数理解析研究所講究録
第394巻 1980年 245-259

観察可能と強観察可能なHopfイデアルについて

筑波大　志賀野 洋

Aを基礎体k上のHopf代数、IをAのHopfイデアル、BをA/Iとする。次の2条件を考える。(1)任意の有限次元な左B comodule Wに対し、左A-comodule VでWを部分B-comoduleとして含むものが存在する。或いは双対的に、左A-comodule Vで、WがVのB準同型像になるものが存在する。(2)任意の左B-comodule Wに対し、左A-comodule Vで、Wを部分B-comoduleとして含み、$k\underset{B}{\square}W = k\underset{A}{\square}V$となるものが存在する。(1)が成立するとき、IをAで観察可能(observable)、或いはBはA観察可能であるという。(2)が成立するとき、IをAで強観察可能(strongly observable)、或いはBはA強観察可能であるという。以下、簡便に、観、強観、と書く。勿論、強観ならば観である。これはAが代数的閉体k上の有限生成な被約可換代数、$I=\sqrt{I}$、GをAで定義されたアフィン代数群、KをIで定義されたGの閉部分群とした時、Kが[1]や[2]で定義された観察

可能、強観察可能なGの部分群ということと同じである。ここで考察することは[1]や[2]の一般化である。或いはHopf代数の立場からいえば、それらの結果のいくつかは、ここでの考察の特別な場合であるともいえる。特に強観についてはそうである。以下、$\otimes = \underset{k}{\otimes}$、また特にことわらないかぎり[7]の記号、記法を用いることとする。

1. cotensor積、単射的comodule。 Cをk上のcoalgebra、Mを右C-comodule、Nを左C-comodule、各々の構造射をρ_M、λ_Nとする。（簡便に、M_C, ${}_CN$, ρ, λと書く。）

$$M \underset{C}{\square} N \equiv \ker\left(M\otimes N \overset{\rho\otimes 1}{\underset{1\otimes\lambda}{\rightrightarrows}} M\otimes C\otimes N \right)$$

をMとNのC上のcotensor積という。Dもk-coalgebraとする。Nが左C-comoduleかつ右D-comoduleのとき、Nが(C,D)-bicomodule $\Leftrightarrow$ $(\rho\otimes 1)\lambda = (1\otimes\lambda)\rho$。（簡便に、${}_CN_D$と書く。） Cは$\rho = \Delta_C = \lambda$ととれば$(C,C)$-bicomoduleである。次のことは簡単にいえる。 (1) M_Cに対し、$M\underset{C}{\square}?$ は左C-comoduleの圏からk加群の圏への左完全な関手である。 (2) $M_C \simeq M\underset{C}{\square}C$。$L_C$、${}_CM_D$、${}_DN$に対し、$(L\underset{C}{\square}M)\underset{D}{\square}N \simeq L\underset{C}{\square}(M\underset{D}{\square}N)$。ただし、$L\underset{C}{\square}M$は$1\underset{C}{\square}\lambda_M$で右$D$ comodule、$M\underset{D}{\square}N$は$\rho_M\underset{C}{\square}1$で左$C$-comoduleとみる。 $\mathfrak{C}$がCの部分右C-comoduleのとき、$M\underset{C}{\square}\mathfrak{C} \hookrightarrow M\underset{C}{\square}C \cong M$で$M$の部分空間とみる。以下とくにことわらずにこの同一視を自由に行う。さらに重要な四つの定義をする。 (1) $M\underset{C}{\square}?$ が（忠実）完全であ

るとき、MをC上(faithfully) coflat であるという。(え) $\mathrm{Com}_C(?, M)$ が(忠実)完全であるとき、Mは C-injective (cogenerator)であるという。次の(1.1)〜(1.3)は土井幸雄氏或いは竹内光弘氏による。

(1.1) 定理。次のこと同値。(1) M は C-injective (cogenerator) である。(2) M は (faithfully) coflat である。

${}_C M \simeq C \square_C M$ ゆえ C は faithfully coflat 右 C-comodule であるが上のことより、C は C-injective cogenerator である。さらに k 加群 W に対して $W \otimes C$ を $1 \otimes \Delta$ で右 C-comodule とみれば、これは C-injective cogenerator である。W が右 C-comodule でもあるときは、ρ_W は C-comodule 射になる。即ち comodule の圏は十分多くの単射対象をもつ圏である。

C, D を k-coalgebras、$C \xrightarrow{\pi} D$ を coalgebra 射、M_C、N_D としたとき、M は $(1 \otimes \pi)\rho$ を構造射として右 D-comodule になる。これを M_π と書く。混乱がおきないときは、単に右 D-comodule M という。また C は $\rho = \Delta$、$\lambda = (\pi \otimes 1)\Delta$ として (D, C)-bicomodule になる。従って、$N \square_D C$ は $1 \square_D \Delta$ で右 C-comodule になる。これを N^π と書き N の induced comodule という。(1.5)まで C, D, π は上の如くとする。

(1.2) 定理。$\mathrm{Com}_C(M, N^\pi) \simeq \mathrm{Com}_D(M_\pi, N)$, $f \mapsto (1 \otimes \pi) f$

この adjointness より induced comodule N^π と D-comodule 射

$$1\otimes\varepsilon : (N^{\pi})_{\pi} \xrightarrow{1\square\pi} N\square_D D \cong N$$

の対は universal mapping property を有する。従って、観の定義を coalgebra まで拡張すれば、D は C 観 ⇔ $1\otimes\varepsilon$ は全射。となる。

(1.3) 定理。次のこと同値。(1) $?\square_D C$ は右 D-comodule の圏から右 C-comodule の圏への完全関手である。(2) $C = C_{\pi}$ は D-injective である。(3) すべての injective 左 C-comodule M に対し、M_{π} は D-injective である。もし C, D がともに Hopf 代数ならば、これらは次にも同値である。(4) injective 左 C comodule M で、M_{π} が D-injective なるものが存在する。

(1.4) 補題。$?\square_D C$ は忠実な関手 ⇔ すべての右 D-comodule M に対して $1\otimes\varepsilon : M\square_D C \longrightarrow M$ は全射。（証明略）

(1.5) 命題。π を全射、$J = \mathrm{Ker}\,\pi$ とすれば、J は ${}_{\pi}C$ の部分 comodule であり、${}_{\pi}C$ が D-injective cogenerator ⇔ J が D-injective

証明。D は D-injective cogenerator ゆえ (⇐) は自明である。逆に任意の右 D-comodule の完全系列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ に対して右の可換図式、すべての縦の列も横の列も完全、を得る。9－補題より、$M\square_D J \to N\square_D J$ が全射である。従って、$?\square_D J$ は完全関手で

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L\square_D J & \to & M\square_D J & \to & N\square_D J & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L\square_D C & \to & M\square_D C & \to & N\square_D C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ある。故に (1.2) より J は D-injective である。

さて、C が D-injective であっても、D-injective cogenerator でない例は簡単に作れる。しかし、C、D が Hopf 代数のときはこの両概念が一致してしまう。それがこの節の主定理である

(1.6) 定理。A、B を Hopf 代数、$\pi: A \longrightarrow B$ を Hopf 代数射で全射的なものとする。このとき次のこと同値。(1) A は B-injective。(2) B-comodule 射、$\phi: B \longrightarrow A$ で $\phi(1) = 1$ なるものが存在する。(3) $J = \operatorname{Ker}\pi$ は B-injective である。従って (1.5) より A は B-injective cogenerator である。

証明。(1)$\Rightarrow$(2)。右の図式を考えれば、仮定より、B-comodule 射 $\phi: B \longrightarrow A$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

(2)$\Rightarrow$(3)。J は右 B-comodule ${}_{\pi}A$ の部分 comodule である。$J \otimes B$ を $1 \otimes \Delta$ で右 B-comodule とみる。このとき ρ_J は B-comodule 射である。$\psi: J \otimes B \longrightarrow J$ を $\psi = m_A(1 \otimes \phi)(1 \otimes m_B)(1 \otimes S \otimes 1)(\rho_J \otimes 1)$ で定義すると ψ が B-comodule 射になり、$\psi \circ \rho_J = id$、になることが容易にいえる。従って、J は B-injective comodule $J \otimes B$ (1.1) の直和因子になるから、B-injective となる。

注意。M が相対左 (A, B)-Hopf module であるとは、M が左 A-module かつ左 B-comodule であり、構造射 $\rho_M: M \to M \otimes B$ が A-linear であるときにいう。ただし $M \otimes B$ は次のように A-module とみる。$a(m \otimes b) = \sum_{(a)} a_{(1)} m \otimes \pi(a_{(2)}) b$, $a \in A$, $m \in M$, $b \in B$

A-module A は $_\pi A$ とみて相対左 (A,B)−Hopf module、A_π とみて相対右 (A,B)−Hopf module になる。J は A の部分相対 (A,B)−Hopf module となる。実は (1.6) の各条件は次に同値である。(4) 任意の相対 (A,B)−Hopf module は B−comodule として injective である。

2、強観察可能性

(2.1) A, B を (1.6) の如くとする。次のこと同値。(1) B は A 強観である。(2) A は B−injective である。

注意。(1.1) と (1.6) より、これは次の各々の条件に同値。(3) A は B−injective cogenerator。(4) A は B 上 coflat。(5) A は B 上 faithfully coflat。[2] では、代数的閉体 k 上の有限生成な被約可換代数 A に対して、(1) と (2) と (4) が同値なことを証明していることになる。

証明。(2) ⇒ (1)。(2) が成立するならば、(1.1) と (1.6) より (3) ~ (5) が成立するから (1.4) より、B は A 観である。まず $_BW$ が単純のとき、有限次元 A−comodule $_AV$ で、W を部分 B−comodule として含むものが存在する。V としてこのようなもののうちで次元が最小のものをとれば V は A−comodule として単純である。単純性より、$k\underset{B}{\square}W = k\underset{A}{\square}V$。次に $_BW$ を任意に与えられたとする。今みたことより Soc(W) に対して完全可約な A−comodule V で、$k\underset{B}{\square}W = k\underset{A}{\square}V$、Soc(W) は V の B−subcomodule となるものが存在

する。E(V) を V の injective hull とすれば、(1.3) より ${}_{\pi}E(V)$ は B-injective でもある。右の図式で、B-comodule 射 ψ を得る。ψ は Soc(W) 上で単射的ゆえ W 上でも単射的である。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Soc}(W) \arrow[r] \arrow[d, hook] & W \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\ & V \arrow[d, hook] & \\ & E(V) & \end{tikzcd}$$

また、$k\underset{B}{\square}W = k\underset{B}{\square}\mathrm{Soc}(W) = k\underset{A}{\square}V = k\underset{A}{\square}E(V)$ で求める結果を得る

(1)⇒(2)。仮定より、左 B-comodule B に対して、左 A-comodule V で、B が V の部分 B-comodule であり、$k\underset{A}{\square}V = k\underset{B}{\square}B$ をみたすものが存在する。$k\underset{B}{\square}B = k$、A は A-injective ゆえ、右の図式で、A-comodule 射 ψ を得る。φ を B↪V と ψ の合成射とすれば、φ は B-comodule 射であり、$\varphi(1) = 1$ をみたす。(1.6) の (2) より A は B-injective となる。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mu_A"'] & V \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

以下この節では A を可換な Hopf 代数とする。A の部分代数 R が、左 coideal でもあるとき、R を左 coideal 部分代数という

竹内氏は次の結果を得ている。[4] と [5]。

(2.2) (1) $\mathcal{R} = \{ R$; R は A の左 coideal 部分代数で、A は R 上忠実平坦な加群 $\}$。$\mathcal{I} = \{ I$; I は A の Hopf イデアルで A は faithfully coflat A/I-comodule である。$\}$。$\mathcal{H} = \{ R$; R は A の部分 Hopf 代数 $\}$。$\mathcal{I}_0 = \{ I$; I は A の正規 Hopf イデアル $\}$ とする。対応 $R \mapsto R^+A = \mathrm{Ker}\,\varepsilon \cap R$ で生成された A のイデアル、と対応 $I \mapsto A\underset{A/I}{\square}k$ は $\mathcal{R}$ と $\mathcal{I}$ の間の一対一対応を与え

る。さらに、このとき$\mathcal{R}$の部分集合$\mathcal{R}_0$は、$\mathcal{I}$の部分集合$\mathcal{I}_0$と対応する。(2) Aがpointedならば、AのすべてのHopfイデアルIに対して、AはA/I上faithfully coflatである。(3) $H=\mathrm{Sp}A$ $K=\mathrm{Sp}\,A/I$、$H\tilde{/}K$をdur k-sheaf of right cosetsとすれば、$H\tilde{/}K$がアフィンscheme $\Leftrightarrow$ AはB上faithfully coflat。

竹内氏の結果をこのように引用するのは矮少化しているような気もするので、一言ことわっておく。彼は、相対(R,A) Hopf moduleの圏とA/R^+A-comoduleの圏の間に互いにadjointな関手があり、それらの圏の間にequivalenceが成立するための条件を、全くHopf代数的に調べている。そのequivalenceが成立するための条件をみなおすことによって、上の諸結果を得ている。 さて、(2.1)と(2.2)を組み合せて次を得る。

(2.3)定理。$H=\mathrm{Sp}A$, $K=\mathrm{Sp}\,A/I$について、次のこと同値。(1) KはHで強観。(2) Aはinjective k-K-module。(3) KはGのexact部分群、即ち$A\square_{A/I}?$が完全関手、である。(4) $H\tilde{/}K$はアフィンscheme。

注意、Aが代数的閉体k上の有限生成な被約可換代数の場合、この定理は[2]の強観部分群に関する主定理である。

次に強観の判定規準を一つ与えて、この節を終える。

(2.4)命題。Hopf代数Aは完全体k上の被約代数とする。RをAの左coideal部分代数とした時、次は同値。(1) Rは

自明でない左 coideal — ideal をもたない。(2) A は R 上忠実に平坦。ただし、R の部分左 coideal でかつ R の ideal になっているものを R の左 coideal-ideal とよぶ。

証明。(1)⇒(2)。$k=\bar{k}$、A も R も k 上有限生成としてよい。i を R から A への inclusion 写像とする。$f=Sp\,i(k): SpA(k)\longrightarrow SpR(k)$ は $SpA(k)$-equivariant morphism になる。まず、generic flatness より、$x\in SpA(k)$ で A_x が $R_{f(x)}$ 上平坦なるものがある代数群 $SpA(k)$ は homogeneous ゆえ、任意の $y\in SpA(k)$ に対し A_y が $R_{f(y)}$ 上平坦になる。従って A は R 上平坦。故に f は開写像である。$\mathfrak{a}$ を閉集合 $SpR(k)-f(SpA(k))$ の定義イデアルとすれば、$\mathfrak{a}$ は $SpA(k)$-stable ゆえ左 coideal-ideal になる。仮定より $\mathfrak{a}=0$。即ち f は全射的である。故に A は R 上忠実平坦である。(2)⇒(1)。$\mathfrak{a}$ を R の左 coideal-ideal とする。$\mathfrak{a}\neq 0$ ならば $\varepsilon(\mathfrak{a})\neq 0$。なぜなら $\varepsilon(\mathfrak{a})=0$ なら $\Delta(\mathfrak{a})\subset A\otimes\mathfrak{a}$ ゆえ $(1\otimes\varepsilon)\Delta(\mathfrak{a})=0$。ところが $id=(1\otimes\varepsilon)\Delta$ である。$a\in\mathfrak{a}$ として $\varepsilon(a)=1$ なるものをとれば、$1=\varepsilon(a)=\sum_{(a)}S(a_{(1)})a_{(2)}\in A\mathfrak{a}$。これは A が R 上忠実に平坦ということに反する。

3、観察可能性。この節では Hopf 代数 A は可換代数とする。まず次の事に注意しておく。(1) comodule は局所有限ゆえ観は、任意の ${}_BW$ に対して $A\,\square_B\,W\xrightarrow{\varepsilon\otimes 1}W$ が全射ということと同値である。(2) 次のような Hopf 代数の可換図式、ただし射

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_1 \arrow[d] \\ A_2 \arrow[r] & B_2 \end{tikzcd}$$

はすべて全射、が与えられた時、定義より次がいえる。(イ)(観の推移律) B_1 が A_1 観、B_2 が B_1 観ならば、B_2 は A_1 観。(ロ) B_2 が A_1 観ならば、B_2 は A_2 観及び B_1 観。

次の定理は[1]の定理の Hopf 代数的主張であり、その証明の本質的部分は全く同じである。従って証明は略す。

(3.1)定理。A, B を Hopf 代数、$\pi : A \to B$ を Hopf 代数射で全射とする。$A \,\square_B\, kg \neq 0$ をみたす B の任意の group-like element g に対して、$A \,\square_B\, kg^{-1} \neq 0$ が成立すると仮定する。ただし、kg は g で生成された一次元の B の subcoalgebra とする。このとき B は A 観である。特に、任意の $g \in G(B)$ に対して、$A \,\square_B\, kg \neq 0$ ならば、B は A 観である。ここで $G(B)$ は B の group-like element 全体からなる集合(乗法群)とする。

(3.2)系。(1) 任意の体拡大 ℓ/k に対し、B が A 観ということと $B \otimes \ell$ が $A \otimes \ell$ 観ということは同値である。(2) 次の2条件のどちらかが成立すれば B は A 観である。(イ) $\pi(G(A)) = G(B)$ (ロ) $\pi(R(A)) = R(B)$、ただし $R(?)$ は ? の coradical をいみするとする。従って、特に次のことがいえる。(i) A が pointed ならば、すべての Hopf イデアルは A で観である。(ii) $G(B) = 1$ ならば B は A 観である。 (証明略)

次の命題も証明は略すが、証明には(3.1)を使う。

(3.3)命題。 (1) I は A で観 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{I}$ は A で観。 (2) B が A 観 $\Leftrightarrow$ B_{red} は A_{red} 観。 (3) $\mathrm{Sp}\,B$ が $\mathrm{Sp}\,A$ で観 $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Sp}\,B)^{\circ}$ が $(\mathrm{Sp}\,A)^{\circ}$ で観 ただし $\circ$ は単位元を含む連結成分を表わすものとする。

次の命題は[6]に主張してあるが、証明が誤っているので、略証を付す。(3.5) は[6]で証明してある。

(3.4)命題。 R を A の 左 coideal 部分代数とする。 $J(R)=R^{+}A$ は A 観である。

略証。 (3.1) と (3.2) と (3.3) より次の問題に帰着できる。 A を $k=\bar{k}$ 上の有限生成な Hopf 整域、 R を A の 左 coideal 部分代数で k 上有限生成とした時、 $\mathrm{Sp}(A/J(R))^{\circ}$ は $\mathrm{Sp}\,A$ で観である。

さて、 $H=\mathrm{Sp}\,A(k)$, $K=\mathrm{Sp}(A/J(R))^{\circ}(k)$, $X=\mathrm{Sp}\,R(k)$ とする。 $p: H\to X$ を inclusion $R\hookrightarrow A$ から定まる H-equivalent dominant morphism とする。 $g\in G(B)$, $B=\mathcal{O}(K)$ を $A\,\square_B\, kg\neq 0$ をみたす任意のものとする。 $a\in A\,\square_B\, kg$ を $\varepsilon(a)=1$ なるものを選ぶ。 $Z=a$ の零点全体、とした時次のことがいえる。

(1) $KZ=Z$ 。 (2) $p^{-1}(pZ)=Z$。 (3) p は開写像。 (3) より pZ は pH で閉であるから $p^{-1}(\overline{pZ})=Z$。ここで $\overline{pZ}$ は pZ の X での閉包。 $\varepsilon(a)=1$ ゆえ $p(\varepsilon)\notin\overline{pZ}$ 。従って $r\in R$ で $r(p(\varepsilon))=1$ かつ $r(\overline{pZ})=0$ なるものが存在する。故に $r\in\sqrt{(a)}$。 $r^{n}=aa'$, $n\in\mathbb{N}$, $a'\in A$ と表わせば $A\otimes B$ の中で次の式を得る。

$$(a\otimes g)(a'\otimes g^{-1})=r^{n}\otimes 1=(a\otimes g)\Big(\sum_{(a')}a'_{(1)}\otimes\pi(a'_{(2)})\Big)$$

$A\otimes B$は整域ゆえ $a'\otimes g^{-1}=\sum_{(a')} a'_{(1)}\otimes \pi(a'_{(2)})$ を得る。これは、$a'\in A\underset{B}{\square}kg^{-1}$ を意味する。故に(3.1)より B はA観である。

逆に次のことがいえる。J( )は(3.4)のいみとする。

(3.5)命題。Hopf イデアル I がA観ならば、$I=J(A\underset{B}{\square}k)$。

(3.4)と(3.5)より(2.2)の(1)での対応は、Aの観 Hopf イデアル全体と、Aの左 coideal 部分代数Rで、$R=A\underset{A/J(R)}{\square}k$ をみたすもの全体との間の一対一対応を与える。

注意。一般に Hopf イデアルIに対して、左 coideal 部分代数 $K=A\underset{A/I}{\square}k$ はAの部分代数 $k+I$ に含まれる最大の左 coideal として特徴づけることができる。

(3.6)系。I_1、I_2 をAで観である Hopf イデアルとすると、I_1+I_2 もAで観である。

証明。I_i は左 coideal 部分代数 R_i $(i=1,2)$ で決るとすると $I_1+I_2=J(R_1R_2)$ である。

次にまだ完全な証明はできていないが、代数幾何的な特徴づけを与えておく。[1]の場合にはできている。

(3.7)予想。RをAの左 coideal 部分代数で、$R=A\underset{A/J(R)}{\square}k$ をみたすものとする。このとき $\mathfrak{n}$ をRの最小の左 coideal−ideal とすれば、$H/K\simeq(\mathrm{Sp}R)_{\mathfrak{n}}$ である。ただし $H=\mathrm{Sp}A$, $K=\mathrm{Sp}(A/J(R))$ とする。

(3.8)命題。A、Bは(3.1)の如くとする。B' がBの pointed irreducible 部分 Hopf 代数とする。$C = B/B'^{+}B$ がA観ならば、Bも A観である。

証明。任意の $g \in G(B)$ に対し $A \underset{B}{\square} kg \neq 0$ を示せば (3.1) より主張は正しい。C は A観ゆえ $A \underset{C}{\square} k\bar{g} \neq 0$、$\bar{g} = g \bmod B'^{+}B$ ところで、$A \underset{C}{\square} k\bar{g} \simeq A \underset{B}{\square} (B \underset{C}{\square} k\bar{g}) \simeq A \underset{B}{\square} (B \underset{C}{\square} kg) \simeq A \underset{B}{\square} B'g$。$B'g \equiv \{ bg \,;\, b \in B' \}$ は B の pointed irreducible subcoalgebra、$A \underset{B}{\square} B'g$ は右 $B'g$-comodule ということに注意すれば、$\mathrm{Soc}_{B'g}(A \underset{B}{\square} B'g) = A \underset{B}{\square} B'g \underset{B'g}{\square} kg = A \underset{B}{\square} kg$。$A \underset{B}{\square} B'g \neq 0$ ゆえ $A \underset{B}{\square} kg \neq 0$。

(3.9) 系。B が representably nilpotent、即ち Hopf 代数として $B \simeq kG(B) \otimes B'$、$kG(B)$ は群 $G(B)$ の群環、B' は pointed irred. のとき B は A観である。

最後に観部分群 scheme と stablizer 群 scheme との関係を述べておく。

(3.10) 命題。$H = \mathrm{Sp}\,A$，V を左 A-comodule，v を V の元、H_v を v の stabilizer 群 scheme としたとき、H_v は H の観部分群 scheme である。

略証。W を v で生成される V の部分 A-comodule とする。これは有限次元であるから、線型双対空間 W^* は右A-comodule になる。$\mathrm{Sym}(W^*)$ を W^* 上の対称代数とすれば、これも自然に右 A-comodule になる。$\varphi_v : \mathrm{Sym}(W^*) \longrightarrow A$，$f \mapsto \sum_{(f)} f_{(0)}(v) f_{(1)}$ は A-comodule 射となる環準同型である。$B = A/(\mathrm{Im}\,\varphi_v)^{+}A$ とすれ

ば、$H_v = Sp\,B$ となる。これは任意の可換k代数Tに対して $H_v(T) = Sp\,B(T)$ を示せばよい。後略。

ここで、$(\mathrm{Im}\,\varphi_v)^{+}A$ は有限生成イデアルであることに注意しておく。次は今の逆の命題である。

(3.11) 命題。I を有限生成な観Hopfイデアルとすれば、左A comodule V とその元 v で、$H_v = Sp(A/I)$ となるものが存在する。

略証。$I = J(R)$, $R = A \square_{A/I} k$ ゆえ $I = (r_1, \cdots, r_n)$, $r_i \in R$ $(1 \le i \le n)$ とかける。V_i を r_i で生成された左A-comodule とする。$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, $v = r_1 + \cdots + r_n$ とすると、$H_v = Sp(A/I)$ となる。

有限生成でない観Hopfイデアルについては、表現加群の一点の stabilizer 群 scheme としてつかまえることはできない。

終

参考文献

[1] Bialynicki-Birula, A., Hochschild, G., Mostow, G. : Extensions of representations of algebraic linear groups. Amer. J. Math. 85 131–144 (1963)

[2] Cline, E., Parshall, B., Scott, L. : Induced modules and affine quotients. Math. Ann. 230, 1–14 (1977)

[3] Doi, K. Homological coalgebra. to appear

[4] Takeuchi, M : A correspondence between Hopf ideals

and sub-Hopf algebras. Manuscripta Math. 7, 251–270 (1972)

[5] Takeuchi, M. : Relative Hopf modules — Equivalence and freeness criteria — to appear

[6] Shigano, H. : A correspondence between observable Hopf ideals and left coideal subalgebras. Tsukuba J. Math. 1, 149–156 (1977)

[7] Sweedler, M.E. : Hopf Algebra, New York, W.A. Benjamine Inc., 1969.