数理解析研究所講究録
第402巻 1980年 32-46

波面集合が分岐する解について

大阪府大．総合科　　谷口和夫

序．　谷口－戸崎[3]では，双曲型作用素

(1) $$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^{2l}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a t^{l-1}\frac{\partial}{\partial x}$$

（l；自然数，a；実数）

に対するCauchy問題

(2) $$\begin{cases} Lu = 0 & t > -1, \\ u(-1, x) = u_0(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(-1, x) = u_1(x) \end{cases}$$

の解が分岐する特異性を持つかどうかを調べた．この報告では，これについての解説を行いたい．

§1．準備的考察と主定理．　(1) の作用素 L の特性根は $\lambda_+ = t^l\xi$，$\lambda_- = -t^l\xi$ である．したがって $t = 0$ では $\lambda_+ = \lambda_-$ となる．さらに λ_+ と λ_- のPoisson bracket

$$\{\lambda - \lambda_+, \lambda - \lambda_-\}$$
$$= \partial\lambda_+/\partial t - \partial\lambda_-/\partial t$$

$$-(\partial\lambda_+/\partial x)(\partial\lambda_-/\partial\xi)+(\partial\lambda_-/\partial x)(\partial\lambda_+/\partial\xi)$$

(ただしλはtに対するdual variable)

を考えると

$$\{\lambda-\lambda_+,\lambda-\lambda_-\}=2\ell t^{\ell-1}\xi$$

となり,

$$\{\lambda-\lambda_+,\lambda-\lambda_-\}/(\lambda_+-\lambda_-)=\ell t^{-1}\notin C^\infty$$

を得る．したがってLはC^∞の意味では包合系ではない(c.f. [4])．以上により解の特異性が多様体$\{t=0\}$を通りすぎるとき，それは分岐する可能性が出てくる．この事実を正確に述べることがこの報告の主題であるが，それを述べるために少し記号を用意する．

余接束$T^*(R^n)\setminus 0$の点(y,η)をひとつとり，それを通る四個の道$\Gamma^+,\Gamma^-,\tilde{\Gamma}^+,\tilde{\Gamma}^-$を次で定義する．

i) $\{q^\pm,p^\pm\}(t;y,\eta;\ell)$を

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{dq^\pm}{dt}=-(\partial\lambda_\pm/\partial\xi)(t,q^\pm,p^\pm)=\mp t^\ell,\\[2mm]\dfrac{dp^\pm}{dt}=(\partial\lambda_\pm/\partial x)(t,q^\pm,p^\pm)=0\qquad(-1\leqq t\leqq 1),\\[2mm]\{q^\pm,p^\pm\}(-1;y,\eta;\ell)=\{y,\eta\}\end{cases}$$

の解，すなわち

$$(4)\quad\begin{cases}q^\pm(t;y,\eta;\ell)=y\mp\omega(t^{\ell+1}-(-1)^{\ell+1}),\\ p^\pm(t;y,\eta;\ell)=\eta\qquad\qquad(-1\leqq t\leqq 1)\end{cases}$$

とする．ここで $\omega = 1/(l+1)$．このとき道 $\Gamma^{\pm}$ を

$$\Gamma^{\pm} \equiv \Gamma^{\pm}(t) : \{q^{\pm}, p^{\pm}\}(t; y, \eta; l)$$

と定義する．

ii) $\{\tilde{q}^{\pm}, \tilde{p}^{\pm}\}(t; y, \eta; l)$ を

$$(5) \quad \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{d\tilde{q}^{\pm}}{dt} = -(\partial\lambda_{\mp}/\partial\xi)(t, \tilde{q}^{\pm}, \tilde{p}^{\pm}) = \pm t^{l}, \\ \dfrac{d\tilde{p}^{\pm}}{dt} = (\partial\lambda_{\mp}/\partial x)(t, \tilde{q}^{\pm}, \tilde{p}^{\pm}) = 0 \qquad (-1 \leqq t \leqq 0), \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{d\tilde{q}^{\pm}}{dt} = -(\partial\lambda_{\pm}/\partial\xi)(t, \tilde{q}^{\pm}, \tilde{p}^{\pm}) = \mp t^{l}, \\ \dfrac{d\tilde{p}^{\pm}}{dt} = (\partial\lambda_{\pm}/\partial x)(t, \tilde{q}^{\pm}, \tilde{p}^{\pm}) = 0 \qquad (0 \leqq t \leqq 1), \end{cases} \\ \{\tilde{q}^{\pm}, \tilde{p}^{\pm}\}(-1; y, \eta; l) = \{y, \eta\} \end{cases}$$

の C^1-級の解，すなわち

$$(6) \quad \begin{cases} \begin{cases} \tilde{q}^{\pm}(t; y, \eta; l) = y \pm \omega(t^{l+1} - (-1)^{l+1}), \\ \tilde{p}^{\pm}(t; y, \eta; l) = \eta \qquad (-1 \leqq t \leqq 0), \end{cases} \\ \begin{cases} \tilde{q}^{\pm}(t; y, \eta; l) = y \mp \omega(t^{l+1} + (-1)^{l+1}), \\ \tilde{p}^{\pm}(t; y, \eta; l) = \eta \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \end{cases} \end{cases}$$

とする．このとき道 $\tilde{\Gamma}^{\pm}$ を

$$\tilde{\Gamma}^{\pm} \equiv \tilde{\Gamma}^{\pm}(t) : \{\tilde{q}^{\pm}, \tilde{p}^{\pm}\}(t; y, \eta; l)$$

と定義する．

以上の記号を用意すると，我々の主定理は次のように述べることができる．

<u>定理</u>． Cauchy 問題 (2) に対し，その初期値 u_0, u_1 は

$$WF(u_0) \cup WF(u_1) = \{(y, \eta)\}$$

を満たしているとする．このとき，解 $u(t) = u(t, x)$ の波面集合の伝播の様子は次の四個の型に分かれる．

(A)　$WF(u(t)) = \Gamma^+(t) \cup \Gamma^-(t) \cup \tilde{\Gamma}^+(t)$　　(c.f. 図－a))

これは $a = 2n(l+1) + l + m$　$(n = 0, 1, 2, \cdots,\ m = 0, 2)$ のとき起こる．

(B)　$WF(u(t)) = \Gamma^+(t) \cup \Gamma^-(t) \cup \tilde{\Gamma}^-(t)$　　(c.f. 図－b))

これは $a = -\{2n(l+1) + l + m\}$　$(n = 0, 1, 2, \cdots,\ m = 0, 2)$ のとき起こる．

(C)（この型は l が偶数のときだけ生じてくる．）

$WF(u(t)) = \tilde{\Gamma}^+(t) \cup \tilde{\Gamma}^-(t)$　　(c.f. 図－c))

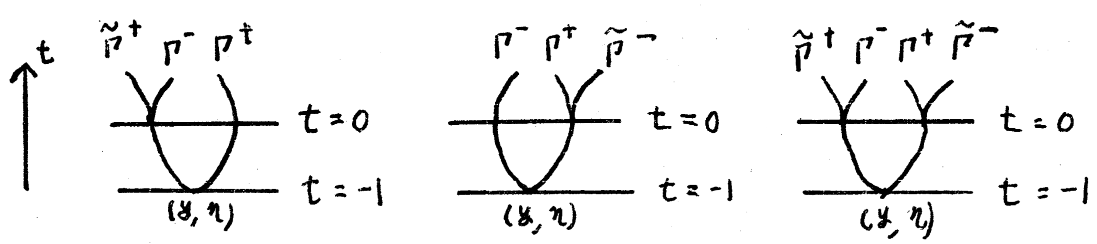
これは $a = (1 \pm 2n)(l+1)$　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のとき起こる．

(D)　$WF(u(t)) = \Gamma^+(t) \cup \Gamma^-(t) \cup \tilde{\Gamma}^+(t) \cup \tilde{\Gamma}^-(t)$　(c.f. 図－d))

これは上記以外のとき起こる．

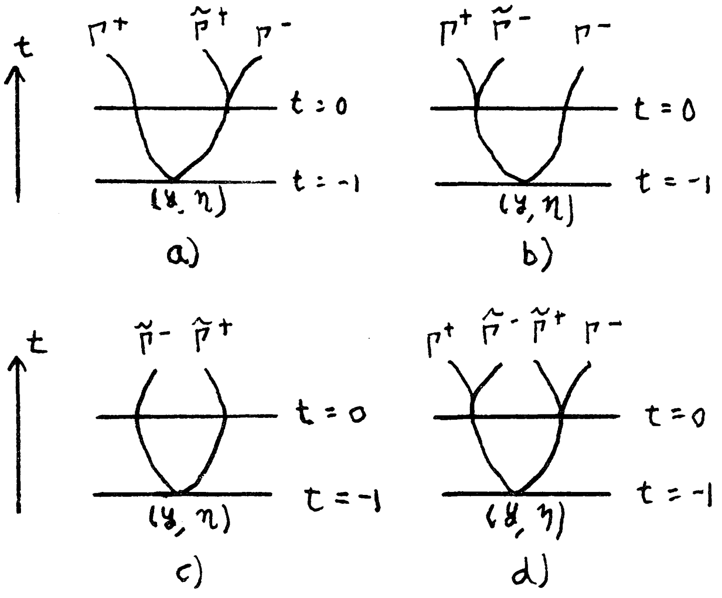
$\boxed{図}$

i) l：奇数



a)　　b)　　d)

ii) l : 偶数



§2. 相関数と道. この節では, 特性根 $\lambda_\pm = \pm t^l\xi$ に対する相関数 $\phi_\pm(t,s)=\phi_\pm(t,s;x,\xi)$ と道 $\Gamma^\pm$, $\tilde{\Gamma}^\pm$ との関係について考える. まず最初に $\lambda_\pm = \pm t^l\xi$ に対するアイコナール方程式

$$
(7)\quad \begin{cases} (\partial\phi_\pm/\partial t)(t,s;x,\xi;l) \mp t^l(\partial\phi_\pm/\partial x)(t,s;x,\xi;l) = 0, \\ \phi_\pm(s,s;x,\xi;l) = x\xi \end{cases}
$$

を考える. するとこの解は

$$
(8)\quad \phi_\pm(t,s;x,\xi;l) = x\xi \pm w(t^{l+1}-s^{l+1})\xi
$$

となる. 次に [2] で定義された $\phi_+(t,s)$ と $\phi_-(t,s)$ との #-積 $\Phi_\pm(t,\theta,s)\equiv\Phi_\pm(t,\theta,s;x,\xi;l)=\phi_\pm(t,\theta)\#\phi_\mp(\theta,s)$ を考える. これは $\{X^\pm, \Xi^\pm\}$ を

$$(9)\quad \begin{cases} X^{\pm} = (\partial\phi_{\pm}/\partial\xi)(t,\theta;x,\Xi^{\pm};\ell), \\ \Xi^{\pm} = (\partial\phi_{\mp}/\partial x)(\theta,s;X^{\pm},\xi;\ell) \end{cases}$$

の解としたとき

$$(10)\quad \Phi_{\pm}(t,\theta,s;x,\xi;\ell) = \phi_{\pm}(t,\theta;x,\Xi^{\pm};\ell) - X^{\pm}\Xi^{\pm} + \phi_{\mp}(\theta,s;X^{\pm},\xi;\ell)$$

で定義される．ところで(9) の解は

$$(11)\quad \begin{cases} X^{\pm} = x \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1}), \\ \Xi^{\pm} = \xi \end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned}(12)\quad & \Phi_{\pm}(t,\theta,s;x,\xi;\ell) \\ &= \{x\xi \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1})\xi\} - (x \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1}))\xi \\ &\quad + \{(x \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1}))\xi \mp \omega(\theta^{\ell+1} - s^{\ell+1})\xi\} \\ &= x\xi \pm \omega(t^{\ell+1} - 2\theta^{\ell+1} + s^{\ell+1})\xi\end{aligned}$$

となる．したがって特に

$$(13)\quad \begin{cases} \phi_{+}(t,-1) = x\xi + \omega(t^{\ell+1} - (-1)^{\ell+1})\xi, \\ \phi_{-}(t,-1) = x\xi + \omega(-t^{\ell+1} + (-1)^{\ell+1})\xi, \\ \Phi_{+}(t,0,-1) = x\xi + \omega(t^{\ell+1} + (-1)^{\ell+1})\xi, \\ \Phi_{-}(t,0,-1) = x\xi + \omega(-t^{\ell+1} - (-1)^{\ell+1})\xi \end{cases}$$

が成立する．これから次が得られる．

<u>命題1</u>．$C_t^{\pm}$, $\tilde{C}_t^{\pm}$ をそれぞれ $P^{\pm}$, $\tilde{P}^{\pm}$ から決まる正準関係 (canonical relation) とする．このとき次式が成立する．

i) $C_t^{\pm}: R^2 \ni (y,\eta) \longrightarrow (x,\xi) \in R^2$ は次で定義される.

$$(14)\quad \begin{cases} y = (\partial\phi_{\pm}/\partial\xi)(t,-1;x,\eta;l) = x \pm w(t^{l+1} - (-1)^{l+1}), \\ \xi = (\partial\phi_{\pm}/\partial x)(t,-1;x,\eta;l) = \eta \qquad (-1 \leqq t \leqq 1). \end{cases}$$

ii) $\tilde{C}_t^{\pm}: R^2 \ni (y,\eta) \longrightarrow (x,\xi) \in R^2$ は次で定義される.

$$(15)\quad \begin{cases} \begin{cases} y = (\partial\phi_{\mp}/\partial\xi)(t,-1;x,\eta;l) = x \mp w(t^{l+1} - (-1)^{l+1}), \\ \xi = (\partial\phi_{\mp}/\partial x)(t,-1;x,\eta;l) = \eta \qquad (-1 \leqq t \leqq 0), \end{cases} \\ \begin{cases} y = (\partial\Phi_{\pm}/\partial\xi)(t,0,-1;x,\eta;l) = x \pm w(t^{l+1} + (-1)^{l+1}), \\ \xi = (\partial\Phi_{\pm}/\partial x)(t,0,-1;x,\eta;l) = \eta \qquad (0 \leqq t \leqq 1). \end{cases} \end{cases}$$

§3. $l=1$ の場合. この節では $l=1$ の場合について, 何故, 低階すなわち a の値によって解の波面集合の伝播の様子が分れるかを, Chi Min-You [1] が出した結果を参考にして考えたい. まず最初に Cauchy 問題

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(0,x) = v_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_1(x) \end{cases}$$

を考える. このとき, $a = 4n+1$, $v_1(x) = 0$ であれば, (16) の解 $u(t,x)$ は

$$(17)\quad u(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{\pi}\, n!}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(k+1/2)} t^{2k}\left(\frac{\partial^k v_0}{\partial x^k}\right)(x + \tfrac{1}{2}t^2)$$

と書ける. したがって $a = 4n+1$ で $v_1(x) = 0$ のときは,

$v_0(x)$ の特異性は λ_+ の特性曲線に沿ってのみ伝播する．この事実を我々の立場から調べてみたい．簡単のため，$a=1$ (i.e. $n=0$) とする．このとき (2) の解 $u(t,x)$ は

$$(18)\qquad u(t,x) = u_0\left(x+\tfrac{1}{2}t^2-\tfrac{1}{2}\right) + \int_{-1}^{t} \{u_0' + u_1\}\left(x+\tfrac{1}{2}(t^2-2\theta^2+1)\right)d\theta$$

と書ける．したがって (18) の右辺の第2項を $\int\left[\int_{-1}^{t}\exp\{i(x+\frac{1}{2}(t^2-2\theta^2+1))\xi\}\{i\xi\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi)\}d\theta\right]đ\xi$ $(đ\xi=(2\pi)^{-1}d\xi)$ と書き直して，$t>0$ のときは stationary phase method を使えば，$a=1$ に対する (2) の解 $u(t,x)$ の伝播の様子は，定理で言った型のうちで (D) 型ではなく，(A) 型となることがわかる．これは次の事実から生じる．(18) から $v_0(x)=u(0,x)$，$v_1(x)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$ を計算すれば

$$(19)\qquad \begin{cases} v_0(x) = u_0\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + \int_{-1}^{0}\{u_0'+u_1\}\left(x-\theta^2+\tfrac{1}{2}\right)d\theta, \\ v_1(x) = \{u_0'+u_1\}\left(x+\tfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を得る．したがって (2) の初期値 u_0, u_1 が $\underline{u_0'+u_1=0}$ を満たすとすれば，

$$v_0(x) = u_0\left(x-\tfrac{1}{2}\right),\quad v_1(x)=0$$

となり，(17) から $t>0$ に対する (2) の解 $u(t,x)$ は

$$u(t,x) = v_0\left(x+\tfrac{1}{2}t^2\right) = u_0\left(x+\tfrac{1}{2}t^2-\tfrac{1}{2}\right)$$

となる．以上のことと，(16) の解に対して $a=1$ で $v_1(x)=0$ のとき $v_0(x)$ の特異性が λ_+ の特性曲線に沿ってのみ伝播す

るという事実から，(2) の解 $u(t,x)$ は $a=1$ のとき $\tilde{\Gamma}^-$ にその波面集合を持たないという事実が従う．

§4. 定理の証明の概略． (2) を x について Fourier 変換すると

$$(20)\quad \begin{cases} \hat{L}\hat{u} = \dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + t^{2l}\xi^2\hat{u} - ait^{l-1}\xi\hat{u} = 0, \\ \hat{u}(-1,\xi) = \hat{u}_0(\xi),\ \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(-1,\xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases}$$

となる．したがって $\hat{L}\hat{u}=0$ の一次独立な解 $V_j(t,\xi) \equiv V_j(t,\xi;l,a)$, $j=1,2$ を

$$(21)\quad \begin{cases} V_1(0,\xi)=1, \quad V_1'(0,\xi)=0, \\ V_2(0,\xi)=0, \quad V_2'(0,\xi)=1 \end{cases}$$

となるようにとると，方程式 $\hat{L}\hat{u}=0$ の $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ に対する係数が 0 になることに注意すれば (2) の解 $u(t,x)$ は

$$(22)\quad u(t,x) = \int e^{ix\xi}\{p_0(t,\xi)\hat{u}_0(\xi) + p_1(t,\xi)\hat{u}_1(\xi)\}d\xi$$

$$(23)\quad \begin{cases} p_0(t,\xi) \equiv p_0(t,\xi;l,a) = V_2'(-1,\xi)V_1(t,\xi) - V_1'(-1,\xi)V_2(t,\xi), \\ p_1(t,\xi) \equiv p_1(t,\xi;l,a) = V_1(-1,\xi)V_2(t,\xi) - V_2(-1,\xi)V_1(t,\xi) \end{cases}$$

と書ける．したがって $u(t,\cdot)$ の波面集合を調べるには，$\xi \to \pm\infty$ のときの $p_j(t,\xi)$ の振舞を調べればよい．ところで解の一意性から $V_j(t,-\xi;l,a) = V_j(t,\xi;l,-a)$, $j=1,2$ を得るから

(24) $\quad p_j(t,-\xi;l,a) = p_j(t,\xi;l,-a),\ j=0,1$

が成立する. したがって, 以下 $\xi>0$ と仮定してよい.

$\omega = 1/(l+1)$ として, $\tau = \omega t^{l+1}\xi$ と変数変換すると方程式 $\hat{L}\hat{u}=0$ は

(25) $$\frac{d^2v}{d\tau^2} + l\omega\tau^{-1}\frac{dv}{d\tau} + (1-ai\omega\tau^{-1})v = 0$$

となる. 次に従属変数を $w(z) = e^{z/2}v(z/(2i))$ と変換すれば, w は Kummer の方程式

(26) $$zw''(z) + (\gamma - z)w'(z) - \alpha w(z) = 0$$

を満たす. ここで α, γ は次の値をとる.

(27) $$\alpha = \omega(l+a)/2, \quad \gamma = l\omega.$$

したがって, $F(\alpha;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\frac{1}{n!}z^n$ $((\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots\times(\alpha+n-1)\ (=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)))$ を (26) の正則な解とすれば, (21) を満たす $\hat{L}\hat{u}=0$ の解 $V_j(t,\xi;l,a),\ j=1,2$ は

(28) $$\begin{cases} V_1(t,\xi;l,a) = e^{-z/2}F(\alpha;\gamma;z), \\ V_2(t,\xi;l,a) = te^{-z/2}F(1+\alpha-\gamma;2-\gamma;z), \\ \qquad\qquad (z = 2i\omega t^{l+1}\xi) \end{cases}$$

と表わせる. 一方, Kummer の方程式 (26) は $z\to\infty$ $(\arg z = \pm\frac{\pi}{2})$ としたとき, 次の漸近展開を持つ一次独立な解 $H_j^{\pm}(\alpha;\gamma;z)$, $j=1,2$ を持つ.

(29) $$\begin{cases} H_1^{\pm}(\alpha;\gamma;z) = e^z\tilde{H}_1^{\pm}(\alpha;\gamma;z), \\ \tilde{H}_1^{\pm}(\alpha;\gamma;z) \sim z^{\alpha-\gamma}\{1+(\gamma-\alpha)(1-\alpha)z^{-1}+\cdots\} \\ \qquad (z\to\infty,\ \arg z = \pm\frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned} &H_2^{\pm}(\alpha;\gamma;z) = \tilde{H}_2^{\pm}(\alpha;\gamma;z), \\ &\qquad \tilde{H}_2^{\pm}(\alpha;\gamma;z) \sim (e^{-\pi i}z)^{-\alpha}\{1+(-\alpha(1+\alpha-\gamma))z^{-1}+\cdots\} \\ &\qquad\qquad (z\to\infty,\ \arg z = \pm\tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}\right.$$

したがって，$z=2i\omega t^{l+1}\xi$ に対し $\xi\to+\infty$ のとき

$$\left\{\begin{array}{lll} z\to\infty, & \arg z = \frac{\pi}{2}, & \text{when } t>0, \\ z\to\infty, & \arg z = \frac{\pi}{2}, & \text{when } t<0,\ l: \text{odd}, \\ z\to\infty, & \arg z = -\frac{\pi}{2}, & \text{when } t<0,\ l: \text{even} \end{array}\right.$$

に注意すれば，

$$t = \left\{\begin{array}{ll} (2i\omega\xi)^{-\omega} z^{\omega} & (t>0), \\ -(2i\omega\xi)^{-\omega} z^{\omega} & (t<0,\ l: \text{odd}), \\ -(2i\omega\xi)^{-\omega} e^{\pi i\omega} z^{\omega} & (t<0,\ l: \text{even}) \end{array}\right.$$

を使うことにより，(28) で与えられた $\hat{L}\hat{u}=0$ の解 $V_j(t,\xi;l,a)$ は $z=2i\omega t^{l+1}\xi$ として

$(30)_+$ $$V_j(t,\xi;l,a) = (2i\omega\xi)^{(1-j)\omega} \times[c^{+}_{j,1;l}e^{z/2}\tilde{H}_1^{+}(\alpha;\gamma;z) + c^{+}_{j,2;l}e^{-z/2}\tilde{H}_2^{+}(\alpha;\gamma;z)]$$
$(t>0),\ j=1,2,$

$(30)_-$ $$V_j(t,\xi;l,a) = \{-(2i\omega\xi)^{\omega}\}^{1-j} \times[c^{-}_{j,1;l}e^{z/2}\tilde{H}_1^{\varepsilon}(\alpha;\gamma;z) + c^{-}_{j,2;l}e^{-z/2}\tilde{H}_2^{\varepsilon}(\alpha;\gamma;z)]$$
$(t<0),\ j=1,2$

（ただし ε は l が奇数のときは＋を表わし，l が偶数のときは－を表わす）

なる形を持ち，その係数 $c^{\pm}_{j,l;\ell}$ は $\delta=0$ (ℓ;奇数)，$=1$ (ℓ;偶数) とすれば，

$$
(31)\quad \begin{cases}
C^{+}_{1,1;\ell} = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}, & C^{+}_{1,2;\ell} = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}, \\[2mm]
C^{+}_{2,1;\ell} = \dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}, & C^{+}_{2,2;\ell} = \dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}\, e^{\pi i\omega}, \\[2mm]
C^{-}_{1,1;\ell} = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\, e^{\pi i(\gamma-\alpha)\delta}, & C^{-}_{1,2;\ell} = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\, e^{-\pi i\alpha\delta} \\[2mm]
C^{-}_{2,1;\ell} = \dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\, e^{\pi i(1-\alpha)\delta}, & C^{-}_{2,2;\ell} = \dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}\, e^{\pi i(\omega-(\omega+\alpha)\delta)}
\end{cases}
$$

を満たす．この (31) に与えた定数が Stokes 係数と呼ばれるものである．以上と (23) から $p_j(t,\xi;\ell,a)$, $j=0,1$ は

$$
\begin{aligned}
(32)_-\quad p_j(t,\xi;\ell,a) &= \omega^{-\omega}(2i\xi)^{\gamma-j}(-1)^{1+(1-j)\delta} \\
&\quad\times \left(C^{-}_{2,2;\ell}C^{-}_{1,1;\ell} - C^{-}_{1,2;\ell}C^{-}_{2,1;\ell}\right) \\
&\quad\times \Big[e^{(z-z^0)/2}\, \tilde{J}^{\varepsilon}_{j,2}(\alpha;\gamma;z^0)\, \tilde{H}^{\varepsilon}_{1}(\alpha;\gamma;z) \\
&\qquad - e^{(-z+z^0)/2}\, \tilde{J}^{\varepsilon}_{j,1}(\alpha;\gamma;z^0)\, \tilde{H}^{\varepsilon}_{2}(\alpha;\gamma;z) \Big]
\end{aligned}
$$

$$(t<0),\ j=0,1$$

$$
\begin{aligned}
(32)_+\quad p_j(t,\xi;\ell,a) &= \omega^{-\omega}(2i\xi)^{\gamma-j}(-1)^{1+(1-j)\delta} \\
&\quad\times \Big[\left(C^{-}_{2,2;\ell}C^{+}_{1,1;\ell} + C^{-}_{1,2;\ell}C^{+}_{2,1;\ell}\right) \\
&\qquad\qquad \times e^{(z-z^0)/2}\, \tilde{J}^{\varepsilon}_{j,2}(\alpha;\gamma;z^0)\, \tilde{H}^{+}_{1}(\alpha;\gamma;z) \\
&\qquad + \left(C^{-}_{2,1;\ell}C^{+}_{1,2;\ell} + C^{-}_{1,1;\ell}C^{+}_{2,2;\ell}\right) \\
&\qquad\qquad \times e^{(-z+z^0)/2}\, \tilde{J}^{\varepsilon}_{j,1}(\alpha;\gamma;z^0)\, \tilde{H}^{+}_{2}(\alpha;\gamma;z) \\
&\qquad + \left(C^{-}_{2,1;\ell}C^{+}_{1,1;\ell} + C^{-}_{1,1;\ell}C^{+}_{2,1;\ell}\right) \\
&\qquad\qquad \times e^{(z+z^0)/2}\, \tilde{J}^{\varepsilon}_{j,1}(\alpha;\gamma;z^0)\, \tilde{H}^{+}_{1}(\alpha;\gamma;z)
\end{aligned}
$$

$$+ (c^{-}_{2,2;\ell} c^{+}_{1,2;\ell} + c^{-}_{1,2;\ell} c^{+}_{2,2;\ell})$$
$$\times e^{(-z-z^0)/2} \tilde{J}^{\varepsilon}_{\delta,2}(\alpha;\gamma;z^0) \tilde{H}^{+}_{2}(\alpha;\gamma;z^0)\Big]$$
$$(t>0),\ \delta=0,1$$

と書ける．ここで

$$(33)\quad \begin{cases} \tilde{J}^{\pm}_{0,1}(\alpha;\gamma;z) = e^{-z/2}\dfrac{d}{dz}(e^{z/2}\tilde{H}^{\pm}_1(\alpha;\gamma;z)) \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\tilde{H}^{\pm}_1(\alpha;\gamma;z) + \dfrac{d}{dz}\tilde{H}^{\pm}_1(\alpha;\gamma;z), \\ \tilde{J}^{\pm}_{0,2}(\alpha;\gamma;z) = e^{z/2}\dfrac{d}{dz}(e^{-z/2}\tilde{H}^{\pm}_2(\alpha;\gamma;z)) \\ \qquad = -\dfrac{1}{2}\tilde{H}^{\pm}_2(\alpha;\gamma;z) + \dfrac{d}{dz}\tilde{H}^{\pm}_2(\alpha;\gamma;z), \\ \tilde{J}^{\pm}_{1,k}(\alpha;\gamma;z) = \tilde{H}^{\pm}_k(\alpha;\gamma;z),\ k=1,2, \end{cases}$$

$$(34)\quad z = 2i\omega t^{\ell+1}\xi,\quad z^0 = 2i\omega(-1)^{\ell+1}\xi,$$

$$(35)\quad \varepsilon = \begin{cases} + & (\ell;\text{奇数}) \\ - & (\ell;\text{偶数}) \end{cases}$$ を表わす，

$$(36)\quad \delta = \begin{cases} 0 & (\ell;\text{奇数}), \\ 1 & (\ell;\text{偶数}). \end{cases}$$

ところで，(13) と (34) から

$$(37)\quad \begin{cases} \phi_+(t,-1;x,\xi;\ell) = x\xi + (z-z^0)/(2i), \\ \phi_-(t,-1;x,\xi;\ell) = x\xi + (-z+z^0)/(2i), \\ \Phi_+(t,0,-1;x,\xi;\ell) = x\xi + (z+z^0)/(2i), \\ \Phi_-(t,0,-1;x,\xi;\ell) = x\xi + (-z-z^0)/(2i) \end{cases}$$

が成立する．以上述べたことと (24) および $\omega(\ell+(-a))/2=\gamma-\alpha$ をあわせると次の命題を得，この命題からただちに我々

の定理が従う.

命題2. 任意に固定した $t\in[-1,1]$ に対し主部が消えない表象 $g_{j,\pm}(t,\xi)\equiv g_{j,\pm}(t,\xi;l,a)$, $j=0,1$ と任意に固定した $t\in(0,1]$ に対し主部が消えない表象 $\tilde{g}_{j,\pm}(t,\xi)\equiv\tilde{g}_{j,\pm}(t,\xi;l,a)$, $j=0,1$ が存在して, (2) の解 $u(t,x)$ は

$$(38)_- \quad u(t,x)=\sum_{j=0}^{1}D_0^-(l,a)\Big[\int e^{i\phi_+(t,-1;x,\xi)}g_{j,+}(t,\xi)\hat{u}_j(\xi)d\xi + \int e^{i\phi_-(t,-1;x,\xi)}g_{j,-}(t,\xi)\hat{u}_j(\xi)d\xi\Big] \quad (-1\leqq t\leqq 0),$$

$$(38)_+ \quad u(t,x)=\sum_{j=0}^{1}\Big[D_0^+(l,a)\Big\{\int e^{i\phi_+(t,-1;x,\xi)}g_{j,+}(t,\xi)\hat{u}_j(\xi)d\xi + \int e^{i\phi_-(t,-1;x,\xi)}g_{j,-}(t,\xi)\hat{u}_j(\xi)d\xi\Big\} + B_1(l,a)\int e^{i\Phi_+(t,0,-1;x,\xi)}\tilde{g}_{j,+}(t,\xi)\hat{u}_j(\xi)d\xi + B_2(l,a)\int e^{i\Phi_-(t,0,-1;x,\xi)}\tilde{g}_{j,-}(t,\xi)\hat{u}_j(\xi)d\xi\Big] \quad (0<t\leqq 1)$$

と表わせる. ここで (27) の α,γ に対し

$$D_0^-(l,a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}-\frac{e^{(-1)^l\pi i\omega}}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)},$$

$$D_0^+(l,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}+\dfrac{e^{-\pi i\omega}}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)} & (l;\mathrm{odd}),\\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}+\dfrac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)} & (l;\mathrm{even}),\end{cases}$$

$$B_1(\ell, a) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(\alpha)},$$

$$B_2(\ell, a) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

である.

文　献

[1] Chi Min-You: On the Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with data given on the degenerate parabolic line, Acta Math. Sinica, 8 (1958), 521-529.

[2] H. Kumano-go, K. Taniguchi and Y. Tozaki: Multi-products of phase functions for Fourier integral operators with an application, Comm. Partial Differential Equations, 3 (1978), 349-380.

[3] K. Taniguchi and Y. Tozaki: A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, to appear in Math. Japon. .

[4] K. Taniguchi: Multi-products of Fourier integral operators and fundamental solutions for a hyperbolic system with involutive characteristics, to appear.