

Normalizers of the diagonal algebras in the von Neumann algebras associated with principal measure groupoids.

愛媛大 理 大内 本夫

1. groupoid の概念はエルゴード理論に対する有効な武器として最初に Mackey によって定義され、測度空間上の変換群の軌道の形状を調べるために使われてきた。更に、Connes - Takesaki は groupoid を flow of weights の概念を定式化するために用い、 groupoid と作用素環の関係を様々な角度から研究している。また、P. Hahn, A. Connes らによって groupoid から von Neumann 環を構成する方法が示されている。これらの構成法は群-測度空間構成法や Krüger の構成法を統一的な視点から眺めることができるという意味で重要なものであり、すべての von Neumann 環が groupoid から作られる可能性もある。 groupoid から作られる作用素環は diagonal 環と呼ばれる特別な極大可換環をもっている。本稿では、 diagonal 環の normalizer の構造を調べることにより、 groupoid の軌道を決定することを試みる。離散的な可換力学系においては次のことが知られ

ている。可算離散群 H が測度空間 (M, m) に自己同型として作用している時、Krieger の構成法により、von Neumann 環 \mathcal{M} とその diagonal 環 \mathcal{A} が得られる。 H の full group $[H]$ の元は \mathcal{A} の \mathcal{M} における normalizer の元に対応し、 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の同型類は H の弱同値類によって決定される。我々は上の事実を一般の局所コンパクトな変換群から得られる principal measure groupoid に拡張することを試みる。また groupoid の軌道の形状と対応する作用素環の型との関係も考察する。なお、以下 P. Hahn の構成法によって議論を進めるが、その場合に現われてくる作用素環と A. Connes によって定義されたものとの関係は、[1, §IV, Th.10, §V, Th.4] において明らかにされている。

2. この章では以下の章で使われる記号の説明をする。特に、[4, 5] の結果を要約する。 G を analytic groupoid [8, p.273], $G^{(2)} \subset G \times G$ を積 $(x, y) \mapsto xy$ の定義域とする。 $x \in G$ に対して、 x の左単位元 xx^{-1} を $r(x)$ で、右単位元 $x^{-1}x$ を $d(x)$ で表わす。 G の単位空間 $U_G = r(G)$ は G の部分集合で、相対 Borel 構造に関して analytic 空間になる。 (G, C) を principal measure groupoid [4, Def. 2.3, 8, p.274], (ν, μ) を (G, C) の Haar 測度とする [4, Def. 3.11]。 U_G の μ -null Borel set V に対して、 $G|V = r^{-1}(V) \cap d^{-1}(V)$ とおけば、 $(G|V, C)$ は measure groupoid になる。このような groupoid を (G, C) の

inessential reduction (i.r.) と呼ぶ。 (ν, μ) の r -分解を $\nu = \int_{U_G} \nu^u d\mu(u)$ によって表わす。 $\Pi(G, \nu, \mu)$ を $L^1(G, \nu)$ の部分集合で [5, §1] において定義されたものとする。 $G^{(2)}$ 上の strict Borel 2-cocycle σ と $f \in \Pi(G, \nu, \mu)$ に対して, $L^2(G, \nu)$ 上の有界線形作用素 $L_\sigma(f)$ を

$$(L_\sigma(f)j | k) = \iint f(x) \sigma(y^{-1}, x)^{-1} j(x^{-1}y) \overline{k(y)} d\nu^{r(x)}(y) d\nu(x)$$

($j, k \in L^2(G, \nu)$) によって定義する。作用素環 $M_\sigma = \{L_\sigma(f); f \in \Pi(G, \nu, \mu)\}'$ を (G, ν) と σ に対応する作用素環とよぶ。

$L^2(G, \nu)$ 上の modular involution J_σ が存在して, $J_\sigma M_\sigma J_\sigma = M_\sigma'$ となる。 $\sigma = 1$ の時, M_σ のかわりに M と書くことにする。

$\alpha \in L^\infty(U_G, \mu)$ に対して, 有界線形作用素 $\hat{\alpha}$ を $(\hat{\alpha}j)(x) = \alpha(dx) j(x)$ ($j \in L^2(G, \nu), x \in G$) によって定義する。 diagonal 環 $A = \{\hat{\alpha}; \alpha \in L^\infty(U_G, \mu)\}$ は M_σ の極大可換環になっている。

A の M_σ に関する normalizer を $N(M_\sigma, A)$ と表わす。

測度空間 (M, m) の自己同型とは, M から M 上への Borel isomorphism で m の measure class $[m]$ を不変にするものである。 (M, m) の自己同型全体の集合を $\text{Aut}(M, m)$ で表わす。

$T \in \text{Aut}(M, m)$, $\alpha \in L^\infty(M, m)$ に対して, $L^\infty(M, m)$ の元 $T\alpha$ を $(T\alpha)(x) = \alpha(T^{-1}x)$ ($x \in M$) によって定義する。 M_i ($i=1, 2$) を Borel 空間, φ を M_1 から M_2 への Borel map とする。 M_1 上の測度 m の φ による像 $\varphi_*(m)$ とは, M_2 上の測度で $\varphi_*(m)(E) =$

$m(\mathcal{G}^{-1}(E))$ によつて定義されるものである。 $T \in \text{Aut}(M, m)$ に対して、 $T_*(m) = Tm$ とおく。

3. (G, C) を測度空間と考えた時の (G, C) 上の自己同型全体の集合を $\text{Aut}(G, C)$ で表わす。この章では $\mathcal{N}(M_\sigma, \mathcal{A})$ を $\text{Aut}(G, C)$ の部分群によつて特徴づける。

定義 3.1. $V \in \text{Aut}(G, C)$ は次の条件を満足する C -零集合 N が存在する時、軌道的であると呼ばれる；

$$(i) \quad r(Vx) = r(x) \quad \text{for } x \in G - N,$$

$$(ii) \quad d(Vx) = d(Vy) \iff d(x) = d(y) \quad \text{for } x, y \in G - N.$$

すべての軌道的自己同型全体の集合を $\text{Aut}_0(G, C)$ で表わす。

$V \in \text{Aut}_0(G, C)$ に対して、 $L^2(G, \nu)$ 上の unitary 作用素 \hat{V} を

$$(\hat{V}f)(x) = (dV\nu/d\nu)^{\frac{1}{2}}(x) f(V^{-1}x)$$

($f \in L^2(G, \nu)$, $x \in G$) によつて定義する。

定理 3.2. $V \in \text{Aut}_0(G, C)$ に対して、 unitary 作用素 \hat{V}_0 を

$$(\hat{V}_0 f)(x) = \sigma((V^{-1}x)^{-1}, x) \sigma(x^{-1}, x)^{-1} (\hat{V}f)(x)$$

($f \in L^2(G, \nu)$, $x \in G$) によつて定義する。この時、 \hat{V}_0 は

$\mathcal{N}(M_\sigma, \mathcal{A})$ の元であり、更に、任意の $W \in \mathcal{N}(M_\sigma, \mathcal{A})$ に対して、 $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ と $V \in \text{Aut}_0(G, C)$ が存在して $W = \hat{\alpha} \hat{V}_0$ と書ける。

4. この章では groupoid の full group に対応するものを考察する。これは [3, §2] において定義されたものの拡張になっている。 $\text{Aut}(U_G, \mu)$ の部分群 $[G]$ を次のように定義する；

$[G] \equiv \{ T \in \text{Aut}(U_G, \mu) ; \exists W \in \mathcal{N}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \text{ such that}$
 $W \hat{\alpha} W^* = (T\alpha)^\wedge \text{ for } \forall \alpha \in L^\infty(U_G, \mu) \}$.

$\lambda \in \mathcal{C}$ を確率測度でその r -分解が $\lambda = \int \lambda^u d\mu(u)$ であるとする。

$\tilde{\lambda}^u = d_*(\lambda^u)$ は a.a. $u \in U_G$ に対して, U_G 上の確率測度である。

定理 4.1. $T \in \text{Aut}(U_G, \mu)$ に対して, T が $[G]$ の元であるための必要十分条件は μ -a.a. $u \in U_G$ に対して, $T\tilde{\lambda}^u$ が $\tilde{\lambda}^u$ と同値であることである。

命題 4.2. \mathcal{A} が \mathcal{M}_α で semi-regular になるような G の Borel 2-cycle σ が存在するならば, $\forall \sigma$ の G の Borel 2-cycle σ に対して, \mathcal{A} は \mathcal{M}_α で semi-regular である。

上の命題の条件を満足するような measure groupoid を semi-regular であると呼ぶ。

5. 次の定理は, (G, \mathcal{C}) が ergodic の時には [5, Th. 5.4] において証明されている。

定理 5.1. principal measure groupoid (G, \mathcal{C}) が有限 Haar 測度を持つための必要十分条件は \mathcal{M}_α が I 型であることである。

系 5.2. (G, \mathcal{C}) の任意の strict Borel 2-cycle σ に対して次の条件は同値である;

(i) \mathcal{M}_α は連続,

(ii) (G, \mathcal{C}) の Haar 測度 (ν, μ) が存在して, 任意の U_G の Borel 集合 F に対して, $\{u \in U_G ; 0 < \nu^u(d^{-1}(F)) < +\infty\}$ は μ -零集合で

ある,

(iii) (G, C) の任意の Haar 測度 (ν, μ) と U_G の任意の Borel 集合 F に対して, $\{u \in U_G; 0 < \nu^u(d^+(F)) < +\infty\}$ は μ -零集合である。

[5, §5] の結果と factor 分解を用いると次のことがわかる。

(G, C) の strict Borel 2-cocycle σ' で $M_{\sigma'}$ が I 型 (又は, II 型, III 型, 連続, semi-finite) になるものが存在すれば, すべての (G, C) の Borel cocycle σ に対して, M_{σ} は I 型 (又は, II 型, III 型, 連続, semi-finite) になる。上のような条件を満足する measure groupoid (G, C) を I 型 (又は, II 型, III 型, 連続, semi-finite) と呼ぶことにする。

6. この章では groupoid の間の関係について調べる。2つの groupoid の弱同値を次に定義するが, この関係は groupoid の代数構造の間の関係を explicitには含まない。しかし後で見るとように semi-finite の場合は, 弱同値から代数構造の同型が導かれる (定理 6.5)。以下 $(G_1, C_1), (G_2, C_2)$ を principal measure groupoid であるとする。

定義 6.1. (G_1, C_1) と (G_2, C_2) が弱同値であるとは, (G_i, C_i) ($i=1,2$) の inessential reduction (i.r.) (G'_i, C_i) と同型 \mathcal{G} ; $(U_{G'_1}, \tilde{C}_1) \rightarrow (U_{G'_2}, \tilde{C}_2)$ が存在して $\mathcal{G} \circ [G'_1] \circ \mathcal{G}^{-1} = [G'_2]$ となることである。

次のことに注意しておく。 (G_i, C_i) ($i=1,2$) の i.r. (G'_i, C_i)

と同型 $\psi; (G'_1, C_1) \rightarrow (G'_2, C_2)$ が存在して, ψ はまた代数的同型でもある時, (G_1, C_1) と (G_2, C_2) は *measure groupoid* として同型であると言われる。明らかに 2 つの *measure groupoids* が同型なら, それらは弱同値である。

命題 6.2. (G_i, C_i) ($i=1,2$) が *semi-regular* であり互いに弱同値であるとする。 (G_1, C_1) が I 型 (又は, 連続) なら (G_2, C_2) も I 型 (又は, 連続) である。

(M_i, m_i) ($i=1,2$) を測度空間とする。 $H \in \text{Aut}(M_1 \times M_2, m_1 \times m_2)$ の部分群, $H_i \in \text{Aut}(M_i, m_i)$ の部分群とする。 $H \cap (\text{Aut}(M_1, m_1) \times \text{Aut}(M_2, m_2)) = H_1 \times H_2$ となる時, $H_1 \times H_2$ は H の十分大きい部分群であると呼ぶ。

命題 6.3. *groupoid* (G, C) に対して次のことを仮定する;

- (i) 測度空間 (U_i, μ_i) ($i=1,2$) が存在して, $(U_G, \tilde{C}) = (U_1 \times U_2, [\mu_1 \times \mu_2])$,
- (ii) $\text{Aut}(U_1, \mu_1)$ の部分群 H が存在して, $H \times \text{Aut}(U_2, \mu_2)$ は $[G]$ の十分大きい部分群である,
- (iii) H と $\text{Aut}(U_2, \mu_2)$ はそれぞれ (U_1, μ_1) , (U_2, μ_2) 上にエルゴード的に作用している。

(G_2, C_2) を測度空間 $(U_2 \times U_2, \mu_2 \times \mu_2)$ 上の本質的に推移的な *groupoid* とする。この時, *groupoid* (G_1, C_1) が存在して, $[G_1] = H$ で, (G, C) と $(G_1 \times G_2, C_1 \times C_2)$ は同型になる。

以下 (G_i, C_i) ($i=1,2$) は *semi-regular orbitally concrete (O.C.) principal ergodic measure groupoid* であると仮定する。groupoid が O.C. であるとは [2, Def. 5.4] において導入された概念であり, *semi-regular O.C. principal ergodic groupoid* 全体の集合は, 測度空間にエルゴード的に作用している局所コンパクト群から作られる *principal measure groupoid* 全体の集合と同型を除いて一致する。

補題 6.4. (G_i, C_i) ($i=1,2$) は互いに弱同値であり, (G_1, C_1) は *semi-finite* であると仮定する。もし, (G_1, C_1) が離散軌道を持つなら, (G_2, C_2) も離散軌道を持つ。

定理 6.5. (G_i, C_i) ($i=1,2$) は互いに弱同値であり, (G_1, C_1) が *semi-finite* であると仮定する。この時, (G_1, C_1) と (G_2, C_2) は同型である。

系 6.6. (G_i, C_i) ($i=1,2$) は互いに弱同値であると仮定する。もし (G_1, C_1) が III 型なら, (G_2, C_2) も III 型である。

文献

1. A. Connes, *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Springer Lecture Notes in Math., 725 (1979), 19-143.
2. J. Feldman, P. Hahn and C.C. Moore, *Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups*, *Advances in Math.* 28 (1978), 186-230.

3. A. Guichardet, Automorphismes et type de certaines algèbres de von Neumann, *Proc. London Math. Soc.* 35 (1977), 555-576.
4. P. Hahn, Haar measure for measure groupoids, *Trans. Amer. Math. Soc.* 242 (1978), 1-33.
5. P. Hahn, The regular representations of measure groupoids, *Trans. Amer. Math. Soc.* 242 (1978), 35-72.
6. P. Hahn, Reconstruction of a factor from measures on Takesaki's unitary equivalence relation, *J. Functional Analysis* 31 (1979), 263-271.
7. W. Krieger, On constructing non $*$ -isomorphic hyperfinite factors of type III, *J. Functional Analysis* 6 (1970) 97-109.
8. A. Ramsay, Virtual groups and group actions, *Advances in Math.* 6 (1971), 253-322.
9. M. Takesaki, On the unitary equivalence among the components of decompositions of representations of involutive Banach algebras and the associated diagonal algebras, *Tôhoku Math. J.* 15 (1963), 365-393.