数理解析研究所講究録
第 394 巻 1980 年 180-187

有限古典群の既約指標の持ち上げについて

阪大・理　川中宣明

本稿は，六甲群論シンポジウム（1980）報告集に書いたもの（以下［六甲］と略記）の続きで，そこの定理の証明を中心に述べる．記号はすべて［六甲］の通りとする．特に，χ を G（＝標数 $p>0$ の閉体上の古典群の $\mathbb{F}_{q^m}$－有理点のなす有限群）の σ で固定される既約指標，$\tilde{\chi}$ を χ の AG（＝位数 m の巡回群 $A=\langle\sigma\rangle$ と G との半直積群）の既約指標への拡張としたとき，G_σ（＝$\{G$ の σ-fixed point$\}$）上の類関数 ψ_χ を

$$\psi_\chi(C)=\tilde{\chi}(m(C)) \qquad (C \text{は} G_\sigma \text{の共役類})$$

で定義する（m の定義は，［六甲］を参照）．

$(p,m)=(2,m)=1$ なる条件のもとで，ψ_χ が G_σ の既約指標（定数倍を除いて）となることを示したい．

証明には，［2］と同様，Brauer の characterization of characters を用いる．即ち，次のことを示せば良い：

(I) G の任意の σ-fixed irreducible character χ と, G_σ の任意の elementary subgroup E に対して, $\psi_\chi|_E$ が E の irreducible characters の $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$-linear combination として書ける.

このためには, 次のことを言えば十分:

(II) G_σ の任意の elementary subgroup E に対して, G の次のような部分群 H がとれる:

(i) H は σ-stable.

(ii) $E \subset H_\sigma$

(iii) H_σ の既約指標は, H の既約指標に"持ち上げ"ることができる. 詳しく言えば, H の σ-fixed irreducible character ν に対して, 半直積群 AH の既約指標への拡張 $\tilde{\nu}$ を作り, H_σ 上の類関数 ϕ_ν を

$$\phi_\nu(D) = \tilde{\nu}(m_H(D)) \quad (D \text{ は } H_\sigma \text{ の共役類})$$

で定義すると, ϕ_ν は定数($\in \mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$)倍を除き H_σ の既約指標となる. ここに m_H は, $\{H_\sigma$ の共役類$\}$ から $\{\sigma H$ の AH-共役類$\}$ への bijective な対応で, 任意の $h \in H$ に対して,

$\mathfrak{m}_H^{-1}$(σhのAH-共役類)$\subset \mathfrak{m}^{-1}$($\sigma h$のAG-共役類)
となっているもの，とする．

[‘(II)$\Rightarrow$(I)’の証明]

$$\tilde{\chi}|_{AH}=\sum_i m_i\hat{\nu}_i \quad (m_i\in\mathbb{Z},\geq 0\ ;\ \hat{\nu}_i : AH\text{の既約指標})$$

とする．容易にわかるように，$\hat{\nu}_i|_H$が可約なら$\hat{\nu}_i(\sigma h)=0$ ($\forall h\in H$)であるから

$$\begin{aligned}\psi_\chi(h') &= \tilde{\chi}(\sigma h)\\ &= \sum_i m_i\hat{\nu}_i(\sigma h)=\sum_i{}' m_i\,\phi_{\nu_i}(h')\end{aligned}$$

(但し，$h'\in\mathfrak{m}_H^{-1}$(σhのAH-共役類)；$\sum_i'$は$\hat{\nu}_i|_H=\nu_i$が既約であるようなiについての和)．よって(II)(iii)より$\psi_\chi|_{H_\sigma}$は，H_σの既約指標の$\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$-linear combinationとして書ける．よって(II)(ii)より(I)が出る．

さて，(II)を証明しよう．EをG_σのelementary subgroupとする．即ち，$E=\langle x\rangle\times R$．ここに$x\in G_\sigma$，Rは，ある素数rについてのr-群で，$(r,\ \mathrm{ord}(x))=1$である．$x=su$ (s=semisimple，u=unipotent)を，xのJordan分解とする．($\underline{G}$は$Sp_{2n}(K)$, $SO_{2n+1}(K)$, $SO_{2n}(K)$のうちのどれか．)

(Case 1)‘$s\notin$ center of $\underline{G}$かつ$r\neq 2$’のとき．

$E\subset Z_{\underline{G}}(s)$は明らか．$r\neq 2$より$E\subset Z_{\underline{G}}(s)^0=Z_{\underline{G}}(s)$

の単位元の連結成分. $\underline{\underline{H}} = Z_{\underline{\underline{G}}}(s)^0$ は, いくつかの smaller rank ($\because s \notin$ center $\underline{\underline{G}}$) の古典群の直積. よって $H = \underline{\underline{H}}_{\sigma^m}$ と置けば, induction の仮定により (II)(iii) が満たされている.

(Case 2) '$s \notin$ center of $\underline{\underline{G}}$, $r=2$' のとき.

$(\mathrm{ord}(x), r)=1$ であるから $(\mathrm{ord}(s), 2)=1$. よって $Z_{\underline{\underline{G}}}(s)$ は連結, その中心は torus $\underline{\underline{T}}$ となる. $T = \underline{\underline{T}}_{\sigma^m}$ とおくと, $s \in T_\sigma$ で T_σ の既約指標は, T の既約指標に持ち上げられる. $T_1 = \{t \in T; (\mathrm{ord}(t), 2)=1\}$ と置くと, $s \in T_1$ で, $T_{1,\sigma}$ の既約指標は, やはり T_1 の既約指標に持ち上げることができる. そこで $H = T_1 R\langle u\rangle$ と置くと, $H = T_1 \times R \times \langle u\rangle$ で, (II)(ii)(iii)の条件を満足する. (一般に, 有限群 K の既約指標 μ に対し $\mu_m(k) = \mu(k^m)$ $(m \in \mathbb{Z}, k \in K)$ によって μ_m を定義するとき $(\mathrm{ord}\,K, m) = 1$ なら μ_m もまた既約指標であること, と条件'$(p, m) = (2, m) = 1$'を用いた.)

(Case 3) '$s \in$ center of $\underline{\underline{G}}$, $r = p$' のとき.

$(\mathrm{ord}(x), r) = 1$ より $u = 1$, 即ち $x = s$. また, $x = s \in$ center of $\underline{\underline{G}}$ より $\mathrm{ord}(x) = 2$のべき. よって $H = \langle x\rangle \times R$ とおくと, (Case 2) と同様に (II)(iii) を満足する.

(Case 4) '$s \in$ center of $\underline{\underline{G}}$, $r = 2$' のとき.

$(\mathrm{ord}(x), r) = 1$ より, $(\mathrm{ord}(s), 2) = 1$. これと $s \in$ center of $\underline{\underline{G}}$ より $s = 1$, 即ち $x = u$. よって $H = \langle x\rangle \times R$ とす

ればよい.

(Case 5) '$s \in$ center of $\underline{G}$, $r \neq p$, $r \neq 2$, $u=1$' のとき.
この場合は,やや面倒である.簡単の為,$\underline{G}=Sp_{2n}(K)$ or $SO_{2n+1}(K)$ の場合を詳しく述べることにする.$E=\langle s\rangle \times R$, R は G_σ ($=Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ or $SO_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$) の r-Sylow subgroup ($r \neq 2, p$) であるとしてよい.

$e=\mathrm{Min}\{$ 自然数 i | r は (q^i-1) を割る $\}$ と置く.

<u>Lemma.</u> r が (q^i-1) を割る $\Leftrightarrow$ i は e の倍数.
は,容易にわかる.まず,e が奇数の場合を考える.
$\mathrm{ord}(G_\sigma)=q^{n^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots\cdots(q^{2n}-1)$ であるから,
Lemma より,

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^{2e}-1)(q^{4e}-1)\cdots(q^{2le}-1)$$

ここに,$2n=2le+k$ $(0 \leq k < 2e)$

$r \neq 2$ より $r \mid (q^{ie}-1) \Rightarrow r \nmid (q^{ie}+1)$. よって

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^e-1)(q^{2e}-1)\cdots(q^{le}-1)$$

$$\therefore \mathrm{ord}(R) \mid \mathrm{ord}(GL_n(\mathbb{F}_q)) \quad (\because le \leq n)$$

ところが,$\underline{G}$ の σ-stable な部分群 $\underline{H}$ ($\cong GL_n(K)$) で $H_\sigma=\underline{H}_\sigma$ が $GL_n(\mathbb{F}_q)$ と同型なものが存在する.よって,Sylow の定理により,R は H_σ の部分群と思ってよい.そこで $H=\underline{H}_{\sigma^m}$ ($\cong GL_n(\mathbb{F}_{q^m})$) と置けば,[1],[2] により,(II)(iii) を満足している.

次に，eが偶数：$e=2f$，の場合を考える．Lemmaにより

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^e-1)(q^{2e}-1)\cdots(q^{le}-1)$$

ここに，$2n=le+j \ (0 \leq j < e)$.

eの定義により　$r \mid (q^e-1)=(q^f-1)(q^f+1)$ かつ $r \nmid (q^f-1)$.
$\therefore$ $r \mid (q^f+1)$. よってiが奇数なら $r \mid (q^{if}+1)$.
$r \neq 2$ より $r \nmid (q^{if}-1)$. また，$r \mid (q^e-1)$ より，偶数iに対してrは$(q^{\frac{i}{2}e}-1)=(q^{if}-1)$を割る．よって$r \neq 2$より$r$は$(q^{if}+1)$を割らない．以上から

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^f+1)(q^{2f}-1)(q^{3f}+1)\cdots(q^{lf}-(-1)^l).$$

従って，fが奇数なら

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q+1)(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^n-(-1)^n)$$

$$\therefore \ \mathrm{ord}(R) \mid \mathrm{ord}(U_n(\mathbb{F}_q)).$$

よって，この場合も，$\underline{H}_\sigma \cong U_n(\mathbb{F}_q)$ となるような，代数的部分群 $\underline{H}$ $(< \underline{G})$ に対して $H=\underline{H}_{\sigma^m}$ と置くことによってO.K. 次に，fが偶数の場合．

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^2+1)(q^4-1)\cdots(q^{[\frac{n}{2}]\times 2}-(-1)^{[\frac{n}{2}]})$$

$$\therefore \ \mathrm{ord}(R) \mid \mathrm{ord}(U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2}))$$

ところが，$\underline{G}$の代数的部分群 $\underline{H}'(\cong GL_{[\frac{n}{2}]}(K)\times GL_{[\frac{n}{2}]}(K))$ で $\underline{H}'_\sigma \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$ となるものが存在する．そこで，nが偶数のときは，$H=\underline{H}'_{\sigma^m}$ とし，nが奇数のときは，

$\underline{\underline{H}}'$の代わりに maximal rank の $\underline{\underline{H}}\,(\cong \underline{\underline{H}}' \times GL_1(K))$ をとって，$H = \underline{\underline{H}}_{\sigma^m}$ とすればよい．（maximal rank にしたのは，'$H_\sigma \ni s$'を保障するため）．以上で，$\underline{\underline{G}} = Sp_{2n}(K)$ or $SO_{2n+1}(K)$ の場合の（Case 5）の証明は終った．$\underline{\underline{G}} = SO_{2n}(K)$ のときは，$G_\sigma = SO^{\pm}_{2n}(\mathbb{F}_q)$（$\mathrm{ord}(G_\sigma) = \mathrm{ord}(SO^{\pm}_{2n}(\mathbb{F}_q)) = q^{n(n-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots\cdots(q^{2n-2}-1)(q^n \mp 1)$）である．上と全く同じ論法により，$R$は次のような形の部分群 $H'_\sigma\,(\subset G_\sigma)$ に含まれることがわかり，この場合もO.K. となる：eの定義は，上と同じ．

[$G_\sigma = SO^{+}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ のとき] (A) $e = \mathrm{odd} \Rightarrow H'_\sigma \cong GL_n(\mathbb{F}_q)$. (B) $e = 2f$, $f = \mathrm{odd} \Rightarrow$ ① $n = \mathrm{odd}$ のとき $H'_\sigma \cong U_{n-1}(\mathbb{F}_q)$ ② $n = \mathrm{even}$ のとき $H'_\sigma \cong U_n(\mathbb{F}_q)$，(C) $e = 2f$，$f = \mathrm{even} \Rightarrow$ ① $n \equiv 2 \pmod 4$ のとき，$H'_\sigma \cong U_{\frac{n-2}{2}}(\mathbb{F}_{q^2})$. ② $n \not\equiv 2 \pmod 4$ のとき，$H'_\sigma \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$.

[$G_\sigma = SO^{-}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ のとき] (A) $e = \mathrm{odd} \Rightarrow H'_\sigma \cong GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)$. (B) $e = 2f$，$f = \mathrm{odd} \Rightarrow$ ① n odd のとき $U_n(\mathbb{F}_q)$ ② n even のとき $U_{n-1}(\mathbb{F}_q)$ (C) $e = 2f$，$f = \mathrm{even} \Rightarrow$ ① $n \equiv 0 \pmod 4$ のとき $H'_\sigma \cong U_{\frac{n-2}{2}}(\mathbb{F}_{q^2})$ ② $n \not\equiv 0 \pmod 4$ のとき，$H'_\sigma \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$.

次の場合を調べれば，定理の証明は完成する．

(Case 6) '$s \in$ center of $\underline{\underline{G}}$, $r \neq 2$, $r \neq p$, $u \neq 1$' のとき．
$E \subset Z_{\underline{\underline{G}}}(x) = Z_{\underline{\underline{G}}}(u)$ であるが，$r \neq 2$ より，$E \subset Z_{\underline{\underline{G}}}(u)^0$.
[3] より，$Z_{\underline{\underline{G}}}(u)^0 \cong \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{V}}$ ($\underline{\underline{M}}$ = reductive, $\underline{\underline{V}}$ = unipotent radical of $Z_{\underline{\underline{G}}}(u)^0$) と半直積に分解され，$\underline{\underline{M}}$ は，古典群をいくつか直積したものである．Sylow の定理より，$\langle s \rangle \times R \subset \underline{\underline{M}}_\sigma$．従って (Case 5) の証明より，$\underline{\underline{M}}$ の代数的な σ-stable subgroup $\underline{\underline{H}}' (\cong GL_{n_1}(k) \times GL_{n_2}(k) \times \cdots)$ で $\langle s \rangle \times R \subset \underline{\underline{H}}'_\sigma$ なるものが存在する．そこで H として $\underline{\underline{H}}'_{\sigma^m} \times \langle u \rangle$ をとればよい．これで (II) の証明が完成した．

文献

[1] T. Shintani: Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396-414.

[2] N. Kawanaka: On the irreducible characters of the finite unitary groups, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 425-450.

[3] T.A. Springer - R. Steinberg: Conjugacy Classes (= Part of Springer Lecture Notes in Math. Vol. 131 (1970)).