(\zeta)$  には, 第1種  $j_n(\zeta)$ , 第2種  $n_n(\zeta)$ , Hankel 型  $h_n^{(\pm)}(\zeta) = j_n(\zeta) \pm i n_n(\zeta)$  などの種類があり, (2.6) の  $g_n$  としてそのうちの任意のものを選ぶことができる。実際に与えられた速度分布に対して,  $\zeta=0$  および  $\zeta=\infty$  における条件からどの  $g_n$  を選ぶべきかは一義的に定まるはずのものがあるが, 差し当り,  $g_n$  の関数形を特定しないで一般的に話を進めよう。球ベッセル関数について付録Aを参照され

たい。

一般解 (2.8) から次節以降で必要となる諸式を導いておこう。付録の式 (A-5) から  $g_n(r)$  の漸化式

$$g_{n-1}(r) + r^2 g_{n+1}(r) = \frac{1}{\kappa} (2n+1) g_n(r) \quad (2.9)$$

が得られる。これと球調和関数の性質を利用すれば

$$r v_r = \sum_n \frac{n}{\kappa} \{ (n+1) g_n \phi_n + \frac{1}{\kappa} \chi_n \} \quad (2.10)$$

$$r \omega_r = \sum_n n(n+1) g_n \psi_n \quad (2.11)$$

が成立することが容易にわかる。ここで  $v_r$ ,  $\omega_r$  は速度  $v$  および渦度  $\omega (= \nabla \times v)$  の  $r$  成分である。この両式と (2.7) は、乱とれない速度場が与えられたとき、それを表わす  $\chi_n$ ,  $\phi_n$ ,  $\psi_n$  を決定するときに便利に使われる。

応力テンソルの各成分も (2.7) と (2.8) から計算することができる。後の解析に必要なものは、半径  $r$  の球面に作用する応力ベクトル  $f$  である。結果は

$$\begin{aligned} f = \frac{\mu}{r} \sum_n \left[ -r \chi_n + \frac{2}{\kappa^2} (n-1) \nabla \chi_n + \left\{ \left( \frac{2n(n+2)}{\kappa} - \kappa r^2 \right) g_n \right. \right. \\ \left. \left. - 2g_{n-1} \right\} \nabla \phi_n - \left\{ 2(n+2) g_{n+1} - \kappa g_n \right\} n \phi_n r \right. \\ \left. - \left\{ (n+2) g_n - \kappa g_{n-1} \right\} \nabla \times (r \psi_n) \right] \quad (2.12) \end{aligned}$$

これを半径  $r$  の球面  $S$  上で積分すれば、 $S$  に働く合力  $F$  は

$$F = \iint f dS = -\frac{4\pi}{3}\mu \left\{ r^3 \nabla \chi_1 + \nabla(r^3 \chi_2) + 2\kappa [r^3 g_1 \nabla \phi_1 + g_{-2} \nabla(r^3 \phi_{-2})] \right\} \quad (2.13)$$

と与えられる。同様にして  $S$  に働く合要素メント  $T$  は

$$T = \iint (r \times f) dS = \frac{8\pi}{3}\mu \kappa \left\{ -r^3 g_2 \nabla \psi_1 + g_{-3} \nabla(r^3 \psi_{-2}) \right\} \quad (2.14)$$

となる。積分のとき、表面調和関数の直交性が利用された。<sup>2)</sup>

### §3. 球形粒子に対する境界条件

無限に広い領域を占める乱されたい速度場が任意に与えられたとすると、それは正の次数の体球関数  $\chi_n, \phi_n, \psi_n$  を用いて一義的に表わされる。その速度場の中に球形粒子が中心が原点に一致するように置かれたとき、粒子によって乱された速度場は負の次数をもつ体球関数によって表わされるであろう。球形粒子の場合には、これら負の次数の体球関数は球面上で成り立つ境界条件を用いて、与えられた正の次数の体球関数から求めることができる。これと同じことが定常ストークス流の場合に、固体球に対しては Faxén<sup>3)</sup> により、流体球に対しては Matunobu<sup>4)</sup> によって行われている。

粒子が束縛されていない場合に興味があるので、半径  $a$  の球が原点を通る任意の軸のまわりに角速度  $\Lambda$  で回転している

ものとしよ。  $\Lambda$  は時間だけの関数で  $e^{i\Omega t}$  に比例するものとする。 そうすれば、境界条件は

$$r = a \text{ で } \quad v = \Lambda \times r \quad (3.1)$$

と書くことができる。 この条件を満たす速度場は、固定球に対する境界条件

$$r = a \text{ で } \quad v = 0 \quad (3.2)$$

を満たす速度場と、無限遠で静止する流体中で角速度  $\Lambda$  で振動回転する球によって誘起される速度場との重ね合せとして求めることができる。

条件 (3.2) を満たす速度場を決定するためには、 $(\chi_n, \phi_n)$  と  $\psi_n$  とは異なる性格の速度場に関係し、式の計算のときに互いに混ざり合うことがないこと、および  $n$  次の体球関数を  $r^{2n+1}$  で割ったものは  $-n-1$  次の体球関数であることとを考慮し、

$$\left. \begin{aligned} \chi_{-n-1} &= r^{-2n-1} (a_{11}^{(n)} \chi_n + a_{12}^{(n)} \phi_n) \\ \phi_{-n-1} &= r^{-2n-1} (a_{21}^{(n)} \chi_n + a_{22}^{(n)} \phi_n) \\ \psi_{-n-1} &= r^{-2n-1} b^{(n)} \psi_n \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

の関係と仮定しよ。 ただし、 $n \geq 1$  で、 $a_{ij}^{(n)}$ 、 $b^{(n)}$  は定数である。(2.8) を  $n \geq 0$  にしたかつて2つの無限級数に分け

て書き, それに (3.3) を入れて条件 (3.2) を適用する。そのとき,  $\nabla\chi_n, \nabla\phi_n, r\chi_n, r\phi_n, \nabla\times r\psi_n$  の係数を比べれば 5つの定数  $a_{ij}^{(n)}, b^{(n)}$  を決定することができる。このようにして求めた係数を (3.3) に入れてやれば,  $n \geq 1$  に対して

$$\chi_{-n-1} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} \left\{ -\frac{n}{n+1} \frac{g_{-n-2}(a)}{g_{-n}(a)} \chi_n + \frac{n}{n} \frac{(-1)^n}{g_{-n}(a)} \phi_n \right\} \quad (3.4a)$$

$$\phi_{-n-1} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} \left\{ \frac{2n+1}{n+1} \frac{\chi_n}{r^2 g_{-n}(a)} + \frac{g_{n-1}(a)}{g_{-n}(a)} \phi_n \right\} \quad (3.4b)$$

$$\psi_{-n-1} = -\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} \frac{g_n(a)}{g_{-n-1}(a)} \psi_n \quad (3.4c)$$

が得られる。定常ストークス流の場合と同じように, 0次と-1次の体球関数は不要であることに注意を要する。

さて, 静止流体中で角速度  $\Lambda$  で回転する球のまわりの速度場はすでに求められており (文献1) の p.642,  $\psi_{-2}$  だけで表わされる。すなわち

$$\psi_{-2} = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\Lambda \cdot r}{g_{-2}(a)} \quad (3.5)$$

である。したがって, 境界条件 (3.1) を満たす体球関数の間の関係は, (3.4) のうち,  $n=1$  に対する (3.4c) だけが

$$\psi_{-2} = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{1}{g_{-2}(a)} \{ \Lambda \cdot r - g_1(a) \psi_1 \} \quad (3.6)$$

のように変更を受けただけで, 他はすべてそのまま成立する

ことがわかる。

これらの結果を (2.13), (2.14) に入れば, 固体球に働く合力および合モーメントは, 中心が固定されている場合,

$$F = \frac{2\pi\mu a}{g_{-1}(a)} \left\{ g_{-3}(a) \nabla \chi_1 + \frac{2}{\kappa} \nabla \phi_1 \right\} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{T} = \frac{8\pi}{3} \frac{\mu \kappa a^3}{g_{-2}(a)} \left\{ \Lambda g_{-3}(a) - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \psi_1 \right\} \quad (3.8)$$

で与えられることがわかる。ここで, 恒等式 (A-11) が利用された。したがって, 与えられる速度場が与えられたとき, それを表わす最低次の体球関数  $\chi_1, \phi_1, \psi_1$  を知りさえすれば, 粒子に働く合力および合モーメントが上式から容易に計算できる。

#### §4 浮遊粒子の振舞い

これまで中心固定の球形粒子のまわりの速度場を決定した。粒子が周囲の流体以外から何の束縛も受けなければ, 粒子は流れにのって移動<sup>(回転)</sup>するのであろう。この移動速度  $u_d$  は時間因子  $e^{i\Omega t}$  をもたずである。回転<sup>角</sup>速度と前と同様  $\Lambda$  で表わせば, 境界条件は

$$r=a \quad \vec{v} = \Lambda \times \vec{r} + u_d \quad (4.1)$$



と仮定する。この条件を満たす (2.4), (2.5) の解は、方程式の線形性のために、 $\phi_3$  の解に、無限遠方で静止し、 $r=a$  で  $v = u_d$  と仮定する解を重ね合わせればよい。粒子に働く合力も同じ重ね合わせから導くことができる。

この新しい境界条件を満たす解は Stokes (1851)<sup>1)</sup> によって導かれており、周知のものである。半径  $a$  の球に働く合力と (3.7) とを重ね合わせから、境界条件 (4.1) に従う球の受ける力は

$$F = 6\pi\mu a \left[ \kappa^{-2} s(\kappa a) \nabla \chi_1 + \frac{2}{3} e^{i\kappa a} \nabla \phi_1 - \tilde{s}(\kappa a) u_d \right] \quad (4.2)$$

で表わされる。ここで

$$\left. \begin{aligned} s(\kappa a) &= 1 + i\kappa a - \frac{1}{3}(\kappa a)^2 \\ \tilde{s}(\kappa a) &= 1 + i\kappa a - \frac{1}{9}(\kappa a)^2 \end{aligned} \right\} (4.3)$$

であり、 $g_{-n}(a) = a^n z_{-n}(\kappa a)$  の  $z_{-n}$  として Hankel 型球ベッセル関数  $h_{-n}^{(-)}$  を用いた。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} g_{-1}(a) &= \kappa^{-1} e^{-i\kappa a}, & g_{-2}(a) &= -\kappa^{-2} (1 + i\kappa a) e^{-i\kappa a} \\ g_{-3}(a) &= 3\kappa^{-3} s(\kappa a) e^{-i\kappa a}, & \dots \end{aligned} \right\} (4.4)$$

粒子の浮遊速度  $u_d$  を求めるには、(4.2) の  $F$  を用いて球に対する運動方程式  $F = M \dot{u}_d$  ( $\dot{\phantom{x}}$  は時間微分) を解けばよい。  $M$  は粒子の質量である。  $M = 6\pi\rho a^3 \beta$  とおき、  $\dot{u}_d =$

$-\nu\kappa^2 u_d$  に注意すれば

$$u_d = \frac{\kappa^{-2} s(\kappa a) \nabla \chi_1 + \frac{2}{3} e^{i\kappa a} \nabla \phi_1}{\tilde{s}(\kappa a) - \beta (\kappa a)^2} \quad (4.5)$$

とくに中立浮遊の場合,  $\beta = 2/9$  とおき、

$$u_d = \kappa^{-2} \nabla \chi_1 + \frac{2}{3} \frac{e^{i\kappa a}}{s(\kappa a)} \nabla \phi_1 \quad (4.6)$$

が得られる。

一方、角速度の方は並進運動によって影響されないので、(2.8) で与えられるトルク  $\mathbb{T}$  を用いて回転に対する運動方程式  $\mathbb{T} = I \dot{\Lambda}$  ( $I$ : 慣性モーメント) を作り、 $\Lambda$  について解けばよい。  $I = 8\pi\rho a^5 \gamma$  とおき、 $\dot{\Lambda} = -\nu\kappa^2 \Lambda$  に注意すれば、

$$\Lambda = \frac{(1/3)\kappa e^{i\kappa a} \nabla \phi_1}{s(\kappa a) - \gamma(1+i\kappa a)(\kappa a)^2} \quad (4.7)$$

が得られる。

### §5 一様振動流中の球形粒子

簡単な応用例として一様振動流中に浮遊する球を考える。乱れのない速度場が  $v = U e_x$  ( $U \propto e^{i\omega t}$ ) で与えられるとき (2.8) より  $\chi_1 = \kappa^2 U x$ ,  $\phi_1 = \psi_1 = 0$  でその他の体球関数はすべて 0 である。したがって (4.5) より移動速度は

$$u_d/U = \left\{ 1 + i\kappa a - \frac{1}{3}(\kappa a)^2 \right\} e_x / \left\{ 1 + i\kappa a - \left(\frac{1}{9} + \beta\right)(\kappa a)^2 \right\} \quad (5.1)$$

のよりに求まる。この場合、明らかに  $\Lambda = 0$  となる。

移動速度の絶対値および位相角の無次元振動数  $\alpha\sqrt{\Omega/\nu}$  に対する変化は図1に示されている。中立浮遊の場合 ( $\beta = 2/9$ ),

$u_d/U = 1$  となり、粒子は流れに完全に追随する。

また、 $\Omega \rightarrow 0$  で  $u_d/U \rightarrow 1$ ,  $\Omega \rightarrow \infty$  の極限では

$$\frac{u_d}{U} \rightarrow \frac{3}{1+9\beta}$$

となる。

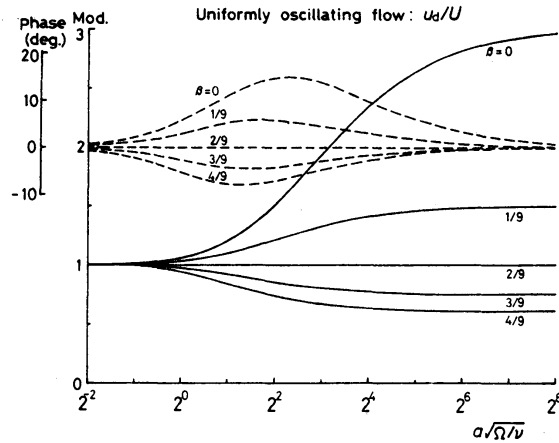


図1. 一様振動流中の球の移動速度。実線は  $u_d/U$  の絶対値 (Mod.), 破線は位相角 (Phase) を示す。

図に示された傾向は、Sano<sup>5)</sup>の計算結果と一致

している。すなわち、球の比重が流体の比重より小さい ( $\beta < 2/9$ ) ときには位相が進み、逆に大きいとき ( $\beta > 2/9$ ) には位相は遅れる。

### §6. 振動型ジェット流

第2の例として、図2のよりに、 $2h$ の間隔におかれた平行な2つの無限平板が、逆位相でおのおのの面に振動するときの流れを考えよう。板の速度を  $\pm U (\propto e^{i\Omega t})$  とする。 $\Omega = 0$  のとき、これは周知のジェット流となる。

瞬間的な粒子の中心の位置を原点とし、板に平行に  $x$  軸を、垂直に  $z$  軸をとリ、中心線的位置を  $z = z_0$  とする。この場合、実験室系からみて圧力勾配は存在せず、したがって、

$$\chi_n = 0 \quad (n \geq 1) \quad (6.1)$$

である。速度成分は  $u$  だけが 0 でなく、それは直接 (2.4) を解いて

$$u = U \frac{\sin \kappa(z - z_0)}{\sin \kappa h} \quad (6.2)$$

のよりに決定される。この解は、明らかに境界条件:  $z = \pm h + z_0$  で  $u = \pm U$  を満たしている。渦度は  $y$  成分のみが存在し、

$$\omega_y = \kappa U \frac{\cos \kappa(z - z_0)}{\sin \kappa h} \quad (6.3)$$

となる。(6.1) を考慮し、(6.2) と (2.10) と、さらに (6.3) と (2.11) と比べれば、 $\phi_1$  と  $\psi_1$  がつぎのよりに決定される:

$$\phi_1 = -\frac{3}{2} U \frac{\sin \kappa z_0}{\sin \kappa h} x, \quad \psi_1 = \frac{3}{2} U \frac{\cos \kappa z_0}{\sin \kappa h} y \quad (6.4)$$

(6.1) および (6.4) を (4.5) と (4.7) に入れば、移動速度は  $x$  軸方向にあり、回転軸は  $y$  方向と一致して、大きさはそ

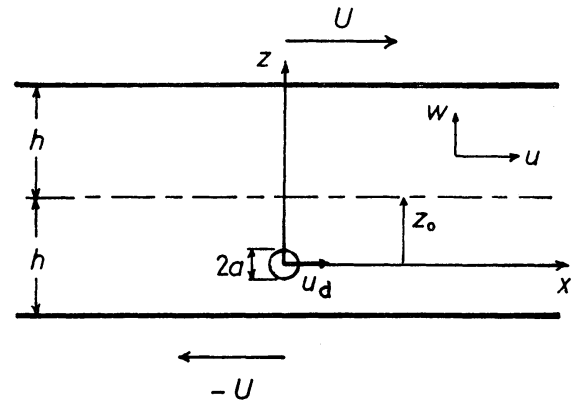


図 2. 振動型ジェット流

それぞれ

$$\frac{u_d}{-U} = \frac{e^{ika}}{1 + ika - (\frac{1}{9} + \beta)(ka)^2} \frac{\sin \kappa z_0}{\sin \kappa h} \quad (6.5)$$

$$\frac{zh}{U} \Lambda = \frac{\kappa h e^{ika}}{1 + ika - (\frac{1}{9} + \beta)(ka)^2 - i\gamma(ka)^3} \frac{\cos \kappa z_0}{\sin \kappa h} \quad (6.6)$$

で与えられることがわかる。定常の極限  $\kappa \rightarrow 0$  では上式は

$$u_d/(-U) \rightarrow z_0/h, \quad zh\Lambda/U \rightarrow 1$$

となり、定常クエット流に対する周知の事実と一致する。一方、高振動数の極限  $\kappa \rightarrow \infty$  では、両者はいずれも  $e^{-i\kappa(h-z_0-a)}$  ( $z_0 > 0$ ) に比例して、 $h - z_0 - a > 0$  のとき指数関数的に減少することがわかる。

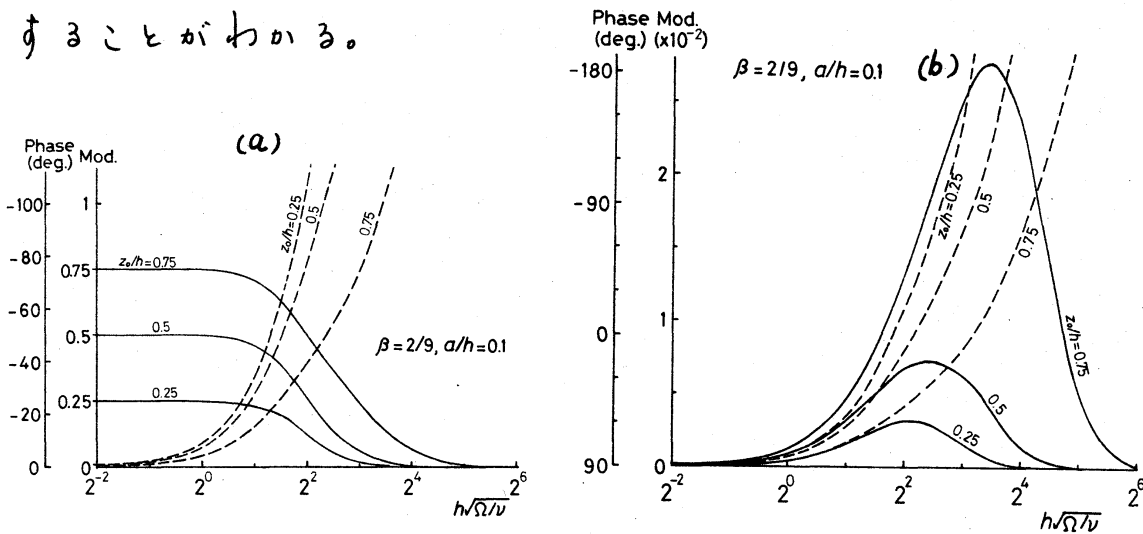


図3 振動型クエット流中での球形粒子の移動速度(a)と、与えられた速度に対する相対誤差(b). (a)の縦軸は  $u_d/(-U)$ , (b)の縦軸は  $(u_d - u)/(-U)$  の絶対値と位相角である。いずれも中立浮遊 ( $\beta = 2/9$ ) とし、 $a/h = 0.1$  と仮定した。

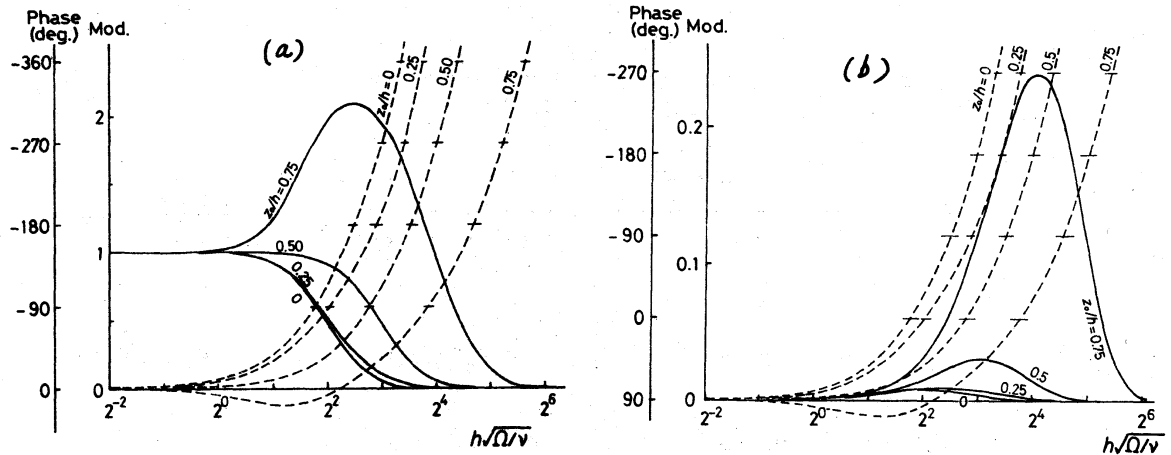


図4. 振動型ジェット流中の球形粒子の回転角速度  $2h\Omega/U$  (a) と、乱され  
ない渦度場に対する相対誤差  $(2\Omega - \omega_y)h/U$  (b). いずれも  $\gamma = 1/15$ ,  
 $a/h = 0.1$  とする。

結果は図3と図4に示す。いずれも中立浮遊 ( $\beta = 2/9, \gamma = 1/15$ ) と仮定し,  $a/h = 0.1$  ととってある。実線はその絶対値 (Mod.) と, 破線は予枚の運動に対する位相角のおくれを示す。図3b, 図4bは, 乱されない速度場に対する移動速度と角速度の相対誤差を図示したもので, 粒子の位置が壁面に近くなるとかなりの誤差が見られることがわかる。

§7. 振動型ポアズイユ流

実用的に重要なのは直円管内の流体に正弦的に変動する圧力勾配を加えたときの流れで

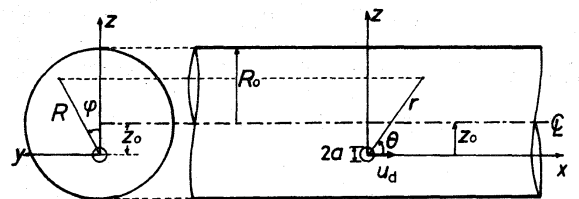


図5. 振動型ポアズイユ流

ある。定常の極限ではこの流れはポアズイユ流になるので、振動型ポアズイユ流とよぶことにする。

球の中心の瞬時的位置を原点とし、 $x$ 軸を管軸に平行に、 $z$ 軸を管軸と垂直に交わるようにとる。圧力勾配を $\mu q$  ( $q$ は時間だけの関数で $e^{i\omega t}$ に比例する) とすれば、乱れのない流れは一方向流である。速度の $x$ 成分 $u$ を支配する方程式は、(2.4) から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa^2 u = q \quad (7.1)$$

となり境界条件は

$$\sqrt{y^2 + (z - z_0)^2} = R_0 \quad \text{で} \quad u = 0 \quad (7.2)$$

と書ける。ここで $R_0$ は管の半径で、管軸の位置を示す $z$ 座標を $z_0$ ととっている。(7.2)を満足する(7.1)の解は容易に

$$u = \frac{q}{\kappa^2} \left[ 1 - \frac{J_0(\kappa \sqrt{y^2 + (z - z_0)^2})}{J_0(\kappa R_0)} \right] \quad (7.3)$$

の形に求められる。ただし、 $J_n$ は $n$ 次のベッセル関数である。これから次式を導くことができる：

$$r\omega r = y \frac{\partial u}{\partial z} - z \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{q}{\kappa} \frac{z_0 y}{J_0(\kappa R_0)} \frac{J_1(\kappa \sqrt{y^2 + (z - z_0)^2})}{\sqrt{y^2 + (z - z_0)^2}} \quad (7.4)$$

さて、今の場合、

$$\chi_1 = q x \quad (7.5)$$

となるので, (7.3) と (7.4) と (2.10), (2.11) と比べて,  $r \rightarrow 0$  と調べれば,

$$\phi_1 = -\frac{3\varrho}{2\kappa^2} \frac{J_0(\kappa z_0)}{J_0(\kappa R_0)} x, \quad \psi_1 = -\frac{3\varrho}{2\kappa^2} \frac{J_1(\kappa z_0)}{J_0(\kappa R_0)} y \quad (7.6)$$

が容易に導かれる。(7.5), (7.6) と (4.5), (4.7) に入れれば, 移動速度は管軸方向に一致し, 大きさは

$$\frac{u_d}{-gR_0^2} = \frac{1}{(\kappa R_0)^2} \left\{ \frac{J_0(\kappa z_0)}{J_0(\kappa R_0)} e^{i\kappa a} - s(\kappa a) \right\} / \{s(\kappa a) - \beta(\kappa a)^2\} \quad (7.7)$$

角速度ベクトルは  $y$  方向に一致し, 大きさは

$$\frac{2\Lambda}{-gR_0} = \frac{1}{\kappa R_0} \frac{J_1(\kappa z_0)}{J_0(\kappa R_0)} e^{i\kappa a} / \{s(\kappa a) - \gamma(1+i\kappa a)(\kappa a)^2\} \quad (7.8)$$

で与えられることがわかる。

とくに定常の極限では

$$u_d = -\frac{\varrho}{4} \{(R_0^2 - z_0^2) - \frac{2}{3}a^2\}, \quad \Lambda = -\frac{\varrho}{4} z_0 \quad (7.9)$$

高振動数の極限では

$$u_d \sim \frac{3\varrho}{(1+9\beta)\kappa^2}, \quad \Lambda \sim -\frac{\varrho a \sqrt{R_0/z_0}}{2\gamma(\kappa a)^4} e^{-i\kappa(R_0-z_0-a)} \quad (7.10)$$

( $z_0 > 0$ )

となる。

これらの数値的評価は図6, 図7に示されている。いずれも, 無次元振動数  $R_0\sqrt{\Omega/\nu}$  と横軸とし, 中立浮遊 ( $\beta=2/9$ ,



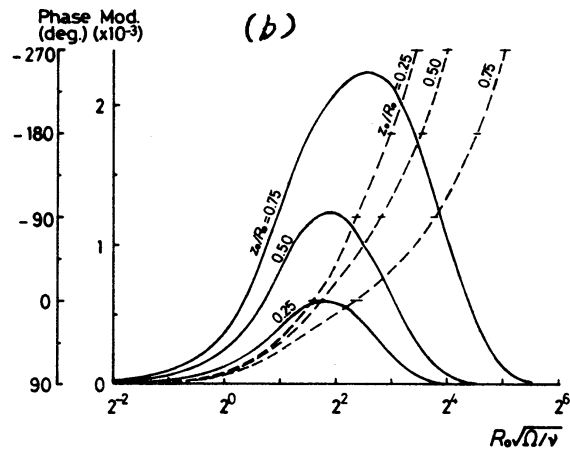
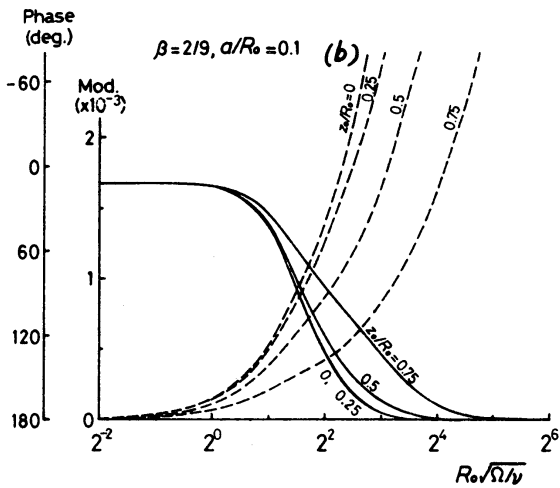
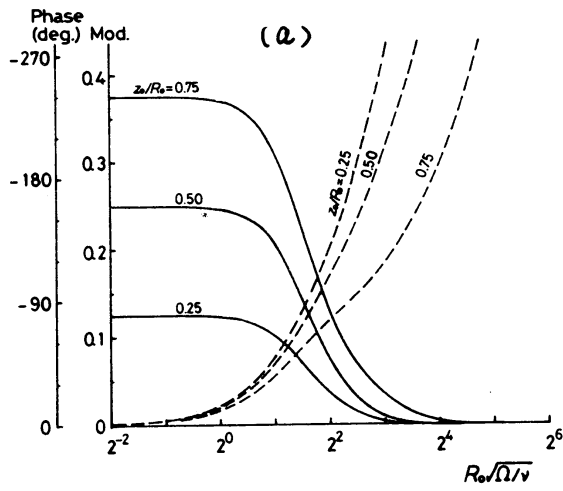
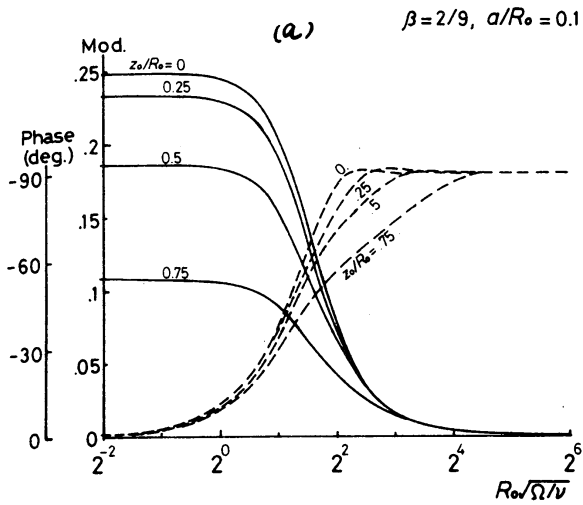


図6. 振動型ポアズエ流の球の移動速度.  
(a)  $u_d/(-\varrho R_0^2)$  の絶対値と位相角,  
(b) その相対誤差  $(u_d - u)/(-\varrho R_0^2)$

図7. 振動型ポアズエ流の球の角速度.  
(a)  $\omega/(-\varrho R_0)$  の絶対値と位相角.  
(b) その相対誤差  $(\omega - \omega_y)/(-\varrho R_0)$

$\delta = 1/15$ ) および  $a_0/R_0 = 0.1$  と仮定してゐる。振動型クエット流に比べて、移動速度および回転角速度の相対誤差は1桁ほど小さいことがわかる。

58 おすい

振動型の非定常ストークス流に浮遊する球形粒子の振舞いについて解析を試みた。乱さねない速度場が任意に与えられたとき、球形粒子に働く合力（抗力 + 揚力）および合モーメントは比較的簡単な式 (3.7) と (3.8) でそれぞれ与えられることを知った。粒子が流体だけから力を受け、そのほかに何の拘束もなければ、粒子に対する運動方程式から粒子の移動速度および回転角速度が (4.5) および (4.7) のように表わされる。したがって、流体を境する壁面から粒子が十分に離れていれば、球の存在しないときの乱さねない速度場を表わす体球関数のうち、1次のもので  $(\chi_1, \phi_1, \psi_1)$  を求めさえすれば、移動速度と回転角速度は容易に決定できることになる。例として、一様振動流および振動型ジェット流とポアズイユ流に対して浮遊粒子の振舞いを調べた。

しかし、一様振動流を除けば、粒子の表面以外に壁面上での境界条件も正しく考慮されなければならない。ここでは、粒子が壁面から十分離れているとしてその条件を無視した。粒子が壁面に接近したために生ずる誤差については、別の報告に譲りたい。

この研究に関し、佐野理氏（東大理）から重要な点を指摘された。ここに同氏に対して謝意を表す。また、本研究は文部省科学研究費の支持によるものである。

## 文 献

- 1) H. Lamb: *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge Univ. Press 1932, pp632.
- 2) J. Happel and H. Brenner: *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall 1965, pp66.
- 3) H. Faxén: *Ann. Phys.* 68 (1922) 89.
- 4) Y. Matunobu: *J. Phys. Soc. Jpn* 29 (1970) 508.
- 5) O. Sano: Master thesis (1974) Tokyo Univ.

### 付録A 球ベッセル関数

#### 2階の線型常微分方程式

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{dw}{d\zeta} + \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{\zeta^2} \right] w = 0 \quad (A-1)$$

の解の基本系は、つぎの4つの関数のうちの任意の2つで与えられる:

$$\left. \begin{aligned} j_n(\zeta) &= \sqrt{\pi/2\zeta} J_{n+\frac{1}{2}}(\zeta) \\ n_n(\zeta) &= \sqrt{\pi/2\zeta} N_{n+\frac{1}{2}}(\zeta) \\ h_n^{(+)}(\zeta) &= j_n(\zeta) + i n_n(\zeta) \\ h_n^{(-)}(\zeta) &= j_n(\zeta) - i n_n(\zeta) \end{aligned} \right\} (A-2)$$

$J, N$  は通常のベッセル関数であって、これらと総称して球ベ

ツェル関数とよぶ。(A-2) の  $n$  の代わりに  $-n-1$  とおいたものも (A-1) の解であり

$$\begin{aligned} j_{-n-1}(\zeta) &= (-1)^{n+1} j_n(\zeta) \\ h_{-n-1}^{(\pm)}(\zeta) &= \pm (-1)^n i h_n^{(\pm)}(\zeta) \quad (\pm \text{同順}) \end{aligned} \quad \text{(A-3)}$$

の関係がある。

(A-2) の 4 種の球ベツセル関数を代表して  $y_n(\zeta)$  と書くことにする。これは初等関数を用いて有限項の和の形に表わすことができる。たとえば,

$$\begin{aligned} h_n^{(-)}(\zeta) &= (-1)^n i \zeta^n \left( \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \right)^n \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} \\ &= i^{n+1} \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m! (n-m)!} \left( \frac{-i}{2\zeta} \right)^m \end{aligned} \quad \text{(A-4)}$$

$y_n(\zeta)$  はつぎの共通の漸化式を満足する:

$$y_{n-1}(\zeta) + y_{n+1}(\zeta) = \frac{2n+1}{\zeta} y_n(\zeta) \quad \text{(A-5)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} y_n(\zeta) &= \frac{1}{2n+1} [n y_{n-1}(\zeta) - (n+1) y_{n+1}(\zeta)] \\ &= \frac{n}{\zeta} y_n(\zeta) - y_{n+1}(\zeta) = y_{n-1}(\zeta) - \frac{n+1}{\zeta} y_n(\zeta) \end{aligned} \quad \text{(A-6)}$$

$$\frac{d}{d\zeta} (\zeta^{n+1} y_n(\zeta)) = \zeta^{n+1} y_{n-1}(\zeta) \quad \text{(A-7)}$$

$$\frac{d}{d\zeta} (\zeta^{-n} y_n(\zeta)) = -\zeta^{-n} y_{n+1}(\zeta)$$

$\zeta \rightarrow 0$  のとき,

$$\begin{aligned} j_n(\zeta) &\sim \zeta^n / (2n+1)!! \quad , \quad n_n(\zeta) \sim -(2n-1)!! / \zeta^{n+1} \\ h_n^{(\pm)}(\zeta) &\sim \mp i (2n-1)!! / \zeta^{n+1} \end{aligned} \quad \text{(A-8)}$$

一方,  $s \rightarrow \infty$  のとき

$$\left. \begin{aligned} j_n(s) &\sim \frac{1}{s} \sin\left(s - \frac{n\pi}{2}\right), & n_n(s) &\sim -\frac{1}{s} \cos\left(s - \frac{n\pi}{2}\right) \\ h_n^{(\pm)}(s) &\sim (\mp i)^{n+1} \frac{1}{s} e^{\pm is} \end{aligned} \right\} (A-9)$$

となる。したがって  $n \geq 0$  のとき,  $s = 0$  に有限であるものは  $j_n(s)$  に限られる。一方,  $s \rightarrow \infty$  に指数関数的に減衰するものは,  $\text{Im } s \geq 0$  に応じて  $h_n^{(+)}(s)$ ,  $h_n^{(-)}(s)$  となる。

(2.3) では  $\arg \kappa < 0$  と決めたので (2.6) は

$$n \geq 0 \text{ に対しては } g_n(r) = r^{-n} j_n(\kappa r)$$

$$n < 0 \text{ に対しては } g_n(r) = r^{-n} h_n^{(+)}(\kappa r)$$

としなければならない。(A-1) の Wronskian から導かれる恒等式

$$j_n(s) n_{n-1}(s) - j_{n-1}(s) n_n(s) = 1/s^2 \quad (A-10)$$

$$j_n(s) h_{-n}^{(\pm)}(s) + j_{n-1}(s) h_{-n-1}^{(\pm)}(s) = (-1)^n / s^2 \quad (A-11)$$

も重要である。(A-11) と  $g_n$  を用いて書けば

$$r^2 g_n(r) g_{-n}(r) + g_{n-1}(r) g_{-n-1}(r) = (-1)^n / \kappa^2 \quad (A-12)$$

となる。