数理解析研究所講究録
第 398 巻 1980 年 1-30

A Graph Theory for C*-algebras

天王寺高校　榎本雅俊
大阪教育大学　藤井正俊
大阪教育大学　綿谷安男

1. はじめに。最近，A. Connes, P. Hahn, J. Renault 等が中心となり，operator algebra に対する groupoid による接近を行なっている。そこでは，すべての operator algebra は groupoid により構成されるかという問題がある。この種の研究は，operator algebra の general theory といえる。他方，simple C*-algebra の構造を研究する為に，具体的な simple C*-algebra がくわしく調べられ始めている。その一例は AF-algebra である。また，Pimsner, Popa は，最近脚光を浴びている irrational rotation algebra をこの中に埋め込んで，その構造を解析している。もう1つの具体的な例として，ergodic theory からの要請により，Cuntz と Krieger が導入した C*-algebra がある。それは，topological Markov chain に関連して考察されている。この AF-algebra と Cuntz-Krieger による algebra には groupoid による接近がある。ここでは，combinatorial theory

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} x = X \\ x^d y = Y \end{matrix}$ xy

において，1つの中心をなしている graph theory を用いて，simple C^*-algebra を調べる。主な対象物は，後者の方であるが，groupoid 及び graph による C^*-algebra への接近は，最終的には，categorical な接近にまとめられることと思われる。

以下，内容を項目の順に述べる。

1. はじめに
2. graph の基礎的な概念と Cuntz-Krieger algebra の代数的構造
3. "gauge" 作用を通して見た Cuntz-Krieger algebra.
4. sub-Fock representation による Cuntz-Krieger algebra の extension とその応用
5. digraph 上の free category からみた Cuntz-Krieger algebra の extension と adjoint graph.
6. Weak extension group
7. 3×3 行列に対する simple Cuntz-Krieger algebra の分類
8. 補遺

内容を紹介する。2では，graph の基礎的概念と Cuntz-Krieger algebra との代数的構造とがどのように結びつくかを説明する。

3では，"gauge" 作用とのかかわり合いを示す。2と3で述べることを表にまとめると次のようになる。

graph 理論	C^*-algebra 理論
連結成分	直和成分
凝縮 graph の順序 ideal	* ideal
強連結（行列の既約）	simple algebra
初等有向閉路 C_k の存在	周期が k でない gauge 変換は outer
非周期性	gauge 変換群 $\mathbb{T}$ は outer aut. gr.
(k−1) 有向道グラフ	周期 k の gauge 変換の fixed point alg.
初等有向閉路 C_k によるデカルト積 $G \times C_k$	周期 k の gauge 変換による crossed product
$G \times C_k$ の回転変換	crossed product 上の dual action
covering map	expectation

4では，Evans [17]，Katayama による結果を拡張する。彼らは Cuntz algebra の extension を Full-Fock space 上に表現することに成功した。我々は，これを Cuntz-Krieger algebra の extension の場合にまで一般化する。このことの応用として，Cuntz-Krieger algebra の generators の間のある種の map が，その algebra 上の automorphism に拡張出来る為の条件を決定する。

5では，前節とは違った観点から，Cuntz-Krieger algebra の extension の表現を考える。digraph 上の free category 上の C^*-algebra としてとらえるのである。この時，adjoint graph の考え

が有効に働く。

6.では，任意のfinitely generated abelian group Hに対して，separable simple, unital C^*-algebra Aが存在して，$Ext^w(A)$がHに同型になることを示す。

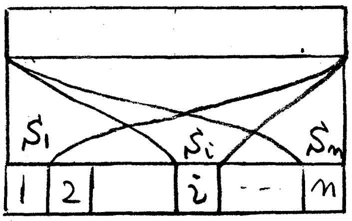
7.では，Cuntz-Krieger algebraの分類問題を考察する。K_0-群の精密化としてのmarkerという概念を用いて，我々は，3×3行列の場合については，完全な結果を得ている。

8.では，関連した話題を扱う。

$\boxed{2}$ graphの基礎的な概念とCuntz-Krieger algebraの代数的構造

Cuntz
$\mathcal{O}_n$

J. Cuntz [4]は，1977年にCMPに出た論文の中で，次のようなC^*-algebraを調べた。n個のisometries $S_1, \cdots, S_n$で，$\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1$をみたすものを取り，これらにより生成される$C^*$-algebraのclassを考える。この時，これらのC^*-algebrasは，generatorsの取り方によらず，一意に決まり，単純であることがわかる。彼は，このC^*-algebraの同型類を$\mathcal{O}_n$という記号で表した。$\mathcal{O}_n$を



図で考えてみると，これは空間をn個に分けて，全体からS_1のrange空間にS_1，----，全体からS_nのrange空間にS_nという状況になっている。これに続いて，Cuntz と Krieger [10]は，1980年，topological Markov chainに対応する新しいC^*-algebraのclassを導入した。それは次のようなものであった。

Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$

Σ を有限集合として、行列 $A=(A(i,j))_{i,j\in\Sigma}$ を取る。ここで、$A(i,j)\in\{0,1\}$ であり、A のどの行もどの列も 0 ではないものとする。この行列 A に対して、次の条件[A]をみたす partial isometries $S_i\neq 0\ (i\in\Sigma)$ を取る。$Q_i=S_i^*S_i$, $P_i=S_iS_i^*$ とした時、

条件[A]　　$P_iP_j=0\ (i\neq j)$, $Q_i=\sum_{j\in\Sigma}A(i,j)P_j\quad (i,j\in\Sigma)$.

条件[A]をみたす $\{S_i\}$ 達により生成される C^*-algebra を作る。

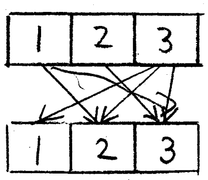
この algebra は、$\boxed{\text{行列 A がある条件をみたせば}}$ [A]の条件だけで、Cuntz algebra のように一意的に決まる。この一意的に決まる algebra を、以下、Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ と呼ぶことにする。

上の条件を、例について、調べてみる。

<u>例1</u>. $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ を取る。条件[A]は、行列でかくと、

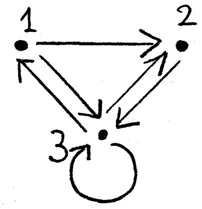
$$\begin{pmatrix}S_1^*S_1\\S_2^*S_2\\S_3^*S_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1S_1^*\\S_2S_2^*\\S_3S_3^*\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}S_1^*S_1=S_3S_3^*\\S_2^*S_2=S_1S_1^*+S_3S_3^*\\S_3^*S_3=S_1S_1^*+S_2S_2^*+S_3S_3^*\end{cases}$$

ということである。又、P_1, P_2, P_3 の range spaces を 1, 2, 3 で表わしておくと、partial isometries S_1, S_2, S_3 は右の図の矢印で表わされる。



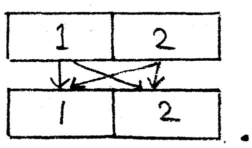
$$\begin{pmatrix}&1&1\\&&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

range spaces と partial isometries の上の図から、次の graph を得る。

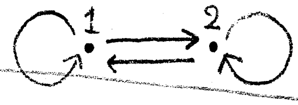


$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

<u>例2</u> Cuntz-algebra $\mathcal{O}_2$ を上と関連させてみる。$S_1^*S_1=Q_1=1$, $S_2^*S_2=Q_2=1$, $S_1S_1^*=P_1$, $S_2S_2^*=P_2$, $S_1S_1^*+S_2S_2^*=1=P_1+P_2$ より，行列で表わすと，$\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}$ である。又，range spaces の間の矢印の図で表わすと，



graphでかくと，



で表わされる。

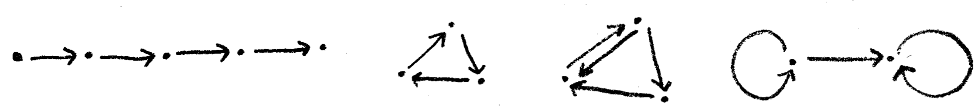
つまり，Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$ は，行列 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ に対応するCuntz-Krieger algebraである。

ここでは，Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ を graph 理論の観点から取り上げていく。その為に，graph理論の用語を準備する。

① G が directed graph（有向グラフ）とは，G が次の3つ組（$V(G)$, $E(G)$, δ）である時をいう。$V=V(G)$ は vertices（頂点）の集合，$E=E(G)$ は edges（辺）の集合，接続写像 $\delta: E \longrightarrow V\times V$, $x \mapsto (\delta_1(x), \delta_2(x))$
range domain

（つまり，$2 \xleftarrow{x} 1$ のとき，$\delta_1(x)=2$ ⋯ edge x の終点は 2，$\delta_2(x)=1$ ⋯ edge x の始点は 1）である。

<u>例3</u> directed graph の例は次のようなものである。

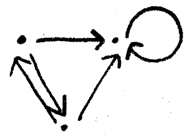


② G が <u>digraph</u> とは，G は directed graph で，どの 2 つの vertices の組 (i,j) に対しても，$i \longleftarrow j$ となる edges は高々 1 つの

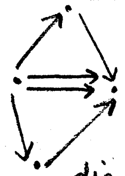
$V\times V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2$ | $\varphi(i,j)=\begin{cases}0 & (i \quad j)\\ 1 & (i\leftarrow j)\end{cases}$

ときをいう。(この高々1つの辺を,(i,j)と同一視する)。

例4



digraph



digraphではない.

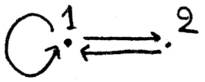
③ digraph G の adjacency matrix (隣接行列) $A=(A(i,j))$ とは,

$$A(i,j)=\begin{cases}1 & (i\longleftarrow j \text{ がある})\\ 0 & (i\longleftarrow j \text{ がない})\end{cases}$$

$$A=\left(\varphi(i,j)\right)_{i,j}$$

この対応で digraph G と 0-1 matrix を適当に同一視する。

例5

G:  $\Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

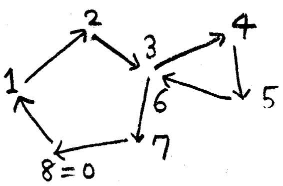
④ 長さが $q>0$ の directed path (有向道) P とは、q個の edges の組で、向き順につながっているもののことである。

例6 長さ5の directed path $0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5$

$P=((0,1),(1,2),\cdots,(4,5))$, $\boxed{P\text{の長さ}=n(P)=5}$ … edgesの数

⑤ directed cycle (有向閉路) C とは、C は directed path で、始点と終点が一致するもののことである。

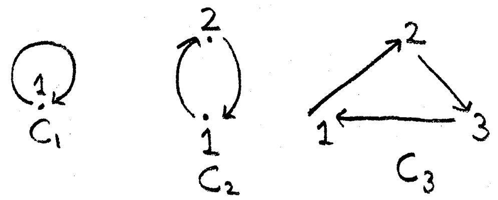
例7

C: 

$n(C)=8$ ← 途中で頂点が重なってもよい

⑥ elementary directed cycle C_k (k-cycle) とは, $\boxed{n(C_k)=k}$ である directed cycle で、途中では頂点が重ならないもののことである。

elementary directed cycles

例8


以上の準備のもとで、[A]条件をみたすC^*-algebraが一意になる条件をgraphの言葉で述べる。

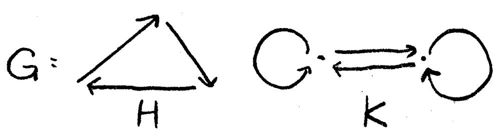
$\Sigma = V(G)$ として、$V_0 \subset \Sigma$ を次で定義する。vertex $i \in V_0$ とは、i を通る異なるelementary directed cycleが2つ以上あることである。この時、Gが(I)条件をみたすとは、

[任意のvertex j に対して directed path $j \leftarrow j_1 \leftarrow \cdots \leftarrow j_k \leftarrow i$ で始点 $i \in V_0$ となるものが存在する時にいう。

0-1 matrix A と digraph G を同一視することにして、Gが(I)条件をみたすとき、Cuntz-Krieger[10]は[A]条件をみたすC^*-algebraが一意になることを示した。以下、これを $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_G$ で表わしていくことにする。

注意　以下では、Gは常に、(I)条件をみたすものとする。

⑦ vertices i と j が連結している($i \sim j$)とは、i と j がundirected pathで結ばれているときにいう。graph G をこの同値関係~で分けた同値類を、connected component という。

例9


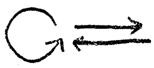
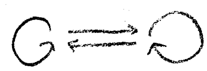
Gのconnected componentは、HとKであり、GはHとKの和である。このgraphの和に対応するのがC^*-algebraの直和である。つまり、$\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{H \cup K} = \mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_K$.

$\{\text{oriented graph}\} \supset \{\text{digraph}\} \longleftrightarrow$ 0,1行列 $A \longrightarrow$ C*代数 $\mathcal{O}_A$] Cuntz-Krieger algebra

⑧ vertices iとjが, $\boxed{\text{強連結している}(i \approx j)}$とは, iからjへと, jからiへのdirected pathが両方あることをいう。Gのvertices $V(G)$をこの同値関係$\approx$で分けた同値類をstrongly connected componentという。Gのverticesのすべてのpairsがstrongly connectedの時に, Gをstrongly connectedという。
(このことはconnectedの時も同様である)

Gがstrongly connectedでない場合には, $\mathcal{O}_G$には, *idealsが存在するが, そのありさまは, おおよそ, graph Gのcondensation graph(凝縮グラフ) $C(G)$のorder idealにより記述される。digraph Gのcondensation graph $C(G)$とは, $C(G)$のverticesは$V(G)$のstrongly connected component $C_1, C_2, \cdots, C_K$であり, $C(G)$のedges $C_\ell \longleftarrow C_m$とは, ある$i \in C_\ell$, ある$j \in C_m$があって, $i \longleftarrow j$ in Gの時をいう。この対応関係については, Cuntz [5] にくわしく述べられている。

[3] "gauge"作用を通して見たCuntz-Krieger algebra.

我々は, [13] において, $U(n) \hookrightarrow \mathrm{Out}\,\mathcal{O}_n$ (ここで, $U(n)$は$n \times n$ unitary matricesの作る群)を, $\alpha_u(S_j)=\sum_{i=1}^{n} u_{ij} S_i$で表現したが, Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$の時には, $U(n)$の元は一般にはこの表現では作用し得ない。2×2行列の時,  と  のみが, (I)条件をみたす。automorphismsは, この表現では, 前者は,

$\mathbb{T}\oplus\mathbb{T}$，後者は，$U(2)$ となる。そこで，Cuntz-Krieger algebra の場合には，"gauge" 作用を調べることが問題になる。

$\mathcal{O}_G = C^*(s_1, \cdots, s_n)$ 上に，"gauge" 変換 $\alpha : \mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G$ を $\alpha_t(s_i) = t s_i$ で定義する。この時，α_t の outerness が，digraph G の形から，次のように表わされる。

<u>定理</u>　(I) 条件をみたす digraph G が，elementary directed cycle C_K (k-cycle) をもつならば，$t^m \neq 1$ $(t \in \mathbb{T})$ に対して，α_t は $\mathcal{O}_G$ 上の outer automorphism である。

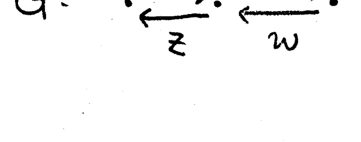
証明は，Archbold [1] の modification による。

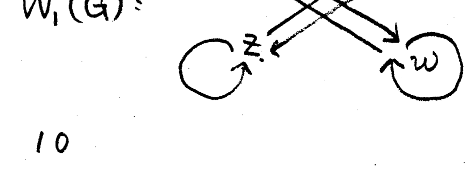
このことの結果として，

<u>系</u>　すべての Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_A$ は outer automorphism をもつ。

以下 "gauge" 作用が Cuntz-Krieger algebra にどのように影響を及ぼすかを fixed point algebra の場合に見てみる。まず，次の graph の概念を導入する。G の k-path graph (k-有向道グラフ) $\varpi_k(G)$ とは，G の長さ k の directed paths が $\varpi_k(G)$ の vertices で，それらが長さ 1 の directed path を介して結ばれる時，$\varpi_k(G)$ の点として結ばれるとする。

<u>例 10</u>　1-path graph





この k-path graph を使うと，次の定理を得る。

定理　α を period 2 の"gauge"変換 $\alpha(S_i)=-S_i$ $(\alpha\in \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G)$ とする。この時，fixed point algebra $\mathcal{O}_G^{\alpha}$ は，$\mathcal{O}_{\varpi_1(G)}$ に同型である。

この定理によれば，例12の G に対して，$\mathcal{O}_G^{\alpha_{-1}}=\mathcal{O}_2\oplus\mathcal{O}_2$ である。$\mathcal{O}_G$ の場合には，"gauge" automorphism は，Cuntz algebra の時とは違った振舞をする。G の形状によっては，"gauge" automorphism の outerness がこわれてしまうのである。

次に，α_{-1} の innerness に対する判定条件を述べる。

定理　G を strongly connected，$\alpha\in \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G$ を，$\alpha(S_i)=-S_i$ とする時，次は同値である。

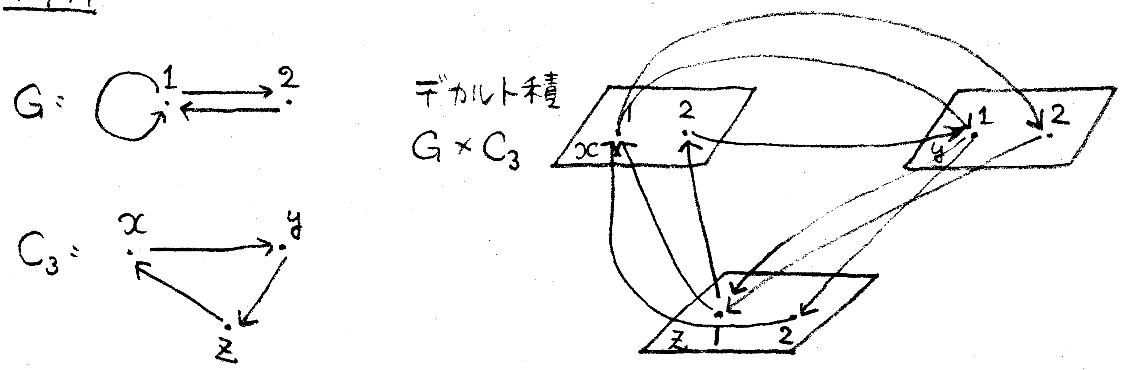
① α_{-1} は inner である。 ② G のどの directed cycle も長さが偶数である。 ③ 1-path graph $\varpi_1(G)$ は connected でない。
④ $\mathcal{O}_G^{\alpha}$ は simple でない。

④⟹① の証明は，$\mathcal{O}_G$ が simple，$\mathcal{O}_G^{\alpha_{-1}}$ が not simple とすると，Pedersen [23, Th. 8.10.12] より，α_{-1} の innerness が出る。

次に，period k の"gauge"変換から crossed product を作った時，graph の方ではどのような変化が起きるかを調べる。その前に，graph のデカルト積を定義する。graph G と elementary directed cycle C_k とのデカルト積を $\nabla(G\times C_k)=\nabla(G)\times\nabla(C_k)$ で，

edges は両方の vertices がつなげる時につなぐことで決める。

例11



この時，period k の"gauge"変換による crossed product について，次の結果を得る。これは，Cuntz-Evans の結果の1つの一般化である。

定理 $\alpha(S_i)=e^{\frac{2\pi i}{k}}S_i$ なる period k の automorphism $\alpha\in \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G$ による crossed product $\mathcal{O}_G\times_\alpha \mathbb{Z}_k$ は，$\mathcal{O}_{G\times C_k}$ に同型であり，dual action $\hat{\alpha}$ は，$G\times C_k$ のずらし回転である。

この定理の系として，次を得る。

系 G を strongly connected, $\alpha\in \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}_G$ を $\alpha(S_i)=e^{\frac{2\pi i}{k}}S_i$ とする時，$\mathcal{O}_G\times_\alpha \mathbb{Z}_k$ が simple であることと，$d(G)$ と k が互いに素であることとが同値である。(ここで，$d(G)$ は，G の period である)。

$\boxed{4}$ sub-Fock representation による Cuntz-Krieger algebra の extension とその応用.

Evans [17], Katayama は，Cuntz algebra の extension を次の

ように，Full Fock space 上に表現した。H (H^n) を n dimensional Hilbert space，Ω を Fock vacuum unit vector とする。$F(H) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus H_m$ (ここで，$H_m = \otimes^m H$，H_0 は Fock vacuum unit vector により generate される 1-dimensional Hilbert space）とおく。この時，

任意の $f \in H$ に対して，
$$a(f)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \equiv f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$$
$$a(f)\Omega = f.$$ とおけば，
$$a(f)^*(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (f_1 | f) f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$$
$$a(f)^*\Omega = 0.$$

$F(H)$ 上のこれらの bounded operators $\{a(f) \mid f \in H\}$ により generate された C^*-algebra は，Watatani [25] による Clifford C^* algebra $\mathcal{P}_n$ と同型であり，Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ の $C(F(H))$（$F(H)$ 上の compact operators 全体の作る algebra）による extension である。つまり，次の short sequence が exact になる。

$$0 \longrightarrow C(F(H)) \longrightarrow \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow 0.$$

この事を $\mathcal{O}_A$ の場合に一般化する。$A = (A(i,j))$ を n 行 n 列の 0-1 行列として，どの行もどの列も 0 ではないとする。又，A に対応する graph は，(I) 条件をみたすとする。

subspace $L \subset F(H)$ をみつけて，

$$0 \longrightarrow C(L) \longrightarrow \mathcal{P}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

になるような subspace $L (\subset F(H))$ 上の $\mathcal{O}_A$ の extension algebra $\mathcal{P}_A$ を作ることを目標にする。

$\{e_1, \cdots, e_n\}$ を n-dimensional Hilbert space H の orthonormal base とする。L_m を $\{e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)} ; A(i(k), i(k+1)) = 1 \text{ for } 1 \leqq k \leqq m-1\}$ により generate される H_m の subspace とする。$L \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus L_m$ (ここで, $L_0 = H_0$, $L_1 = H_1 = H$) とおく。また, M_mを $\{e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)} ; \prod_{k=1}^{m-1} A(i(k), i(k+1)) = 0\}$ により generate される H_m の subspace とする。$M \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus M_m$ (ここで, $M_0 = M_1 = 0$) とおく。$F(H) = L \oplus M$ となり, L を A に対応する sub-Fock space と呼ぶことにする。

$S_i \equiv P_L a(e_i)|_L$ (P_L は L 上への projection) とおく。$\mathcal{P}_A$ で, $\{S_i ; 1 \leqq i \leqq n\}$ により generate される C^*-algebra を表わす。この時, 次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>　$\mathcal{P}_A$ は L 上で irreducible であり, L 上の compact operators の作る algebra $C(L)$ を含む。更に, 次の short sequence は exact である。

$$0 \longrightarrow C(L) \longrightarrow \mathcal{P}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

証明には, 次の補題 1, 2 を必要とする。

<u>補題 1</u>　$S_k = P_L a(e_k)|_L$ は, 次の性質をみたす partial isometries である。

$S_k^* S_k \Omega = \Omega$, $S_k S_k^* \Omega = 0$.　すべての $e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)} \in L$ について,

$$S_k^* S_k (e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)}) = A(k, i(1)) e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)}$$

$$S_k S_k^* (e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)}) = \delta_{k, i(1)} e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(m)}。$$

補題2　E を $\mathcal{L}_0=H_0$ 上の projection とすると，

$$S_k^* S_k=\sum_{j=1}^{n} A(k,j) S_j S_j^* + E.$$

残りの $\mathcal{O}_A$ が $\mathcal{L}$ に irreducibly に act するのは，次の方法による。non-zero $x\in\mathcal{L}$ に対して，その直和因子 $x_m=\sum x_m(i(1),\cdots,i(m))\times e_{i(1)}\otimes\cdots\otimes e_{i(m)}$ で non-zero なものをとり，$x_m(i(1),\cdots,i(m))\neq 0$ を更に取る。$x_m(i(1),\cdots,i(m))^{-1} S_{j(1)}\cdots S_{j(n)} E S_{i(m)}^*\cdots S_{i(1)}^* x=e_{j(1)}\otimes\cdots\otimes e_{j(n)}$. これで定理が示せたことになる。

以下では，上の定理の応用について論じる。我々は，Archbold [1] の結果を拡張して，$\mathcal{O}_n$ 上の outer automorphism group $U(n)$ について論じた。ところが，$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ の場合に，α_u が $\mathcal{O}_A$ の automorphism に拡張出来る為には，$u=\begin{pmatrix}v&0\\0&w\end{pmatrix}$ が必要十分である。それでは，α_u が一般の $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る為の unitary matrices u の満たす条件は何だろうか？

$u\in U(n)$ として，H_0 上で $U_0=1$，H_m 上で，$U_m=\otimes^m u\ (m\geq 1)$ とする。$F(H)$ 上で，$F(u)=\sum_{m=0}^{\infty}\oplus U_m$ とする。この時，$F(u)$ は，$F(H)$ 上の unitary operator である。Evans [17] と Katayama は，$F(u)$ が $\mathcal{P}_n=C^*(a(e_i);1\leq i\leq n)$ 上の automorphism β_u (ここで，$\beta_u(a(e_i))=F(u)a(e_i)F(u)^*=\sum_k u_{ki}a(e_k)$) を implement することを示した。ここで，先に，sub-Fock space $\mathcal{L}$ が $F(u)$ を reduce する $u\in U(n)$ の条件を考える。

補題 $A=(A(i,j))$ を $A(i,j)\in\{0,1\}$ なる $n\times n$ matrix, $u=(u_{ij})$ を unitary matrix で, $A(i,j)=0$, $A(k,m)=1$ ならば $u_{ki}u_{mj}=0$ $(1\leq i,j,k,m\leq n)$ をみたすものとする。この時, A に対応する sub-Fock space $\mathcal{L}$ は $F(u)$ を reduce する。

この補題を用いて, α_u が $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る条件を示す。

定理 $\mathcal{O}_A=C^*(T_1,\cdots,T_n)$ とする。この時, $u\in U(n)$ に関する次の条件は同値である。

(1) $\alpha_u(T_i)=\sum_k u_{ki}T_k$ は, $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る。

(2) $(1-A(i,j))A(k,m)u_{ki}u_{mj}=0$ $(1\leq i,j,k,m\leq n)$

(3) $A(i,j)=0$, $A(k,m)=1$ ならば $u_{ki}u_{mj}=0$ $(1\leq i,j,k,m\leq n)$

この定理の系として, 次を得る。

系 $\mathcal{O}_A=C^*(T_i;1\leq i\leq n)$ とする。この時, $\mathcal{O}_A=\mathcal{O}_n$ であることは, すべての $u\in U(n)$ に対して, α_u が $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来ることと必要十分である。

digraph G が, adjacency matrix A により表現されているとして, G の vertices i と j が <u>equivalent</u> であるということを, すべての $k\in V(G)$ について, $A(i,k)=A(j,k)$, $A(k,i)=A(k,j)$ が成り立つことで定義する。この時, この equivalent を使って, この定理のもう1つの系を得る。

系 $V(G)=\{1,2,\cdots,n\}$ である digraph G で, $1,2,\cdots,m$ が

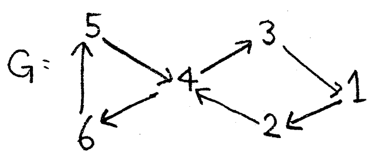
equivalentなものを取る。もし $u=(u_{ij})$ が unitary matrix であり、$u_{ij}=\delta_{ij}$ が $m+1\leqq i,j\leqq n$ について成り立つならば、α_u は、$\mathcal{O}_G$ 上の automorphism に拡張出来る。更に、もし G が strongly connected ならば、α_u は、$u\neq 1$ に対して、outer である。

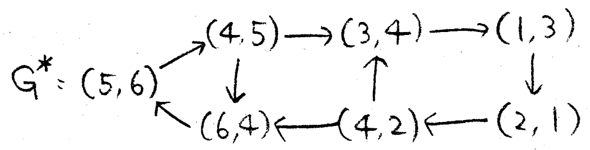
5 digraph上の free category からみた Cuntz-Krieger algebra の extension と adjoint graph

この節では、Cuntz-Krieger algebra の extension のもう1つの例を与える。その為に、まず、adjoint graph について説明する。

digraph G の adjoint graph G^* とは、G のすべての 1-paths $u_1, u_2, \cdots, u_m$ を vertices とし、G において u_i の終点が u_j の始点と一致するとき、そしてそのときに限り、点 u_i から点 u_j への edge をもつような digraph のことである。

例12





digraph G が (I) 条件をみたすとき、adjoint graph G^* も (I) 条件をみたす。更に、次のことが adjoint graph について成立する。

定理 $\mathcal{O}_G$ を Cuntz-Krieger algebra とするとき、$\mathcal{O}_G=\mathcal{O}_{G^*}$.

Higgins [27] に従って，G を digraph とするとき，もし $D(G)$ をその morphisms が G のすべての paths からなり，またその objects が $\nabla(G)$ からなっている category であるとき，$D(G)$ を，G の free category とよぶ。 $s(g)$ を $g \in D(G)$ の source，$t(g)$ を g の target とする。$\ell^2(D(G))$ で orthonormal basis $\{e_d ; d \in D(G)\}$ ($g \in D(G)$ に対して，$e_d(g) = \delta_{d,g}$) をもつ $D(G)$ 上のすべての square summable sequence からなる Hilbert space を表わす。
また、各 $i \in \nabla(G)$ について，H_i を $\{e_d ; d \in D(G), s(d) = i\}$ により生成された $\ell^2(D(G))$ の subspace とする。次に，$\ell^2(D)$ 上に $D(G)$ の left regular representation u を定義する。各 $g \in D(G)$ に対して、$\ell^2(D(G))$ 上の partial isometry u_g を，

$u_g e_h = e_{gh}$ ($s(g) = t(h)$ のとき)，$u_g e_h = 0$ (そうでないとき)

で定義する。$\{u_g ; g \in D(G)\}$ により生成された C^*-algebra を，$C^*_r(G)$ で表わすことにする。この時に，

$u_g^* e_h = e_k$ (もしある k について，$h = gk$ のとき)

$u_g^* e_h = 0$ (そうでないとき) なので，

すべての H_i は $C^*_r(G)$ のもとに invariant になる。そこで，$a \in C^*_r(G)$, $i \in \nabla(G)$ に対して，$\rho_i(a) = a|_{H_i}$ とおくと，ρ_i は，H_i 上の $C^*_r(G)$ の表現であり，$\bigoplus_{i \in \nabla(G)} \rho_i$ は，$\ell^2(D(G))$ 上の $C^*_r(G)$ の identity representation である。

この表現を使うことにより，次の定理を得る。

<u>定理</u>　この表現 ρ_i は、$C_r^*(G)$ にたいして irreducible であり、$\rho_i(C_r^*(G))$ は compacts $C(H_i)$ を含む。更に、G が (I) 条件をみたせば、次の short sequence

$$0 \longrightarrow C(H_i) \longrightarrow \rho_i(C_r^*(G)) \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow 0$$

は exact である。

$\boxed{6}$ <u>Weak extension group</u>

この節では、任意の finitely generated abelian group H に対して、separable, simple, unital C^*-algebra A で、$Ext^w(A)$ が H に同型になるものが存在することを示す。実際には、simple Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G$ が、A として取れる。

$\mathcal{Q}(H)$ で、infinite dimensional separable Hilbert space H 上の Calkin algebra を表わす。π を $B(H)$ から $\mathcal{Q}(H)$ への quotient map とする。separable C^*-algebra A の extension とは、A から $\mathcal{Q}(H)$ への star monomorphism のことである。2つの extensions ρ, σ が weakly equivalent とは、$\rho(x) = U\sigma(x)U^*$ をみたす partial isometry $U \in \mathcal{Q}(H)$ が存在するときにいう。extensions の weak equivalence classes の set を、$Ext^W A$ で表わす。Cuntz-Krieger [10] は、$Ext^W \mathcal{O}_G$ を次のように決定した。

<u>定理</u>(Cuntz-Krieger)　$\mathcal{O}_G$ の weak extension group は、$\mathbb{Z}^n/(1-G)\mathbb{Z}^n$ に同型である。(ここで、$\mathbb{Z}$ は有理整数全体、n は $V(G)$ の個数)

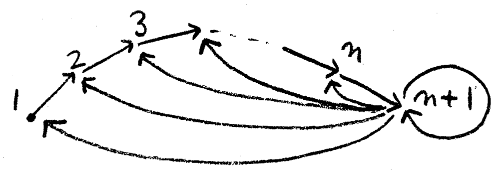
このCuntzとKriegerの結果を使って、次の定理を得る。

<u>定理</u>　Hをfinitely generated abelian groupとする。このとき、simple Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G$で、$\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_G=H$をみたすものが存在する。

証明は、$H=\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{n(1)}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{n(m)}$とかけることを使って、以下のように、帰納的に行なえばよい。

<u>補題1</u>

$$G(n)=\left.\overbrace{\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\1&\ddots&&\vdots\\&\ddots&0&\vdots\\0&&1&1\end{pmatrix}}^{n+1}\right\}n+1$$



とすると、この時、$\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_{G(n)}=\mathbb{Z}_n\ (n\geqq 1)$

<u>補題2</u>

$$G(k|n)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&&&\begin{matrix}1&0\\\vdots&\vdots\\1&0\end{matrix}\\&\ddots&&\\&&1&\\\hline 1&\cdots&1&\\&&&G(n)\\1&\cdots&1&\\0&\cdots&0&\end{array}\right)\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\}k\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

この時、$\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_{G(k|n)}=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{k}\oplus\mathbb{Z}_n$

<u>補題3</u>

$$G(m,n)=\left(\begin{array}{c|c}G(m)&\begin{matrix}1\\\vdots\\1\\0\\1\end{matrix}\\\hline\begin{matrix}1\\\vdots\\1\\0\end{matrix}&G(n)\end{array}\right)$$

この時、$\mathrm{Ext}^w\mathcal{O}_{G(m,n)}=\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ に対応する matrix は，

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&0\\ \vdots&\vdots\\ 1&0\end{matrix} & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&1\\0&\cdots&0\end{matrix} & G(m) & \begin{matrix}1\\ \vdots\\1\\0\\1\end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix}1\\ \vdots\\1\\0\end{matrix} & G(n)\end{array}\right)$$ である。

$\boxed{7}$ 3×3 行列に対する simple Cuntz-Krieger algebra の分類

この節では，Cuntz-Krieger algebras $\mathcal{O}_G$ の分類理論を試みる。K_0-group を用いて，$\mathcal{O}_G$ は粗く分類されるが，我々は K_0-group の精密化である marker の概念を使って，3×3 行列の場合には，$\mathcal{O}_G$ が完全に分類出来ることを示す。最初に，K_0-group の定義を述べる。K で infinite-dimensional separable Hilbert space 上の compact operators の C^*-algebra を表わす。 p, q を C^*-algebra A の projections とする。$x\in A$ が存在して，$x^*x=p$，$xx^*=q$ のとき，$p\sim q$ とかく。$[p]$ で，この同値関係による p の同値類を表わす。この時， $S\equiv\{[p]\,;\ p$ は $K\otimes A$ の projection$\}$ とおくと，S は，加法 $[p]+[q]\equiv[p'+q']$（ここで，p', q' は，$p'\in[p]$，$q'\in[q]$ であり，$p'q'=0$ なる projections である）をもつ commutative semigroups である。

$K\otimes A$ の projections p, q については，これらの性質をみたす

p', q'をみつけることは，常に可能である。そして，$[p'+q']$は、p', q'のとり方によらない。もしAがunitをもつとき，$K_0(A)$はこのsemigroupのGrothendieck groupとして定義される。ところが，unitをもつpurely infinite simple C^*-algebra Aに対しては，$K_0(A) = \{[p] \mid p$はAのnon-zero projection$\}$になることが知られている。

Aの元とする必要がない

この$K_0(A)$に関係して，新しいinvariantsを導入する。Aをunital C^*-algebra，Aut $K_0(A)$を$K_0(A)$のautomorphism groupとする。$g, h \in K_0(A)$とするとき，ある$\alpha \in \mathrm{Aut}\, K_0(A)$に対して、$g = \alpha(h)$となるとき，$g \sim h$とかくことにする。$K_0(A)^\sim = K_0(A)/\sim$とおき，$g \in K_0(A)$について，$g^\sim$でこの同値関係によるgの同値類を表わすことにする。この時，Aの<u>marker</u>を，$[1]^\sim$で決める。ここで，$[1]$は，$1 \in A$の$K_0(A)$へのimbeddingである。記号的に，$\mathrm{mark}(A) = [1]^\sim$とかく。この量について次が成り立つ。

<u>定理</u>　AとBをunital C^*-algebraとする。もしAとBが同型ならば，その時，$K_0(A) = K_0(B)$であり，$\mathrm{mark}(A) = \mathrm{mark}(B)$である。

更に，matrix algebra M_Kのtensor productのFのmarkerのtranslationsを調べる。$x^\sim \in K_0(A)^\sim$について，kをintegerとするとき，$k \cdot x^\sim$を$(kx)^\sim$で定義する。この$k \cdot x^\sim$は，$x^\sim$の表

現によらないから, well-defined である。次が成り立つ。

<u>定理</u>　unital C^*algebra A に対して, $\mathrm{mark}(A\otimes M_k)=k\cdot\mathrm{mark}(A)$.

この定理の系として, 次を得る。

<u>系1</u>　もし $K_0(A)=\mathbb{Z}_n$, $\mathrm{mark}(A)=1^\sim$ とすると,
$\mathrm{mark}(\mathcal{A}\otimes M_k)=k^\sim$ $(2\leq n\leq\infty)$ (ここで, $\mathbb{Z}_\infty=\mathbb{Z}$)

<u>系2</u> (Paschke-Salinas)
もし $(n-1)$ と k が互いに素でなければ, $\mathcal{O}_n\otimes M_k$ と $\mathcal{O}_n$ は同型にならない。

注意　<u>以下, digraph はすべて strongly connected とする。</u>

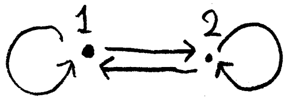
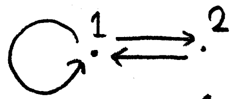
つまり, simple Cuntz-Krieger algebra の分類問題を考える。
その前に, 道具を準備する。

<u>定義</u>　G を digraph として, $\Gamma^-(i)=\{j\in V(G);\, j\to i\}$ とおく。ある $k\neq m\in V(G)$ に対して, $\Gamma^-(k)=\Gamma^-(m)$ と仮定する。この時, k から m への <u>transfered</u> graph $H=G(k\to m)$ を次で定義する。$V(H)=V(G)$ として, $E(H)=(E(G)\setminus\{(m,i)\in E(G);\, i\in V(G)\})\cup\{(m,k)\}$ とする。$H=G(k\to m)$ の adjacency matrix B は次のようになる。A を G の adjacency matrix として, A_i を A の i-th row vector とする。そうすると, $\Gamma^-(k)=\Gamma^-(m)$ は, $A_k=A_m$ のことより,

$$B(i,j)=\begin{cases} A(i,j) & (i\neq m)\\ \delta_{k,j} & (i=m).\end{cases}$$

簡単の為，このことを，$A \underset{\langle A_k \to A_m \rangle}{\Longrightarrow} B$ でかくことにする。

<u>例</u>

 $\Longrightarrow$ 

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \quad \langle A_1 \to A_2 \rangle \quad B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

<u>定理</u>　kからmへのdigraph Gのtransfered graphを $H=G(k\to m)$ とする。この時，Θ_H は Θ_G と同型である。

更に，transfered graphの定義を一般化する。

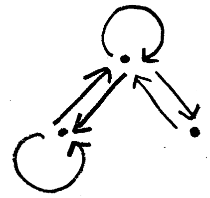
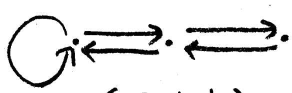
<u>定義</u>　Aを0−1 matrixとする。$E_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)$ とおく。相異なる $k(1), k(2), \cdots, k(r), m(1), \cdots, m(s)$ で，$p\notin\{m(1),\cdots,m(s)\}$ に対して，$A_p=E_{k(1)}+\cdots+E_{k(r)}+A_{m(1)}+\cdots+A_{m(s)}$ とする。この時，$n\times n$ matrix B を次で定義する。

$$B(i,j)=\begin{cases} A(i,j) & (i\neq p) \\ 1 & (i=p \text{ で}, j\in\{k(1),\cdots,k(r),m(1),\cdots,m(s)\}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}). \end{cases}$$

このBのことを，Aを<u>primitively</u>に<u>transfer</u>したものという。これを，$A \underset{prim}{\Longrightarrow} B$ 又は，$A \xrightarrow[E_{k(1)}+\cdots+E_{k(r)}+A_{m(1)}+\cdots+A_{m(s)}\to A_p]{} B$

とかく。

<u>例</u>

 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\underset{A_2+E_3\to A_1}{\Longrightarrow}$  $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

primitive transformation '$\underset{prim}{\Longrightarrow}$' により生成される同値関係を, primitive equivalence $\underset{prim}{\approx}$ とよぶ。ここで, $A \underset{prim}{\approx} B$ とは, $C_1, \cdots, C_k$ が存在して, $A \underset{prim}{\Longleftrightarrow} C_1 \underset{prim}{\Longleftrightarrow} C_2 \underset{prim}{\Longleftrightarrow} \cdots\cdots \Longleftrightarrow C_k \underset{prim}{\Longleftrightarrow} B$

($C \underset{prim}{\Longleftrightarrow} D$ は, $C \underset{prim}{\Longrightarrow} D$ か $D \underset{prim}{\Longrightarrow} C$ のことを意味する)

transfered graph の定理の拡張が, 成り立つ。

<u>定理</u> A と B が primitive equivalent であれば, $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。

以上の準備のもとで, 3×3 irreducible matrices A に対する Cuntz Krieger algebras $\mathcal{O}_A$ を分類することが出来る。

<u>定理</u> A と B を 3×3 irreducible matrices とする。この時, 次は同値である。

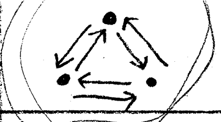
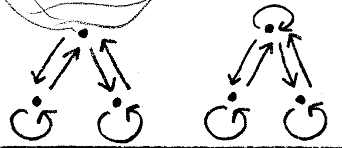
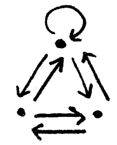
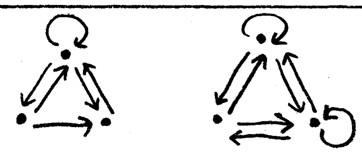
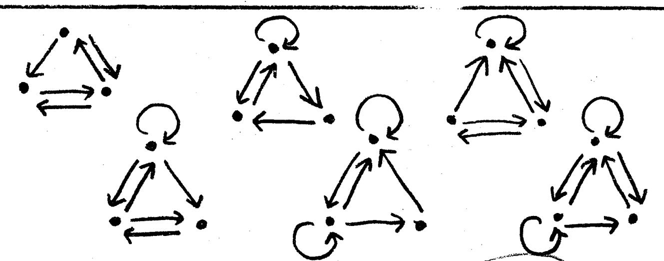
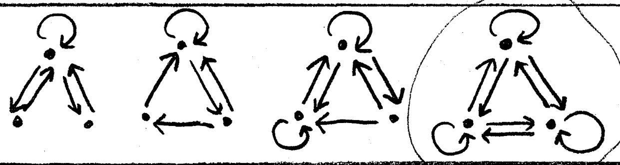
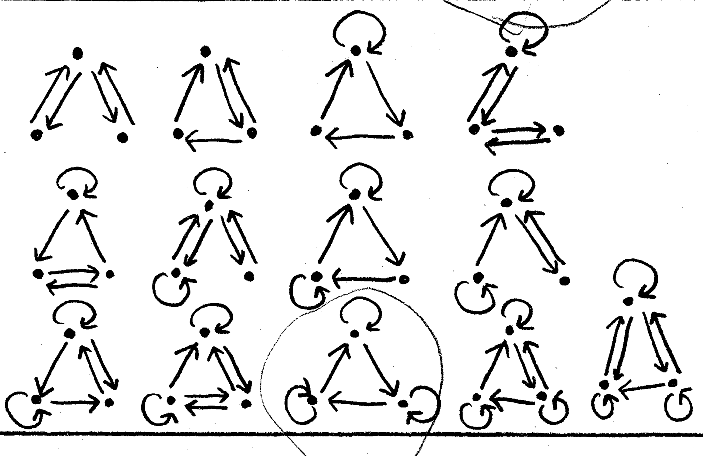
(1) A と B は primitive equivalent である。

(2) $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。

(3) $K_0(\mathcal{O}_A) = K_0(\mathcal{O}_B)$, $\mathrm{mark}(\mathcal{O}_A) = \mathrm{mark}(\mathcal{O}_B)$

次に, この結果を分類表の形にまとめてみる。

分類表

K_0	marker	digraph	代表
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\bar{0}$		
$\mathbb{Z}$	$\bar{0}$		
$\mathbb{Z}_4$	$\bar{2}$		$\theta_5 \otimes M_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\bar{1}$		θ_4
$\mathbb{Z}_2$	$\bar{0}$		$\theta_3 \otimes M_2$
	$\bar{1}$		θ_3
0	$\bar{0}$		θ_2

Parry と Sullivan は、$\det(1-A)$ が、transition matrix A をもつ topological Markov chains の flow equivalence の topological invariant であることを示した。Cuntz-Krieger [10] は、次のことを証明している。(1) もし transition matrices A, B をもつ topological Markov chains T, S が flow equivalent であるならば、その時、Cuntz-Krieger algebras $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は、stable isomorphic である。(2) もし $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ が stable isomorphic であるならば、その時、$|\det(1-A)| = |\det(1-B)|$ である。

私的な会話で、Cuntz は我々に次の興味ある問題を提出してくれた。<u>Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ に対して、$\det(1-A)$ は、stable isomorphic invariant であるか?</u>

この問題について我々は、反例を見つけた。それは、3×3 matrix に対する我々の分類定理による。結局、その定理から、次の系が出る。

<u>系</u> $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ が同型ではあるが、$\det(1-A) \neq \det(1-B)$ であるような matrices A, B が存在する。

証明は、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を取ればよい。

この時、$K_0(\mathcal{O}_A) = K_0(\mathcal{O}_B) = 0$. 定理から、$\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。ところが、$\det(1-A) = 1 \neq -1 = \det(1-B)$.

注意 上の系は, "real" C*-algebra $\mathcal{O}_A$ についても成立する。

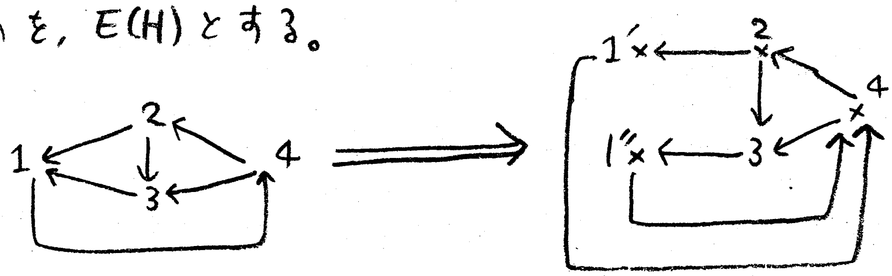
8 補遺

digraphのadjointの一般化として, explosionというものが考えられる。

定義 Gをdigraphとする。$\Gamma^-(i)=\{j\in V(G): i\leftarrow j\}$の個数が, ある$i\in V(G)$に対して, 2よりも大きいとする. ($i=1$とする). $\Gamma^-(1)=V\cup W$と分解する。この時, Gの1でのexplosion H (VとWに関する)とは, 次のものである。

$V(H)=(V(G)\setminus\{1\})\cup\{v_0,w_0\}$, $E(H)=(E(G)\setminus\{(1,j),(k,1);\ j,k\in V(G)\})\cup\{(v_0,v),(w_0,w);\ v\in V\setminus\{1\}, w\in W\}\cup\{(m,v_0),(m,w_0);\ v\in V, w\in W, m\in\Gamma^+(1)\}$ となるものである。ただし、もし$1\in V$ならば, $E(H)$に$\{(v_0,v_0),(v_0,w_0)\}$をつけ加えたものを, $E(H)$とする。

例



定理 Hをdigraph Gのexplosionとすると, この時, $\mathcal{O}_H=\mathcal{O}_G$である。

(ただし, この操作のくり返しも, explosionとよぶ。)

REFERENCES.

[1] R.J.Archbold, On the 'flip-flop' autoromphism of $C^*(S_1,S_2)$, Quart. J. Math., Oxford, (2), 30(1979), 129-132.

[2] C.Berge, Graphs and Hypergraphs, North Holland, 1973.

[3] O.Bratteli, Inductive limits of finite-dimensional C*-algebras, Trans. Amer.Math. Soc., 17(1972), 195-234.

[4] J.Cuntz, Simple C*-algebras generated by isometries, Commun. Math. Phys., 57(1977), 173-185.

[5] ———, A class of C*-algebras and topological Markov chains II: Reducible Markov chains and the Ext-functor for C*-algebras, Preprint.

[6] ———, K-theory for certain C*-algebras, to appear in Ann. Math.

[7] ———, K-theory for certain C*-algebras II, to appear in J. Operator Theory.

[8] ———, Automorphisms of certain simple C*-algebras, Preprint.

[9] ——— and D.E.Evans, Some remarks on the C*-algebras assciated with certain topological Markov chains, Preprint.

[10] ——— and W.Krieger, A class of C*-algebras and topological Markov chains, Invent. Math., 56(1980), 251-268.

[11] M.Enomoto, M.Fujii and R.Ichihara, The weak extension groups of Cuntz-Krieger algebras, to appear in Math. Japon.

[12] ———, ———,H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras II, Math. Japon., 24(1979), 463-468.

[13] ———, H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1979), 231-234.

[14] ———,——— and ———, C*-algebras on free semigroups as extensions of Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1980), 527-531.

[15] M.Enomoto and Y.Watatani, A graph theory for C*-algebras, Math. Japon., 25(1980),in press.

[16] ——————, Young diagrams and C*-algebras, to appear in Math. Japon.

[17] D.E.Evans, On O_n, Preprint.

[18] M.Fujii, On extensions of the Cuntz algebra, Math. Japon., 24(1980), 537-539.

[19] ——— and Y.Watatani, Cuntz-Krieger algebras assciated with adjoint graphs, Math. Japon., 25(1980), in press.

[20] D.Olesen and G.K.Pedersen, Some C*-dynamical systems with a single KMS state, Math. Scad., 42(1978), 111-118.

[21] O.Ore, Theory of Graphs, Amer. Math Soc. Colloquium Publ. 38, 1962.

[22] W.Paschke and N.Salinas, Matrix algebras over O_n, Michigan Math. J., 26(1979), 3-12.

[23] G.K.Pedersen, C*-algebras and Their Automorphism Groups, London Math. Soc. Mono., 14, Academic Press, 1979.

[24] M.Pimsner and S.Popa, The Ext-groups of some C*-algebras considered by J.Cuntz, Rev. Roum.Math. Pures Appl., 23(1978), 1076-1096.

[25] Y.Watatani, Clifford C*-algebras, Math. Japon., 24(1980), 533-536.

[26] M.Pimsner and D.Voiculescu, Imbedding the irrational rotation C*-algebra into an AF-algebra, Preprint.

[27] P.J.Higgins, Categories and Groupoids, Van Nostrand, 1971.