数理解析研究所講究録
第 402 巻 1980 年 66-83

Necessary Conditions for Mixed Problems to Be C^∞-well Posed

筑波大 数学系　若林誠一郎

1. 序. Lax[5], Mizohata[6] において、非特性Cauchy問題がC^∞-適切であるためには、その主部が双曲型であること、すなわち、特性方程式が実根のみをもつことが必要であることが証明された。また、Ivrii-Petkov[3]において、Lax-Mizohataの定理の簡単な別証が与えられている(但し、C^∞-適切性の定義が少し異なる)。一方、混合問題に対しては、いくつかの仮定の下で、Kajitani[4]において、Cauchy問題に対応する必要条件が与えられている。ここでは、[4]における仮定がゆるめられることをしめす。そのために[3]の方法を修正して、混合問題に適用し、混合問題がC^∞-適切であるための必要条件を導く。また、以下の方法をCauchy問題に適用すれば、Lax-Mizohataの定理のより簡単な別証が得られる(但し、C^∞-適切性の定義が少し異なる)。

2. 問題および結果. $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}$, $x'=(x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, $x\overset{dual}{\longleftrightarrow}\xi$, $y\leftrightarrow\eta$, $x'\leftrightarrow\xi'$, $D=-i(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)$, $D_y=-i\partial/\partial y$ とし、Ωを$\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{R}}_+$における$(x,y)=(0,0)$の開近傍とする。さらに、

$$\Omega_T^{\pm}=\{(x,y)\in\Omega\,;\ \pm(x_1-T)\geqq 0\},\quad T\in\mathbb{R},$$
$$\hat{\Omega}\ =\{x\in\mathbb{R}^n\,;\ (x,0)\in\Omega\}$$

と表わす。

$$L(x,y,D,D_y)\equiv(L_{ij}(x,y,D,D_y))=\sum_{|\alpha|+j\leqq m}A_{\alpha j}(x,y)D^\alpha D_y^j,$$

$A_{\alpha j}(x,y)$: $N\times N$ 行列に値をとるC^∞-関数

とし、整数の組$\{m_j,n_j\}_{j=1,\cdots,N}\subset\mathbb{Z}$が与えられていて、$\deg L_{ij}(x,y,\xi,\eta)\leqq m_i+n_j$ ((ξ,η)の多項式として)をみたしているものとする。但し、多項式$l(\xi,\eta)\equiv 0$の次数は任意次数であると考える。$L_{ij}^0(x,y,\xi,\eta)$を$L_{ij}(x,y,\xi,\eta)$の(m_i+n_j)次斉次部分とし、$N\times N$行列$L^0(x,y,\xi,\eta)=(L_{ij}^0(x,y,\xi,\eta))$に対して、$P(x,y,\xi,\eta)=\det L^0(x,y,\xi,\eta)$とおく。そのとき、

$$P(x,y,\xi,\eta)\not\equiv 0\quad \text{in } (\xi,\eta)$$

であると仮定する。

$$B(x,D,D_y)\equiv(B_{ij}(x,D,D_y))=\sum_{|\alpha|+j\leqq b}B_{\alpha j}(x)D^\alpha D_y^j,$$

$B_{\alpha j}(x)$: $l\times N$ 行列に値をとるC^∞-関数

とし、整数の組$\{b_j\}_{j=1,\cdots,l}\subset\mathbb{Z}$が与えられていて、$\deg B_{ij}(x,\xi,\eta)\leqq b_i+n_j$ をみたしているものとする。$B_{ij}(x,\xi,\eta)$

の (b_i+n_j) 次斉次部分を $B^0_{ij}(x,\xi,\eta)$ とし、$B^0(x,\xi,\eta)=(B_{ij}(x,\xi,\eta))$ とおく。混合問題

$$
(1)\qquad
\begin{cases}
L(x,y,D,D_y)\,u(x,y)=f(x,y) & \text{in } \Omega,\\
B(x,D,D_y)\,u(x,y)|_{y=0}=h(x) & \text{in } \hat{\Omega},\\
\operatorname{supp} u(x,y)\subset\Omega_T^+
\end{cases}
$$

を考える。ここで、$u={}^t(u_1,\cdots,u_N)$, $f={}^t(f_1,\cdots,f_N)$, $h={}^t(h_1,\cdots,h_l)$ である。

<u>定義1.</u> 混合問題(1)が Ω_T^+ で C^∞-適切である。
$\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$

(E) $\forall f\in C^\infty(\Omega)$, $\forall h\in C^\infty(\hat{\Omega})$ with $\operatorname{supp} f\subset\Omega_T^+$, $\operatorname{supp} h\subset\hat{\Omega}_T^+$ に対して、(1)の解 $u\in C^\infty(\Omega)$ が存在する。

(U) $t\geqq T$ に対して、$u\in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} u\subset\Omega_T^+$, $Lu=0$ in Ω_t^- かつ $Bu|_{y=0}=0$ in $\hat{\Omega}_t^-$ ならば、$u=0$ in Ω_t^- である。

<u>定義2.</u> Γ を原点に頂点をもつ $\mathbb{R}^{n+1}$ の開凸錐で、$\bar{\Gamma}\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1};\ x_1>0\}\cup\{0\}$ をみたすものとする。混合問題(1)が Γ-有限伝播性をもつとは、各 $(x^0,y^0)\in\Omega_T^+$ with $x_1^0>T$ and $\Gamma(x^0,y^0)\cap\Omega_T^+\Subset\Omega_T^+$ に対して、次が成立するときをいう:

$u \in C^\infty(\Omega)$, $\mathrm{supp}\, u \subset \Omega_T^+$, $Lu = 0$ in $\Gamma(x^0, y^0) \cap \Omega_T^+$ かつ $Bu|_{y=0} = 0$ in $\hat{\Gamma}(x^0, y^0) \cap \hat{\Omega}_T^+$ ならば、$u = 0$ in $\Gamma(x^0, y^0) \cap \Omega$ である。

ここで、$K \subset\subset \Omega$ は $\overline{K} \subset \Omega$ かつ $\overline{K}$ がコンパクトであることを意味する。また、

$$\Gamma(x^0, y^0) = \{(x^0, y^0)\} - \Gamma, \quad \hat{\Gamma}(x^0, y^0) = \{x \in \mathbb{R}^n ; (x, 0) \in \Gamma(x^0, y^0)\}$$

である。

次の仮定をおく。

(A−1) $P(x, y, \vartheta, 0) \neq 0$ for $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}_+}$.

ここで、$\vartheta = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ である。そのとき、次の命題が成立する。

<u>命題 3</u> ([5], [6], [3]) 仮定 (A−1) の下で、(1) が Ω_T^+ で C^∞−適切ならば、各 $(x, y) \in \Omega_T^+$ に対して $P(x, y, \xi, \eta)$ が、$(\vartheta, 0)$ に関して双曲型であることが必要である。すなわち、

$$P(x, y, \xi, \eta) \neq 0 \ \text{for} \ (x, y) \in \Omega_T^+, \ \mathrm{Im}\, \xi_1 < 0, \ \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \ \eta \in \mathbb{R}$$

であることが必要である。

故に、(A−1) のかわりに、

(A−1)′ 各 $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}_+}$ に対して、$P(x, y, \xi, \eta)$ が $(\vartheta, 0)$ に

関して双曲型である。

と仮定しても、一般性を失わない。さらに、$\{L^0, B^0\}$ に対して次の条件を課す：

(A−2) $\deg_\eta P(x, 0, \vartheta, \eta)$ は、$x \in \mathbb{R}^n$ によらず一定である。

(A−3) $P(0, 0, -i\vartheta, \eta) = 0$ の虚部正の根の数は l に等しい。さらに、$l \geqq 1$ である。

(A−4) $\Delta(x, -i\vartheta) \neq 0$ for $^\forall x \in \mathbb{R}^n$.

ここで、$\Delta(x, \xi)$ は $\{L^0, B^0\}$ に対する Lopatinski 行列式である（§3で定義される）。そのとき、次の定理を得る。

<u>定理4.</u> 条件 (A−1)′, (A−2〜4) がみたされていると仮定する。そのとき、混合問題(1) が Ω_T^+ で C^∞−適切であるためには、$\{L^0, B^0\}$ が Lopatinski 条件をみたすことが必要である。すなわち、

$$\Delta(x, \xi) \neq 0 \quad \text{for } x \in \hat{\Omega}_T^+,\ \operatorname{Im} \xi_1 < 0 \text{ and } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

をみたすことが必要である。

<u>注意</u> (A−4) がみたされないとき、上の定理は正しくない。

(i) (Sakamoto [8])，定係数のとき、$\Delta(\xi) \equiv 0$ だが C^∞− 適切である例がある。これは、Lopatinski 行列式の主部は一般に $\{L^0, B^0\}$ だけからはきまらず、低階にも依存することをしめす。

(ii) (Soga [10], [11]) 波動方程式に対する混合問題で、C^∞-適切である上で $\Delta(x,-i\vartheta)=0$ となる例がある。

有限伝播性について、次の定理が知られている。

命題5 ([7], [3]) 混合問題(1)が Ω_T^+ で C^∞-適切かつ Γ-有限伝播性をもつならば、そのとき

$$P(x^0,y^0;\xi,\eta)\neq 0 \text{ for } (x^0,y^0)\in\Omega_T^+,\ \Gamma(x^0,y^0)\cap\Omega_T^+\subset\subset\Omega_T^+$$
$$\text{and } (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}-i(\operatorname{int}\Gamma^*)$$

が成立する。ここで

$$\Gamma^*=\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1};\ x\cdot\xi+y\cdot\eta\geq 0 \text{ for } \forall(x,y)\in\Gamma\}$$

で、$\operatorname{int}\Gamma^*$ は Γ^* の $\mathbb{R}^{n+1}$ における内部を表わす。

注意 この命題において、(A-1~4) は仮定されていない。

命題5に対応して、次の定理が成立する。

定理6 条件 (A-1)$'$, (A-2), (A-3) および

(A-4)$'$ $\Delta(x,\xi)\not\equiv 0$ in ξ for each $x\in\mathbb{R}^n$

がみたされていると仮定する。混合問題(1)が Ω_T^+ で C^∞-適切かつ Γ-有限伝播性をもつならば、そのとき

$$\Delta(x^0,\xi^0)\neq 0 \quad \text{for } x^0\in\hat{\Omega}^+_T,\ \Gamma(x^0,0)\cap\Omega^+_T \subset\subset \Omega^+_T \text{ and}$$
$$\xi\in\mathbb{R}^n-i(\operatorname{int}\dot{\Gamma}^*)$$

が成立する。ここで

$$\dot{\Gamma}^*=\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ (\xi,\eta)\in\Gamma^* \text{ for some } \eta\in\mathbb{R}\}$$

で、$\operatorname{int}\dot{\Gamma}^*$ は $\mathbb{R}^n$ における $\dot{\Gamma}^*$ の内部を表わす。

注意. $\vartheta\in\operatorname{int}\dot{\Gamma}^*$ であり、仮定(A-1)′, (A-2), (A-3), (A-4)′ の下で、C^∞-適切かつ(A-4)がみたされなければ、有限伝播性をもたないことがわかる。

以下において定理4の略証を与える。定理6も同様にして証明することができる。

3. 準備. Banach の閉グラフ定理と Seeley [9] を適用して、次を得る。

補題7. 混合問題(1)が Ω^+_T で C^∞-適切であると仮定する。そのとき、任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega^+_T$ と非負整数 p に対して、正定数 $C_{p,K}$ と非負整数 q が存在して、

(2) $$|u|_{p,K^-_t}\leqq C_{p,K}\{|Lu|_{q,K^-_t}+|Bu|_{y=0}|_{q,\hat{K}^-_t}\}$$
$$\text{for } {}^\forall u\in C^\infty_0(\bar{\mathbb{R}}),\ {}^\forall t\in\mathbb{R},\ \operatorname{supp}u\subset K$$

が成立する。ここで、

$$|f|_{p,K} = \sup_{(x,y)\in K,\ |\alpha|+j\leq p} |D^\alpha D_y^j f(x,y)|,$$

$$|h|_{p,\hat{K}} = \sup_{x\in\hat{K},\ |\alpha|\leq p} |D^\alpha h(x)|$$

である。

また同様にして、Seely [9] ではなく Bierstone [2] を適用して、次の補題を得る。この補題は定理6を証明するときに必要となり、したがって、ここでは用いない。

<u>補題8</u> 混合問題(1)がΩ_T^+でC^∞-適切かつΓ-有限伝播性をもつと仮定する。そのとき、任意のコンパクト集合$K\subset\Omega_T^+$と非負整数pに対して、正定数$C_{p,K}$と非負整数qが存在して、

$$|u|_{p,\Gamma(x^0,0)\cap\Omega} \leq C_{p,K}(x_1^0-T)^{-q}\{|Lu|_{q,\Gamma(x^0,0)\cap\Omega} + |Bu|_{y=0}|_{q,\hat{\Gamma}(x^0,0)\cap\hat{\Omega}}\} \quad \text{for } {}^\forall u\in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\operatorname{supp} u\subset K \text{ and } {}^\forall(x^0,0)\in\Omega_T^+ \text{ with } x_1^0>T,\ \Gamma(x^0,0)\cap\Omega_T^+\subset\subset\Omega_T^+$$

が成立する。

次にLopatinski行列式を定義しよう。以下、(A-1)', (A-2), (A-3)がつねにみたされているものと仮定する。$\Gamma_x(P)$を集合$\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1};\ P(x,0,\xi,\eta)\neq 0\}$の$(\nu^0,0)$を含む連結成分とし、

$$\dot{\Gamma}_x(P)=\{\xi\in\mathbb{R}^n ; (\xi,\eta)\in\Gamma_x(P) \text{ for some } \eta\in\mathbb{R}\}$$

とおく。そのとき、(A-1)′より

$$\deg_\eta P(x,0,\xi,\eta)=\deg_\eta P(x,0,\vartheta,\eta) \quad \text{for } x\in\mathbb{R}^n \text{ and } \xi\in\mathbb{R}^n-i\dot{\Gamma}_x(P)$$

が成立する。故に仮定より、各$x\in\mathbb{R}^n$, ξ ($\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathrm{Im}\,\xi_1<0$)に対して、$P(x,0,\xi,\eta)=0$ の虚部正の根の個数はl個であることがしたがう(重複度もこめて)。

$$\mathcal{A}(x,\xi,\eta)=B^0(x,\xi,\eta)\,{}^t\mathrm{cof}\,L^0(x,0,\xi,\eta),$$

$$P_+(x,0,\xi,\eta)=\prod_{j=1}^{l}(\eta-\lambda_j^+(x,\xi)) \quad \text{for } x\in\mathbb{R}^n, \mathrm{Im}\,\xi_1<0, \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$$

とおく。ここで、$\lambda_j^+(x,\xi)$ は $P(x,0,\xi,\eta)=0$ の虚部正の根を表わす。さらに、

$$\tilde{\mathcal{A}}(x,\xi,\eta)=(a_{jk}(x,\xi,\eta))\equiv\mathcal{A}(x,\xi,\eta) \pmod{P_+(x,0,\xi,\eta)},$$

$$a_{jk}(x,\xi,\eta)=\sum_{s=1}^{l} a_{jk}^{(s)}(x,\xi)\,\eta^{s-1},$$

$$\mathcal{L}(x,\xi)=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \cdots a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(1)} \cdots a_{1N}^{(l)} \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{l1}^{(1)} \cdots a_{l1}^{(l)} & a_{l2}^{(1)} \cdots a_{lN}^{(l)} \end{pmatrix}$$

とおく。

<u>定義9.</u> $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Im}\,\xi_1<0$, $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$に対して$\{L^0, B^0\}$に対するLopatinski行列式$\Delta(x,\xi)$を

$$\Delta(x,\xi)=\sum_i |\Delta_i(x,\xi)|$$

によって定義する。ここで、$\Delta_i(x,\xi)$は$\mathcal{L}(x,\xi)$のl次小行

列式で、上の和はこの小行列式全体にわたってとられる。

<u>注意</u> $P_+(x,0,\xi,\eta)$ は $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n-i\dot{\Gamma}_x(P)$, $\eta\in\mathbb{C}$ に対して定義されるので、$\Delta(x,\xi)$ も $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n-i\dot{\Gamma}_x(P)$ に対して定義される。

<u>補題10</u>（[1], [12]） $x^0\in\mathbb{R}^n$, $\xi^0\in\mathbb{R}^n-i\dot{\Gamma}_{x^0}(P)$ に対して、次の条件は同値である。

(i) 常微分方程式系

$$\begin{cases} L^0(x^0,0,\xi^0,D_y)v(y)=0, & y>0,\\ B^0(x^0,\xi^0,D_y)v(y)|_{y=0}=h, & \\ \exp[y\cdot\eta^0]\,v(y)\in L^2(\overline{R}_+) & \end{cases}$$

が任意の $h\in\mathbb{C}^l$ に対して一意解をもつ。ここで、η^0 を $(-\mathrm{Im}\,\xi^0, -\eta^0)\in\Gamma_{x^0}(P)$ をみたすように1つえらんでおく。

(ii) $\mathcal{A}(x^0,\xi^0,\eta)$ の行ベクトルが $P_+(x^0,0,\xi^0,\eta)$ を法として一次独立である。

(iii) $\mathrm{rank}\ \mathcal{L}(x^0,\xi^0)=l$, i.e., $\Delta(x^0,\xi^0)\neq 0$.

4. 定理4の略証. $x^0\in\hat{\Omega}_T^+$, ξ^0 ($\xi^{0\prime}\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathrm{Im}\,\xi_1<0$) が存在して、$\Delta(x^0,\xi^0)=0$ であると仮定して、(2)に矛盾する漸近解を構成すれば、定理4が証明されたことになる。一般性を

失うことなく、$x^0=0$ と仮定してよい。変数変換 $(x,y)\mapsto(\tilde{x},\tilde{y})$

$$x_1=\rho^{-2\nu+\kappa}\tilde{x}_1,\ x'=\rho^{-\nu}\tilde{x}',\ y=\rho^{-2\nu}\tilde{y}\quad(\nu\gg\kappa>0)$$

をし、$(\tilde{x},\tilde{y})$ を改めて (x,y) とかくことにする。上の変換は [3] において用いられたものと少し異なり、そのために以下の議論が適用できる。すなわち、最終的には単因子論を用いて常微分方程式系を解くことにより、漸近解が構成できる。

$$L_\rho(x,y,D,D_y)=L(\rho^{-2\nu+\kappa}x_1,\rho^{-\nu}x',\rho^{-2\nu}y,\rho^{2\nu-\kappa}D_1,\rho^{\nu}D',\rho^{2\nu}D_y),$$

$$B_\rho(x,D,D_y)=B(\rho^{-2\nu+\kappa}x_1,\rho^{-\nu}x',\rho^{2\nu-\kappa}D_1,\rho^{\nu}D',\rho^{2\nu}D_y)$$

とおくと、(2)が成立すれば、任意のコンパクト集合 $W\subset\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{R}}_+$ に対して、正数 $\rho(W)$ が存在して、

(3) $$|u|_{p,W_t^-}\leqq C_p\,\rho^{2\nu q}\{|L_\rho u|_{q,W_t^-}+|B_\rho u|_{y=0}|_{q,\hat{W}_t^-}\}$$

$$\text{for } {}^\forall t\in\mathbb{R},\ {}^\forall u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{R}}_+),\ \mathrm{supp}\,u\subset W_{T'}^+,\ \text{and } \rho\geqq\rho(W)$$

が成立する。ここで、C_p は W によらない正定数で、$T=0$ のとき $T'=0$ であり、$T<0$ のとき T' は任意にとれる。今、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ を $P(0,0,\xi^0,\eta)=0$ の虚部正をもつ相異なる根とし、

$$\varphi_s(x,y,\rho,t)=\rho y\cdot\lambda_s+\rho^{\kappa+1}(x_1-t)\cdot\xi_1^0+\rho^{\nu+1}x'\cdot\xi^{0\prime}+i\rho|x'|^2,$$
$$1\leqq s\leqq r,\quad t\in R$$

とおけば、

$$e^{-i\varphi_s(x,y,\rho,t)}L_\rho(e^{i\varphi_s}u)=\begin{pmatrix}\rho^{(2\nu+1)m_1}&&\\&\ddots&\\&&\rho^{(2\nu+1)m_N}\end{pmatrix}\{L^0(0,0,\xi^0+\rho^{-\kappa-1}D_1\vartheta,$$
$$\lambda_s+\rho^{-1}D_y)+\sum_{k=\nu}^{N_1-1}\rho^{-k}c_{sk}(x,y,D,D_y)+\rho^{-N_1}R_{sN_1}(x,y,\rho;D,D_y)\}$$
$$\times\begin{pmatrix}\rho^{(2\nu+1)n_1}&&\\&\ddots&\\&&\rho^{(2\nu+1)n_N}\end{pmatrix}u(x,y)$$

とかける。ここで、$C_{sk}(x,y,D,D_y)$ は m 階の微分作用素で係数は(x,y)の多項式を成分とする行列であり，$R_{sN_1}(x,y,\rho;D,D_y)$ は m 階の微分作用素で(x,y)が有界集合をうごくとき係数のすべての導関数が $\rho>\rho_0>0$ に対して一様有界である。

$$u_s(x,y)=\begin{pmatrix}\rho^{-(2\nu+1)m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho^{-(2\nu+1)m_N}\end{pmatrix}\sum_{k=0}^{N_1-1}\rho^{-k}u_s^k(x,y)$$

とおいて，

$$\begin{pmatrix}\rho^{-(2\nu+1)m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho^{-(2\nu+1)m_N}\end{pmatrix}e^{-i\varphi_s}L_\rho(e^{i\varphi_s}u_s)=O(\rho^{-N_1}) \tag{4}$$

をみたすように，$\{u_s^k\}$をもとめよう。$L^0(0,0,\xi^0,\eta^0)\not\equiv 0$ in η であるので，可逆な $P(\eta),Q(\eta)\in M_N(\mathbb{C}[\eta])$ が存在して，

$$Q(\eta)L^0(0,0,\xi^0,\eta^0)P(\eta)=\begin{pmatrix}e_1(\eta) & & \\ & \ddots & \\ & & e_N(\eta)\end{pmatrix}\equiv\Lambda(\eta),$$

$$e_j(\eta)=\prod_{s=1}^{r}(\eta-\lambda_s)^{\mu_{sj}}\,\tilde{e}_j(\eta)$$

とできる。ここで，$\tilde{e}_j(\eta)$はηの多項式で $\tilde{e}_j(\lambda_s)\neq 0$ $(1\leq s\leq r)$ をみたす。また，μ_{sj} は非負整数で，$\mu_s\equiv\sum_{j=1}^{N}\mu_{sj}$ は λ_s の重複度に等しい。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}\tilde{u}_s^k(x,y)\sim P(\lambda_s+\rho^{-1}D_y)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}u_s^k(x,y) \tag{5}$$

によって，$\tilde{u}_s^k$ を定義する。そのとき逆に，

$$\begin{aligned}&\{\Lambda(\lambda_s+\rho^{-1}D_y)+Q(\lambda_s+\rho^{-1}D_y)(L^0(0,0,\xi^0+\rho^{-\kappa-1}D_x,\lambda_s+\rho^{-1}D_y)\\ &-L^0(0,0,\xi^0,\lambda_s+\rho^{-1}D_y)+\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho^{-k}C_{sk}(x,y,D,D_y))P(\lambda_s+\rho^{-1}D_y)\}\\ &\times\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}\tilde{u}_s^k(x,y)\sim 0\end{aligned} \tag{6}$$

をみたすように $\tilde{u}_s^k$ をもとめれば，(5)によって u_s^k をもとめ

て、(4)が成立することがわかる。ここで、$\sim$ は ρ^{-1} についての形式的べき級数として、両辺が等しいことを表わす。

$$e_j(\lambda_s+\eta)=c_{sj\mu_{sj}}\eta^{\mu_{sj}}+c_{sj\mu_{sj}+1}\eta^{\mu_{sj}+1}+\cdots+c_{sj\nu_j}\eta^{\nu_j},$$
$$c_{sj\mu_{sj}}\neq 0,\quad 1\leq s\leq r,\quad 1\leq j\leq N,$$

$$\xi A(\xi,\eta)=Q(\eta)\left(L^0(0,0,\xi^0+\xi\vartheta,\eta)-L^0(0,0,\xi^0,\eta)\right)P(\eta),$$
$$\xi A(\xi,\lambda_s+\eta)=\sum_{p=0}^{\tilde m}\sum_{q=1}^{m}\eta^p\xi^q A_s^{(pq)},\qquad 1\leq s\leq r,$$
$$A_s^{(pq)}=\left(a_{sij}^{(pq)}\right)_{i\downarrow 1,\cdots,N;\,j\rightarrow 1,\cdots,N},$$

と表わせば、(6)は、

$$(6)'\quad \begin{aligned}&c_{sj\mu_{sj}}D_y^{\mu_{sj}}\tilde u_{sj}^{k-\mu_{sj}}+\cdots+c_{sj\nu_j}D_y^{\nu_j}\tilde u_{sj}^{k-\nu_j}\\&+\sum_{p=0}^{\tilde m}\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}a_{sji}^{(pq)}D_1^qD_y^p\tilde u_{si}^{k-p-q(K+1)}+f_{sjk}(\tilde u_s^{k-\nu},\cdots,\tilde u_s^0)=0,\\&\qquad 1\leq j\leq N,\ k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

と同値になる。ここで、$\tilde u_s^k={}^t(\tilde u_{s1}^k,\cdots,\tilde u_{sN}^k)$ である。また、$\{f_{sjk}\}$ は $\{c_{sk}\}$ と P, Q よりきまる関数である。

$$K=\max\{\mu_{sj};\ 1\leq s\leq r,\ 1\leq j\leq N\}$$

ととれば、(6)$'$ より $y=0$ で

$$(7)\quad D_y^{i-1}\tilde u_{sj}^k(x,y)|_{y=0}=\sigma_{sji}^{k+i-1}(x),\quad 1\leq i\leq\mu_{sj},\ 1\leq s\leq r,\ 1\leq j\leq N$$

を任意に指定することにより、$\tilde u_s^k$ が一意的にさだまる。次に $\{\sigma_{sji}^k(x)\}$ を

$$(8)\quad \begin{pmatrix}\rho^{-(2\nu+1)b_1}&&\\&\ddots&\\&&\rho^{-(2\nu+1)b_l}\end{pmatrix}e^{-i\{\rho^{K+1}(x_1-t)\cdot\xi_1^0+\rho^{\nu+1}x'\cdot\xi^{0\prime}+i\rho|x'|^2\}}$$
$$\times B_\rho\Big(\sum_{s=1}^{r}e^{i\varphi_s}u_s\Big)\Big|_{y=0}=O(\rho^{-N_1})$$

なるようにきめよう。そのために常微分方程式系

$$(9)\quad \begin{cases} L^0(0,0,\xi^0+\rho^{-\kappa-1}\varsigma\vartheta,\ \rho^{-1}D_y)\,v(y)=0, & y>0, \\ B^0(0,\xi^0+\rho^{-\kappa-1}\varsigma\vartheta,\ \rho^{-1}D_y)\,v(y)|_{y=0}=h \end{cases}$$

を考えよう。ここで、$\varsigma\in\mathbb{C}$, $h\in\mathbb{C}^l$ である。

<u>補題 11</u>. 正数 C と ρ_0 が存在して、$0<|\varsigma|<C$, $\rho>\rho_0$ に対して、(9) は解 $v(y)\in L^2(\mathbb{R}_+)$ をもち、$v(y)$ は

$$v(y)\equiv v(y,\varsigma,\rho)=\sum_{s=1}^{r} e^{i\rho\lambda_s y}\,v_s(y,\varsigma,\rho),$$

$$v_s(y,\varsigma,\rho)=\sum_{k=-t_s}^{\infty}\rho^{-k}\,v_s^k(y,\varsigma)$$

とかかれる。ここで、$v_s^k(y,\varsigma)$ は $y\geq 0$, $0<|\varsigma|\leq C$ に対して正則で、上の級数は $\rho>\rho_0$ で収束する。また、t_s は L^0, B^0 に依存してきまる整数である。

証明は略する。$\tilde{v}(y)=P(\rho^{-1}D_y)^{-1}v(y)$ とおけば、(9) で h を $\rho^{-t_0-\tilde{b}}h$ でおきかえたものは、

$$(9)'\quad \begin{cases} (\Lambda(\rho^{-1}D_y)+\rho^{-\kappa-1}\varsigma A(\rho^{-\kappa-1}\varsigma,\rho^{-1}D_y))\,\tilde{v}(y)=0, & y>0, \\ \tilde{B}^0(\rho^{-\kappa-1}\varsigma,\rho^{-1}D_y)\,\tilde{v}(y)|_{y=0}=\rho^{-t_0-\tilde{b}}h \end{cases}$$

と同値である。ここで、

$$\tilde{B}^0(\varsigma,\eta)=B^0(0,\xi^0+\varsigma\vartheta,\eta)\,P(\eta),$$

$$\tilde{b}=\deg\tilde{B}^0(\varsigma,\eta),\qquad t_0=\max_{1\leq s\leq r} t_s$$

である。補題 11 より、

$$\tilde{v}(y,\varsigma,\rho)\equiv\tilde{v}(y)=\sum_{s=1}^{r} e^{i\rho\lambda_s y}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}\,\tilde{v}_s^k(y,\varsigma)$$

と書かれる。故に、

$$c_{sj\mu_{sj}} D_y^{\mu_{sj}} \tilde{v}_{sj}^{k-\mu_{sj}} + \cdots + c_{sj\nu_j} D_y^{\nu_j} \tilde{v}_{sj}^{k-\nu_j} + \sum_{p=0}^{\tilde{m}} \sum_{q=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \zeta^q a_{sji}^{(pq)} D_y^p \tilde{v}_{si}^{k-p-q(\kappa+1)} = 0, \quad 1 \leq s \leq r, 1 \leq j \leq N,$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\tilde{v}_s^k = 0 \quad \text{for} \quad k \leq \tilde{b} - 1$$

をみたす。

$$\tilde{\sigma}_{sji}^{k+i-1}(\zeta) = D_y^{i-1} \tilde{v}_{sj}^k (y, \zeta)|_{y=0}, \quad 1 \leq i \leq \mu_{sj}, \ 1 \leq s \leq r, \ 1 \leq j \leq N,$$

$$\tilde{\sigma}^k = {}^t({}^t\tilde{\sigma}_1^k, \cdots, {}^t\tilde{\sigma}_r^k) : l \times 1$$

$$\tilde{\sigma}_s^k = {}^t(\tilde{\sigma}_{s11}^k, \cdots, \tilde{\sigma}_{s1\mu_{s1}}^k, \tilde{\sigma}_{s21}^k, \cdots, \tilde{\sigma}_{sN\mu_{sN}}^k) : \mu_s \times 1$$

とおけば、次の補題が成立する。

<u>補題 12.</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq q(\kappa+1)+\tilde{b} \leq k \\ q \geq 0}} \rho^{-k} \zeta^q G_q \tilde{\sigma}^{k-q(\kappa+1)} = \rho^{-t_0-\tilde{b}} h,$$

$$\tilde{\sigma}^k = 0, \quad k \leq \tilde{b} - 1.$$

ここで、G_q は $l \times l$ 行列で L^0, B^0 よりきまるものである。

<u>補題 13.</u> $\det(\sum_{q=0}^{\infty} \zeta^q G_q) \neq 0$, すなわち、非負整数 q_0 と零でない定数 c が存在して、

$$\det(\sum_{q=0}^{\infty} \zeta^q G_q) = c\zeta^{q_0} + O(\zeta^{q_0+1}) \quad \text{as} \quad \zeta \to 0$$

が成立する。さらに、$\det G_0 = 0$ である。すなわち、$q_0 \geq 1$

である。ここで、$\sum_{g=0}^{g_0} \varsigma^g G_g$ を ς の形式的べき級数環上の行列と考えている。

$$\sigma^k = {}^t({}^t\sigma_1^k, \cdots, {}^t\sigma_r^k),$$

$$\sigma_s^k = {}^t(\sigma_{s11}^k, \cdots, \sigma_{s1\mu_{s1}}^k, \sigma_{s21}^k, \cdots, \sigma_{sN\mu_{sN}}^k)$$

とおく(σ_{sji}^k は(7)で定義されたもの)。

$$(10)\quad \begin{cases} \sum_{0 \le g(\kappa+1)+\tilde{b} \le k,\, g \ge 0} G_g D_1^g \sigma^{k-g(\kappa+1)}(x) \\ \qquad + f^k(\tilde{u}^{k+\kappa-\nu}, \cdots, \tilde{u}^0) = 0, \quad k = 0, \cdots, N_1 - 1 \\ \sigma^k = 0, \quad k \le \tilde{b} - 1 \end{cases}$$

をみたすように σ^k をえらび、(5), (6)', (7) によって u_s^k をもとめれば、そのとき(8)が成立する。ここで、f^k は L, B よりきまるベクトル値関数である。今、補題13と単因子論より可逆な $\tilde{P}(\varsigma), \tilde{Q}(\varsigma) \in M_\ell(\mathbb{C}[\varsigma])$ が存在して、

$$\tilde{Q}(\varsigma)\left(\sum_{g=0}^{g_0} \varsigma^g G_g\right)\tilde{P}(\varsigma) = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1(\varsigma) & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{e}_\ell(\varsigma) \end{pmatrix}, \quad \max_{1 \le j \le \ell} \tilde{\mu}_j = \tilde{\mu} \ge 1,$$

$$\tilde{e}_j(\varsigma) = \varsigma^{\tilde{\mu}_j} + a_{j\tilde{\mu}_j+1} \varsigma^{\tilde{\mu}_j+1} + \cdots + \tilde{a}_{j\tilde{\nu}_j} \varsigma^{\tilde{\nu}_j}, \quad 1 \le j \le \ell,$$

とできる。故に、$\nu = (\kappa+1)\tilde{\mu} + 2\kappa + \tilde{b}$ ととれば、(10) をみたす $\{\sigma^k(x)\}$ で $\sigma^{\tilde{b}}(t, 0) \ne 0$ なるものが存在する。よって、(4), (8)をみたす漸近解 u_s が構成された。$\chi(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}_+})$, $\operatorname{supp} \chi \subset U_1$ かつ $\chi(x, y) = 1$ on U_2 なる χ をとる。ここで、U_j は $(x, y) = (t, 0)$ の $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}_+}$ における近傍で、$(x, y) \in U_1$ に対して、$x_1 > T'$ が成立しているものとする。

$$v(x,y) = \sum_{s=1}^{r} e^{i\varphi_s(x,y,\rho,t)} \chi(x,y) u_s(x,y)$$

とおけば、

$$(11) \quad \begin{cases} L_\rho v(x,y) = O(\rho^{-N_1+(2\nu+1)m_0}), & x_1 \leq t, \\ B_\rho v(x,y)|_{y=0} = O(\rho^{-N_1+(2\nu+1)b_0}), & x_1 \leq t \end{cases}$$

が成立する。ここで、$m_0 = \max_{1 \leq j \leq N} m_j$, $b_0 = \max_{1 \leq j \leq l} b_j$ である。実際、

$$\mathrm{Re}\, i\varphi_s(x,y,\rho,t) \leq -c\rho, \ (x,y) \in U_1 \setminus U_2, \ x_1 \leq t$$

が成立することに注意すれば、(19)は明らかである。故に、N_1を十分大きくとれば、(3)に矛盾する。定理6および定理4のきちんとした証明は、[13]を参照されたい。

REFERENCES

[1] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions' II, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[2] Bierstone, E., Extension of Whitney fields from subanalytic sets, Invent. Math., 46 (1978), 277-300.

[3] Ivrii, V. Ja. and Petkov, V. M., Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Uspehi Mat. Nauk, 29 (1974), no. 5, 3-70. (Russian; English translation in Russian Math. Surveys.)

[4] Kajitani, K., A necessary condition for the well posed hyperbolic mixed problem with variable coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 231-242.

[5] Lax, P. D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24 (1957), 624-646.

[6] Mizohata, S., Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1961), 109-127.

[7] ____________, On evolution equations with finite propagation speed, Israel J. Math., 13 (1972), 173-187.

[8] Sakamoto, R., $\mathcal{E}$-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 93-118.

[9] Seely, R. T., Extension of C^∞ functions defined in a half space, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 625-626.
[10] Soga, H., Mixed problems in a quarter space for the wave equation with a singular oblique derivative, to appear.
[11] ________, Mixed problems for the wave equation with a singular oblique derivative, to appear.
[12] Solonnikov, V. A., On general boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. I, Izv. Akad. Nauk, 28 (1964), 665-706. (Russian; English translation in Amer. Math. Soc. Transl., 56 (1966), 193-232.)
[13] Wakabayashi, S., A necessary condition for the mixed problem to be C^∞ well-posed, in preparation.