数理解析研究所講究録
第 398 巻 1980 年 45-50

Closed Derivations on Operator Algebras

九大 理　太田昇一

この講演ではC^*環の非有界微分子の von Neumann 環上への拡張について述べます。

1. 準備　C^*環 $\mathfrak{A}$ (von Neumann 環 M) における linear map δ が以下の条件；

(1) 定義域 $\mathfrak{D}(\delta)$ が norm-dense (σ-weak-dense) in $\mathfrak{A}$ (M) な $*$-部分環

(2) $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$,　$\delta(x^*) = \delta(x)^*$ for $x, y \in \mathfrak{D}(\delta)$

を満たすとき，$*$-derivation と言います。　さらに，von Neumann 環 M における $*$-derivation δ が "for $\forall a \in \overline{R(\delta)}^{\omega}$ (δ の値域の weak-closure)，$\exists$ net $\{a_\lambda\} \subset \mathfrak{D}(\delta)$ s.t. $a_\lambda \to 0$ (ω) and $\delta(a_\lambda) \to a$" を満たすとき，σ-singular と呼ぶことにします。

$I(\delta) \equiv \{a \in M ;\ (0, a) \in \overline{G(\delta)}^{\omega}\}$ (ここに，$\overline{G(\delta)}^{\omega}$ は δ のグラフの $M \oplus M$ における weak-closure を示す) とおくと，簡単な計算により，$I(\delta)$ は M の weakly closed な両側 ideal に

なることが解ります。故に、ある central projection P_δ が存在して $I(\delta)=MP_\delta$ と書ける。以上の定義，記号のもとに，次のような分解定理を証明することが出来る。

定理 1 [4]. Mを von Neumann 環とし、δ を M における $*$-derivation とする。このとき，上に述べた P_δ は δ を normal な部分と singular な部分に分解する，すなわち，

$$\delta = \delta_{P_\delta} + \delta_{1-P_\delta}$$

ここに、δ_{P_δ} ($\delta_{P_\delta}(x) \equiv P_\delta \cdot \delta(x)$) は σ-singular な M における $*$-derivation であり、δ_{1-P_δ} ($\delta_{1-P_\delta}(x) \equiv (1-P_\delta)\cdot\delta(x)$) は σ-weakly closable な M における $*$-derivation である。

2. Adjoint of derivations Mを von Neumann 環とし、δ を M における $*$-derivation とする。δ の adjoint δ^* は，

$$\mathcal{D}(\delta^*) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in M_* \ : \ x \in \mathcal{D}(\delta) \to \langle \delta(x), \varphi \rangle : \text{M上の } \sigma\text{-weakly continuous} \\ \text{な functional に拡張される} \end{array} \right\}$$

を定義域とし 各 $\varphi \in \mathcal{D}(\delta^*)$ に対して

$$\langle \delta(x), \varphi \rangle \equiv \langle x, \delta^*\varphi \rangle \quad \text{for } x \in \mathcal{D}(\delta)$$

によって定義される linear mapping である。明らかに $\mathcal{D}(\delta^*)$ は invariant subspace であり，もしも δ が σ-singular ならば $\delta^*\varphi = 0$ for $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\delta^*)$ である。Banach 空間論から、δ が σ-weakly closable であるための必要十分条件は、$\overline{\mathcal{D}(\delta^*)}^{n}$ が、M_*

と一致することであるが、この一般化として次の定理を示すことが出来る。

定理2 [5]. M を von Neumann 環とし、δ を M における $*$-derivation とする。そのとき $\overline{\mathcal{D}(\delta^*)}^n = M_*(1-p_\delta)$, すなわち, $\mathcal{D}(\delta^*)$ の polar は $I(\delta)$ と一致する。

3. σ-weakly closed extension

$\mathfrak{A}$ を C^*環 $(\ni 1)$ とし、δ を $\mathfrak{A}$ の $*$-derivation とする。$\mathfrak{A}$ を universal enveloping von Neumann 環 $\mathfrak{A}^{**}$ の σ-weak-dense な $*$部分環と同一視すると、自然に δ は $\mathfrak{A}^{**}$ における $*$-derivation とみなせる。

命題3 [5]. $\delta \neq 0$ を C^*環 $\mathfrak{A}$ の $*$-derivation とする。もしも δ が norm-closable ならば、δ は $\mathfrak{A}^{**}$ において σ-singular ではない。

注意 もしも $\mathfrak{A}$ が simple ならば逆も成立する。

問題 "δ が C^*環 $\mathfrak{A}$ の閉 $*$-derivation とすると, 適当な表現のもとに σ-weakly closed なものに拡張されるか?"

例 C^*環 $\mathfrak{A}$ に $\delta^*\omega = 0$ なる state ω が存在するとき (例えば δ が $\mathfrak{A}$ の strongly-continuous one-parameter group of $*$-automorphisms の infinitestimal generator), ω による G-N-S 表現 $\{\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega\}$ を考えると, $\pi(\delta(x)) \equiv \delta_\pi(\pi(x))$ は well-defined で、ある symmetric operator H が $\mathfrak{H}_\omega$ に存在して, $\delta_\pi(\pi(x)) = i\,\overline{[H, \pi(x)]}$ for

$x \in \mathcal{D}(\delta)$ と書ける。このように δ_π は σ-weakly closable である。

この例でもわかるように、σ-weakly closed extension の問題は"C^*-環の閉 *-derivation が適当な表現のもとに、ある symmetric operator で表現出来るか？"という問題と密接に関連しているが、それについては、[2],[3] を参照して下さい。

定義　δ を C^*環 $\mathfrak{A}$ の *-derivation とする。もし、適当な $\mathfrak{A}$ から Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ への *-表現 π で、$\delta(\ker\pi \cap \mathcal{D}(\delta)) \subset \ker\pi$ かつ、δ_π ($\delta_\pi(\pi(x)) \equiv \pi(\delta(x))$) が σ-weakly closable in $\pi(\mathfrak{A})''$ なるものがあるとき、δ は σ-weakly closed extension をもつと言う。

定理4 [5]　$\mathfrak{A}$ を C^*環とし、δ を *-derivation in $\mathfrak{A}$ (ただし $P_\delta \neq 1$) とする。δ が σ-weakly closed extension をもつための必要十分条件は、ある $G \neq \{0\} \subset \mathcal{D}(\delta^*)$ で、

$$\begin{cases} (1) & G : \text{invariant under } \mathcal{D}(\delta) \\ (2) & \text{for } {}^\forall\varphi \in G, \quad \delta^*\varphi \in \overline{G}^{\,\kappa} \end{cases}$$

を満たすものが存在することである。

(証明) [詳しくは [5] を参照]

($\Rightarrow$) 上の定義に述べた π が存在したとすると、

$G = \{ {}^t\pi \circ \varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{D}(\delta_\pi^*) \}$ と取るとよい。

($\Leftarrow$) (1) (2) を満たす G が存在したとすると、G° は σ-weakly closed よって、$G^\circ = \mathfrak{A}^{**} z$ (${}^\exists z$: central projection in $\mathfrak{A}^{**}$).

πとして $x \in \mathfrak{A} \longmapsto \pi(x) = x(1-g)$ を考えると，このπが（定義における）必要な条件を満たしている：

注意　定理４の $P_\delta \neq 1$ の条件は，$\mathfrak{D}(\delta^*) \neq \{0\}$ と同値であり，従って，δが norm-closable なら満たしている。

又定理４の(1)と(2)の条件は一般に独立である．実際に，$C[0,1]$ の通常の derivative $\frac{d}{dt} \equiv \delta$　（$\mathfrak{D}(\delta) = C^1[0,1]$）に対して，

$$R(\delta^*) \not\subset \overline{\mathfrak{D}(\delta^*)}^{n}$$

となっている。

系５　$\mathfrak{A}$，δを定理４の仮定と同じとすると，
$\exists \alpha \in \mathbb{R}$; $\overline{R(\alpha+\delta)}^{n} \neq \mathfrak{A} \Rightarrow \delta$ は σ-weakly closed extension をもつ。

例　$\mathfrak{A} \equiv C[0,1]$，$\lambda \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ with $\lambda(t_0) = 0$ $(\exists t_0 \in [0,1])$ とするとき，$\delta_\lambda \equiv \lambda \frac{d}{dt}$ は σ-weakly closed extension をもつ。

References

[1] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*. Springer-Verlag (1979)

[2] A. Inoue and S. Ôta, *Derivations on algebras of unbounded operators*, to appear in Trans. A.M.S.

[3] A. Inoue, S. Ôta and J. Tomiyama, *Derivations of*

Operator Algebras into Spaces of Unbounded Operators, preprint (1979)

[4] S. Ôta, Decomposition of Unbounded Derivations in Operator Algebras, preprint (1979)

[5] " , Closed derivations in operator algebras, in preparation.

[6] S. Sakai, The Theory of Unbounded Derivations in C*-algebras, Lecture Notes in Copenhagen Univ. and Univ. of Newcastle upon Tyne (1977).