数理解析研究所講究録
第393巻 1980年 198-211

流体力学的ゆらぎと非線形Brown運動

名大・工　金田 行雄

§1. 序

(1－1)　抵抗係数の対称性

小さな粒子が遅い速度 U_i で静止流体中を動くとき

$$F_i = -\zeta_{ij} U_j \tag{1}$$

の抵抗を受ける。ここで抵抗係数 ζ_{ij} は一般に対称性

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ji} \tag{2}$$

を満たす。対称性(2)は純粋に流体力学的に示される。[1] 一方 Landau と Lifshitz (ref. 2, chap. 2) は (2) を線形不可逆過程の一般論からの帰結として、流体力学の式を用いずに導いている。すなわち、同じ結論(2)を導くのに流体力学的と統計力学的という一見全く違った二つの方法がある。

（1－2） 巨視的法則の階層性

ここでは Brown粒子の運動を Landau と Lifshitz[3] による流体力学的ゆらぎの理論（以下 L-L eqs. と略記）を基に調べる。拡散現象を例にとると L-L eqs. は巨視的法則系の中で概略次のように位置づけられる。

$$
\begin{tikzcd}
\text{Molecular Dynamics} \arrow[ddd, "Ⓐ"'] \arrow[dd, "Ⓑ"] \arrow[d, "Ⓒ"] & & \text{;Liouville eq.} \\
 & \text{Fluctuating Hydrodynamics} \arrow[dl, "Ⓓ"] & \text{;L-L eqs.} \\
\text{Brownian Motion} \arrow[d, "Ⓔ"] & & \text{;Langevin eq.} \\
\text{Diffusion} & & \text{;Fick's Law}
\end{tikzcd}
$$

線形理論の範囲内では上図の各 Step Ⓐ～Ⓔ について多くのすぐれた研究がある。非線形領域への拡張については，非線形性の効果が step Ⓒ～Ⓔ の各段階で異なることに注意する必要がある。

（1－3） Landau-Lifshitz eqs.

非圧縮性流体に対する L-L eqs. は（以下温度は一様一定とする）

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\tau_{ij} + s_{ij}\right] \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \qquad (4)$$

で与えられる。（エネルギーの式は省く）。ここで

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij}, \quad e_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2, \qquad (5)$$

S_{ij} はランダムなストレス場で $\langle S_{ij} \rangle = 0$,

$$\langle S_{ij}(\mathbf{r}, t) S_{lm}(\mathbf{r}', t') \rangle = 2kT\mu (\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{lm}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'), \quad (6)$$

を満たす。 (3)を線形化した，すなわち慣性項を無視した式に基づいて，Brown 粒子に対する揺動散逸定理や線形 Langevin eq. が導かれる(step Ⓓ に対応)ことが知られている。

(1－4) 非線形性・特異摂動法

さて，(3)の慣性項が無視できないとすれば，それは step Ⓓ を通じてどのような(非線形) Langevin eq. を導くであろうか？ 我々はこれを§4で考える。 Langevin eq. の変更は当然拡散法則にも影響する。

ところで，通常の流体力学において Stokes の paradox として知られているように，非線形性の効果の評価には近似の空間的非一様性に起因して，特異摂動法が必要である。§4 でみるように，それは step Ⓓ でも必要である。 線形理論における step Ⓑ と step Ⓒ + step Ⓓ の対応を考慮すれば，このことは従来 regular な展開が仮定されていた統計力学的な step Ⓑ においても特異摂動法の必要なことを示唆する。

同様なことは Whitehead の paradox に対応して二次元物体の場合にも起きる。 この場合 (1)，(2) は成立せず，

それらに対応する関係の有無さえも step Ⓑ の方法では調べるのが困難なことから，流体力学的にこれを調べるのは興味がある。

§2. 二次元物体の抵抗則と相反性

今 (v_i', τ_{ij}')，(v_i'', τ_{ij}'') を各々，定常 Stokes eq. を満たす任意の速度およびストレス場，S を任意の閉曲面とすると

$$\int_S v_i' \tau_{ij}'' dS_j = \int_S v_i'' \tau_{ij}' dS_j \qquad (7)$$

が成り立つ。[1] 三次元物体の場合 (7) から容易に [A]; 対称性 (2)，および [B]; ζ_{ij} の正値性，が示される。 [B] は熱力学第二法則に対応し，力学的には [①] "抵抗 $F(\boldsymbol{U})$ と $\boldsymbol{U}$ が鈍角をなす" ことを意味する。[1] 一方 [A] は ζ_{ij} が対角化可能であることを意味し，これからたとえば [②] "ある $\boldsymbol{U}_1$ に対して $F(\boldsymbol{U}_1) \parallel \boldsymbol{U}_1$ なら $\boldsymbol{U}_1 \perp \boldsymbol{U}_2$ なる $\boldsymbol{U}_2$ に対しても $F(\boldsymbol{U}_2) \parallel \boldsymbol{U}_2$ である" ことが導かれる。 さて，では二次元物体の抵抗則についてはどのようなことが言えるであろうか？ ここでは，これを考えてみよう。

二次元流の場合，全領域での Stokes eq. の正当性はないが，任意の静止物体を過ぎる定常流について，Stokes region では $W = u - iv$，$z = x_1 + i x_2$ $(\boldsymbol{r} = (x_1, x_2), (u, v) = (v_1, v_2))$

とすると一般に適当な複素定数 $C \equiv C_1 + iC_2$, $h \equiv h_1 - ih_2$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} W &= \bar{C}\log(z\bar{z}) - C\bar{z}/z + h + M(z) \\ M(z) &\to O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{as} \quad r \to \infty \\ W &= 0 \quad \text{on} \quad S_B \text{（物体の表面）} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

と書ける。[4,5] 今 $S = S_B + S_0$ として S_0 を Stokes region 内で充分物体から離れてとり，(7) を適用すると，(8) を満たす任意の二つの流れ W' と W'' に対して

$$Re\,(h'C'' - h''C') = 0 \qquad (9)$$

が導かれる。 一般に h と C は線形関係にあるから，今 $h_i = A_{ij}C_j$ とおくと，(9) は任意の C', C'' に対して $C_i'C_j''(A_{ij} - A_{ji}) = 0$ を与える。 このことから対称性

$$A_{ij} = A_{ji} \qquad (10)$$

が導かれる。

$\varepsilon \equiv (\log Re)^{-1}$, $Re \equiv Ua/\nu$, a を物体の特性長さ，F を物体に働く力として，$\frac{F}{4\pi\mu U}$ の $O(\varepsilon^2)$までを求めるには Oseen region の解との Matching を行なえば良い。 その条件から

$$h = Ue^{-i\alpha} - Ce^{-2i\alpha} - 2\Gamma\bar{C} \qquad (11)$$

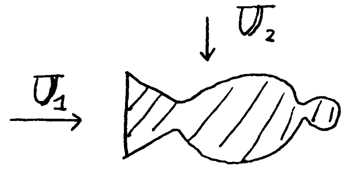
が導かれる。[4,5] ここで $\Gamma \equiv \log(4/Re) - \gamma$, γ はEulerの定数, $U e^{i\alpha} = U_1 + iU_2$ は無限遠での流速 $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)$ を表わし, $\mathbb{F} = (F_1, F_2)$ は $F_1 + iF_2 = 8\pi\mu C$ で与えられる。[5]

A_{ij} は物体の形から決まるが, (10) から一般にそれは対角化でき, その主軸は互いに直交していることが分る。今, 適当な座標系をとって $A_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_1, & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$ とすると (11) から

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 8\pi\mu \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 8\pi\mu U B^{-1} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad (12)$$

ただし, $$B = B(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \delta_1 + 2\Gamma + \cos 2\alpha, & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha, & \delta_2 + 2\Gamma - \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

を得る。 (11) あるいは (12) から上述の[(ロ)]が二次元の場合にも $O(\varepsilon^2)$ で成り立つことが分る。 たとえば下図のような上下対称物体の場合に, 水平方向の U_1 に対して揚力がないことは自明であることから, 鉛直方向の U_2 に対しても揚力がないことが分る。



また, [(イ)]が成り立つことも容易に分る。 なお, 二次元物体の抵抗の $O(\varepsilon^2)$ までの一般公式が等角写像の方法を用いて, 成瀬教授[6]によって与えられている。 それ故, 上述のことはその公式からも導かれるはずであるが, ここでは相反性 (7) の結果として導いた。 (7) は

三次元の場合の対称性(2)を導く基となり，また Stokes eq. の自己随伴性とそのグリーン関数の相反性と関連しており，(2)は統計力学的には微視的法則の時間反転対称性と関連している[7]ことを注意しておきたい。

$\mathbb{F}$ の高次近似を求めるには，$\tilde{z}=\tilde{x}+i\tilde{y}\equiv e^{-i\alpha}z/(aRe)$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{v}/U$ として Oseen region における

$$\left(\tilde{\nabla}^2-\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\right)\boldsymbol{g}_n=\tilde{\nabla}p_n+\sum_{i=1}^{n-1}(\boldsymbol{g}_i\cdot\tilde{\nabla})\boldsymbol{g}_{n-i}\quad,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{g}_n=0 \tag{13}$$

を解けば良い。[ ] 今 $n=2$，$\boldsymbol{g}_1$ を原点の集中力 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)$，$f_1+if_2=4\pi\mu U(d+il)e^{i\alpha}$ による Oseen 源[8]として $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{h}$ （$\boldsymbol{k}$ は原点で連続な特解），$\boldsymbol{k}(0,0)=(k_1,k_2)$ とおくと計算の結果

$$(k_1+ik_2)e^{-i\alpha}=(\underline{-0.87}\,d^2+0.04\,l^2)+i(-0.87+1.60)dl \tag{14}$$

となる。ここで右辺の最初の数値 $\underline{-0.87}$ は Kaplun[5] の得た値と一致する。$C=C^0+C^1+\cdots$，C^0 として(12)で与えられる C，また $C^1\equiv C_1^1+iC_2^1$，$-U(d+il)\equiv e^{-i\alpha}\cdot 2C^0$，$C_i^1\equiv U(B^{-1})_{ij}k_j$，$k_j$ は(14)で与えられる，とすると抗力 D，揚力 L は $(D+iL)/(8\pi\mu)=Ce^{-i\alpha}$ によって各々 $O(\varepsilon^3)$, $O(\varepsilon^4)$ まで正しく与えられる。（$O(\varepsilon^3)$ までについては ref.[6] 参照）

§3. 流体中のゆらぎとStokeslet

グリーン関数 $\hat{G}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ を

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_r\right) G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + \frac{1}{\rho} P_{k,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t)\delta_{ik} \\ \frac{\partial}{\partial r_i} G_{ik} = 0, \qquad G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0 \quad \text{for } t<0, \\ G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0 \quad \text{for } \mathbf{r}\in S_B, \quad G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \to 0 \quad \text{as } r\to\infty, \end{cases}$$

を満たす $G_{ik}(t)$ の Fourier 変換 $(\hat{\varphi}(\omega) = \int e^{i\omega t}\varphi(t)\,dt)$ とすると, 線形化された(慣性項を無視した)(3)に基づいて(S_B上で $v=0$として)

$$\lim_{\epsilon\to+0} \int_0^\infty \langle v_i(\mathbf{r}, t)\, v_j(\mathbf{r}', 0)\rangle e^{-\epsilon t}\, dt = \hat{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) \cdot kT/\rho \qquad (15)$$

となることが, 若干の計算ののち示される。 $\hat{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0)$ は一般に

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) = I_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \qquad (16)$$

の形に書ける。 ここで I_{ij} は良く知られた無限流体中の Stokeslet, R_{ij} は境界 S_B の存在による "reflection" である。 (15) から種々の静止境界 S_B のもとでの速度のゆらぎの相関の強さが評価できる。

§4. L-L eqs. と非線形 Brown 運動

静止非圧縮流体中を速度 $\mathbf{U}$ で運動している Brown 粒子を考える。 簡単のため, ここでは粒子の回転速度は充分

小さく無視できる場合を考える（この節の最終段落参照）。

まず，適当な座標変換で粒子が静止した系に移り，そこでの流速 v'，圧力 p' を $v' = \bar{V} + v$，$p' = \bar{P} + p$ とする。ここで（$\bar{V}$, $\bar{P}$）は N-S eqs. と非圧縮条件

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{V} + (\bar{V}\cdot\nabla)\bar{V} - \nu\Delta\bar{V} + \frac{1}{\rho}\nabla\bar{P} = 0, \quad \mathrm{div}\,\bar{V} = 0 \qquad (17)$$

および境界条件； $\bar{V} = 0$ on S_B, $\bar{V} \to -U$ as $r \to \infty$

を満たす場である。以下 $\rho = 1$ とすると，N-S eqs. は上で定義した（v, p）に対して，

$$\frac{\partial}{\partial t}v_i + (\bar{V}\cdot\nabla)v_i + (v\cdot\nabla)\bar{V}_i - \nu\Delta v_i + p_{,i} = S_{ij,j} - (v_i v_j)_{,j} \qquad (18)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0$$

を与え，v は S_B 上で $v = 0$ を満たす。以下 U の，したがってまた $\bar{V}$ の時間依存性は v のそれに比べ小さいとして無視する。

粒子に働く力 F は（$\bar{V}$, $\bar{P}$），（v, p, S_{ij}）によるそれを各々 $\bar{F}$, f とすれば，$F = \bar{F} + f$ となる。(18) から明らかなように，f は $\bar{V}$ に，すなわち U に依存する。以下 U を与えられたとしての条件つき平均を〈 〉で表わし，S_{ij} の性質 $\langle S_{ij} \rangle = 0$ と (6) は U に独立，すなわちそれらはここでの平均の意味でも成り立つとする。$\bar{F}$ は（$\bar{V}$, $\bar{P}$）

を解けば求まり，f の相関 $\langle f(t)\, f(t')\rangle$ も原理的には (v, p) を解き，$\langle v\ v\rangle$ 等を知ることによって求まる。

今，粒子の質量を M，特性長さを a とすると，外力がないとしても $\bar{v} \propto \sqrt{kT/M}$，$R_e \equiv \bar{v}a/\nu \propto \sqrt{kT}$ であり，$\langle v\ v\rangle \propto kT$ (115) 参照）である。 また S_{ij} の三重相関 $\langle S\cdot S\cdot S\rangle = 0$ とすると少くとも (18) の Regular な展開が仮定される Stokes region で $\langle v\cdot v\cdot v\rangle \propto (kT)^2$ である。 これらのことから，以下の R_e の低次の議論（詳しくは (27) の $O(R_e^{2})$ まで）では (18) の右辺最後の項は無視できるとする。 そうすれば，(18) は時間に関する ϕ の Fourier 変換を $\hat{\phi}$ と書くと $\left(\hat{\phi}(\omega) = \int e^{i\omega t}\phi(t)\,dt\right)$

$$-i\omega\,\hat{v}_i + \bar{v}_j\,\hat{v}_{i,j} + \hat{v}_j\bar{v}_{i,j} - \nu\Delta\hat{v}_i + \hat{p}_{,i} = \hat{S}_{ij,j} \qquad (19)$$

を与える。

さて，(19) の $(\hat{v}, \hat{p})$ の '随伴場" (u^m, p^m) を

$$\begin{cases} -i\omega\, u_i^m - (\bar{v}_j u_i^m)_{,j} + u_j^m\,\bar{v}_{j,i} - \nu\Delta u_i^m + p^m_{,i} = 0 & (20) \\ \operatorname{div} u^m = 0 & (21) \\ u_i^m = \delta_{im} \text{ on } S_B, \quad u_i^m \to 0 \text{ as } r \to 0 & (22) \end{cases}$$

で定義する。 $\langle \{u_i^m \times (19) - \hat{v}_i \times (20)\} \times \hat{S}_{pq}(r')\rangle$ を作り Gauss の定理を用いると

$$\langle [(u_i^m \overline{V}_j \hat{v}_i - u_i^m (\hat{\tau}_{ij} + \hat{s}_{ij}) + \hat{v}_i \tau_{ij}^m) n_j]_{S_B+S_L} \cdot \hat{s}_{pq}(r') \rangle$$
$$= \langle -(u_{\alpha,\beta}^m \hat{s}_{\alpha\beta})_{V_L} \cdot \hat{s}_{pq}(r') \rangle \qquad (23)$$

が得られる。ここで $\hat{\tau}_{ij}$, τ_{ij}^m は(5)と同様に定義され，$(\ \ )_{V_L}$ は物体表面 S_B と物体内に中心をもつ半径 L の球面 S_L で囲まれた領域 V_L 内の積分，$[\ \ ]_{S_B+S_L}$ は S_B+S_L 上の積分，n_i は S_B+S_L 上の V_L に対する外向き単位法線ベクトルである。$L\to\infty$ で(23)の S_L 上からの寄与は無視できるとすれば，S_B 上で $\overline{V}=\hat{v}=0$ に注意して(22)，(23)(6)から

$$-\langle \hat{f}_m(\omega)\hat{s}_{pq}(\omega', r') \rangle = \langle [(\hat{\tau}_{mj}(\omega) + \hat{s}_{mj}(\omega)) n_j]_B \cdot \hat{s}_{pq}(\omega', r') \rangle$$
$$= 4\pi\mu kT\delta(\omega+\omega')(u_{p,q}^m(r,\omega') + u_{q,p}^m(r,\omega')) \equiv 8\pi\mu kT\delta(\omega+\omega') e_{pq}^m(r,\omega') \qquad (24)$$

が得られる。(23)あるいは(24)は一種の相反関係である。

相反関係については，とくに Stokes eqs.（あるいは Oseen's eqs.）を満たす"随伴場"を用いてのそれが通常の遅い流れ（たとえば[1]，[9]，[10]参照）や線形化された(3)を扱う際などに有用であることが良く知られている。

さて，$V^m(r,\omega')\delta(\omega+\omega') \equiv \langle \hat{f}_m(\omega)\hat{v}(r,\omega') \rangle / 8\pi\mu kT$，$P^m(r,\omega')\delta(\omega+\omega') \equiv \langle \hat{f}_m(\omega)\hat{p}(r,\omega') \rangle / 8\pi\mu kT$ とすれば(19)，(24)から

$$-i\omega V_i^m + \overline{V}_j V_{i,j}^m + V_j^m \overline{V}_{i,j} - \nu\Delta V_i^m + P_{,i}^m = -e_{ij,j}^m \qquad (25)$$

となる。 相関 $\langle \hat{f}_m(\omega)\hat{f}_k(\omega')\rangle$ は

$$\langle \hat{f}_m(\omega)\hat{f}_k(\omega')\rangle = -\langle \hat{f}_m(\omega)[(\hat{\tau}_{kj}(\omega')+\hat{s}_{kj}(\omega'))n_j]_{S_B}\rangle$$

$$= -\delta(\omega+\omega')\,8\pi\mu kT\cdot[(T^m_{kj}(\omega')-e^m_{kj}(\omega'))n_j]_{S_B}, \qquad (26)$$

(ここで, T^m_{kj} は (5) 同様に定義される (V^m, P^m) によるストレステンソル) で表わされる。 このように相関 $\langle f_m \cdot f_k\rangle$ は (20), (25) を満たす場 (u^m, p^m), (V^m, P^m) を解くことによって求まる。

$\omega=0$ の場合, それらは良く知られた定常の遅い流れに対する[10,11] のと似た方法で解ける。 それには明らかに特異摂動法が必要である。 また, (24) を導くのに用いた $L\to\infty$ での $[\ ]_{S_L}$ に対する仮定も外部領域の解を用いて, 少くとも摂動展開の低次($\genfrac{}{}{0pt}{}{(27)\text{における}}{O(Re)\text{までに対応}}$)の各段階で具体的に確認できる。

とくに, 粒子が半径 a の球の場合 $O(Re^1)$ までで $(Re=\frac{Ua}{\nu})$

$$\frac{1}{2}\langle \hat{f}_m(\omega)\hat{f}_k(0)+\hat{f}_k(\omega)\hat{f}_m(0)\rangle = 4\pi kT\delta(\omega)\cdot 6\pi a\mu\left(\delta_{mk}+\frac{3Re}{16}\left(3\delta_{mk}-\frac{U_mU_k}{U^2}\right)\right), \quad (27)$$

となることが導かれる。 したがって, この場合 Langevin eq.

$$M\frac{d}{dt}U_i = -\zeta_{ij}U_j + f_i \qquad (28.a)$$

において, $\zeta_{ij} = 6\pi a\mu\left(1+\frac{3}{8}Re\right)\delta_{ij} \qquad (28.b)$

$$\frac{1}{2kT}\lim_{\epsilon\to+0}\int_0^\infty dt\,\langle f_i(t)f_j(0)+f_j(t)f_i(0)\rangle e^{-\epsilon t}=6\pi a\mu\left(\delta_{ij}+\frac{3Re}{16}\left(3\delta_{ij}-\frac{v_iv_j}{v^2}\right)\right), \tag{28.C}$$

の関係がある。 (28)において $O(Re^1)$ の項を無視すれば，それは良く知られた線形の揺動散逸関係に帰着する。(28)はそれの非線形領域への拡張になっている。

上では粒子の回転速度が充分小さいとしたが，一般に粒子の回転があると問題は複雑になる。ただし，球形粒子の場合には，問題は比較的容易である。その場合の，回転の影響や粒子に働くトルク等についての議論は他の機会に譲りたい。

§5. まとめ

我々§2.で相反性(7)を用いて二次元物体の抵抗則について調べ，三次元の場合の対称性(2)のかわりに対称性(10)が成り立つこと，またそれから広い意味の直交性とでもいうべき性質[(ロ)]が導かれることを示した。§3では，任意の幾何学的境界下での流体中の速度のゆらぎの相関が良く知られた Stokeslet と密接な関連があることを示した。また§4では L-L eqs. に基づいて Brown 粒子の非線形 Langevin eq. における揺動散逸関係について調べた。

おおまかに言えば，従来の線形応答理論は，Brown 運動

を調べる場合，流体力学における3次元物体に対するStokes近似に対応していると思われる。統計力学の分野における，近似の空間的非一様性を考慮に入れた特異摂動法の適用・構成は興味あるテーマであろう。

References.

[1] J. Happel and H. Brenner; Low Reynolds Number Hydrodynamics (Prentice-Hall, London, 1965).

[2] L. Landau and E. M. Lifshitz; Fluid Mechanics (Pergamon Press, New York, 1959).

[3] L. Landau and E. M. Lifshitz; Soviet Physics JETP 5(1957)512.

[4] S. Kaplun; J. of Mathematics and Mechanics 6,No5(1957)595.

[5] I. Imai; The Second International JSME Symposium(Sept.1972) Fluid Machinery and Fluidics(1972)2,15.

[6] 成瀬文雄；数理解析研究所講究録 234 (1975) 4.

[7] L. Landau and E. M. Lifshitz; Statistical Physics (Pergamon Press, New York, 1958).

[8] 今井功；流体力学(裳華房) 1973.

[9] C. W. Oseen; Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik(Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927).

[10] H. Brenner and R. G. Cox; J. Fluid Mech. 17(1963)561.

[11] W. Chester and D. R. Breach; J. Fluid Mech. 37(1969)751.