数理解析研究所講究録
第 402 巻 1980 年 100-111

Goursat 問題について

京大 理(研修員) 長谷川幸子

次の定数係数偏微分作用素を考えよう。

(1) $P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) \equiv \sum_{i+j+|\alpha| \le m} a_{ij\alpha} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^\alpha$

ここで $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $(t, x, y) \in R^1_+ \times R^1 \times R^\ell$.

最高階(m階微分)の項を P_m, $m-1$階微分の項を P_{m-1} 残りを R_{m-2} とすれば, Pは次のようにあらわされる。

(2) $P = P_m + P_{m-1} + R_{m-2}$.

P_m に対して、次の仮定をおこう。

(A-1) $t=0$ は、一重特性面である。即ち、∂_t^m の係数 $a_{m,0,0} = 0$ かつ $\sum_{j+|\alpha|=1} |a_{m-1,j,\alpha}| \neq 0$.

仮定(A-1)の下で、次の問題(Goursat問題)を、$\mathcal{E}_{t,x,y}$ のクラスで考えよう。

(3) $P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) u(t, x, y) = f(t, x, y) \in \mathcal{E}_{t,x,y}$ $(t \ge 0)$

$$(4)\quad \begin{cases} \partial_t^i u(0,x,y) = u_i(x,y) \in \mathcal{E}_{x,y}, & 0 \le i \le m-2 \\ u(t,0,y) = \varphi(t,y) \in \mathcal{E}_{t,y} & (t \ge 0) \end{cases}$$

(4)をGoursat dataとよぼう。ここで$\{u_i(x,y)\}_{0\le i\le m-2}$と$\varphi(t,y)$との間には、次の関係式（いわゆるcompatibility条件）がなりたっているとする。

$$(5)\quad \partial_t^i \varphi(0,y) = u_i(0,y) \qquad 0 \le i \le m-2.$$

<u>定義</u> Goursat問題が$\mathcal{E}$-well posedであるとは、任意の$\{u_i\}_{0\le i\le m-2}$, $\varphi(t,y)$, $f(t,x,y)$に対して、(3),(4)をみたす解$u(t,x,y)$が$\mathcal{E}_{t,x,y}$の中に一意的に存在することである。

Banachの定理より、$\mathcal{E}$-well posedであれば、写像：$(\{u_i\},\varphi,f) \longrightarrow u$は、$\prod^{m-2}\mathcal{E}_{xy}\times\mathcal{E}_{ty}\times\mathcal{E}_{t,x,y}$から$\mathcal{E}_{t,x,y}$の中への連続写像になっている。

<u>命題1</u> 仮定(A-1)の下に、Goursat問題が、$\mathcal{E}$-well posedであるならば、$\partial_t^{m-1}\partial_x$の係数：$a_{m-1,1,0} \ne 0$である。

証明 $a_{m-1,1,0}=0$ならば、解が存在しないようなdata $\{\{u_i\},\varphi,f\}$がある事を示そう。

$a_{m-1,1,0}=0$の時、(3)で$f=0$とおいた式は、

$$(3')\quad \sum_{|\alpha|\le 1} a_{m-1,0,\alpha}\,\partial_t^{m-1}\partial_y^{\alpha} u(t,x,y) + \sum_{i\le m-2} a_{ij\alpha}\,\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^{\alpha} u(t,x,y) = 0.$$

Goursat data として，次のものを考えよう．

$$(4')\begin{cases} \partial_t^i u(0,x,y)=0 & 0\le i\le m-2 \\ u(t,0,y)=\psi(y)\,t^{m-1}/(m-1)! & \psi(y)\in\mathcal{E}_y\,. \end{cases}$$

この data は明らかに compatibility 条件をみたしている．

$(3')$で $t=0$，$x=0$ とおき，$(4')$を考慮すれば，

$$(5)\quad \sum_{|\alpha|\le 1} a_{m-1,0,\alpha}\,\partial_y^\alpha\,\psi(y)=0.$$

仮定$(A-1)$より，(5)をみたすということは，$\psi(y)$に対する制限になっている．したがって，(5)をみたさないような$\psi(y)$に対しては，Goursat 問題 $(3')-(4')$ の解は存在しない。 q.e.d.

煩雑さを避けるために，記号を少し変えよう。$(A-1)$と，$\mathcal{E}$-well posed を仮定すれば，Pは次のように書ける．

$$(6)\quad P=\Big(\partial_x+\sum_{j=1}^{\ell}a_j\,\partial_{y_j}+c\Big)\partial_t^{m-1}$$
$$+\Big\{h_2(\partial_x,\partial_y)\partial_t^{m-2}+\cdots\quad+h_m(\partial_x,\partial_y)\Big\}.$$

ここで $h_i(\xi,\eta)$は，(ξ,η) の i 次多項式である．

P_m の係数に関して，命題1の他に，さらに次の制限が加わる。

命題2　仮定$(A-1)$の下に，Goursat 問題が $\mathcal{E}$-well posed であるならば，a_jは実数である．

この証明は後で与える。

<u>注意1</u>　命題1,2より，(A−1)とE-well posedを仮定すれば，もとの方程式(3)は，次の形に帰着できる。

$$(7)\quad \partial_t^{m-1}\partial_x u = \sum_{\substack{i+j+|\alpha|\le m \\ i\le m-2}} a_{ij\alpha}\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^\alpha u + f .$$

さて，ここでPの特性方程式を考えよう。

$$P_m(\tau,\xi,\eta) = b_1(\xi,\eta)\tau^{m-1} + b_2(\xi,\eta)\tau^{m-2} + \cdots + b_m(\xi,\eta).$$

$b_1(\xi,\eta)\neq 0$ の時，P_m は τ の $m-1$ 次の多項式である。このとき，Pの特性方程式 $P_m(\tau,\xi,\eta)=0$ の根を，特性根とよび，$\tau_i(\xi,\eta)$ $1\le i\le m-1$ であらわそう。

<u>定理1</u>　(A−1)の下で，Goursat問題がE-well posedであるならば，$(\xi,\eta)\in R^1\times R^\ell$ に対して，特性根は全て実数である。

証明は，[2]で双曲型方程式に対して用いられたと同じ方法で，特性根に実数でないものがあるとすれば，dataから解への連続性が破れることを示す。

この定理は，双曲型方程式のCauchy問題に対する結果と類似である。しかし次の定理は，Goursat問題特有の性質であろうと思われる。

<u>定理2</u>　(A−1)の下で，Goursat問題がE-well posedであるならば，$P_m(\tau,\xi,\eta)$は，$b_1(\xi,\eta)$で割り切れなければな

らない。即ち

(8) $P_m(\tau,\xi,\eta) = b_1(\xi,\eta)\,\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$.

ここで、$\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$は、$m-1$次同次式である。

証明の方針：方程式(7)を考えよう。$y\in R^1$とすれば定理2の主張は、"$\mathcal{E}$-well posedならば、$a_{m-i,0,i}=0\quad 2\leq i\leq m$"である。はじめに、矛盾によって$a_{m-2,0,2}=0$を示す。詳しく云えば、$\mathcal{E}$-well posedと、$a_{m-2,0,2}\neq 0$を仮定して、(7)の解の列で、dataから解への連続性がなりたたないようなものを構成する。次に$a_{m-i,0,i}=0\ (3\leq i\leq m)$を次の方法で示す。即ち、$a_{m-2,0,2}=0$かつ$\sum_{i=3}^{m}|a_{m-i,0,i}|\neq 0$とすれば、特性多項式$P_m(\tau,\xi,\eta)=0$が、虚根をもつことが示され、定理1より、$\mathcal{E}$-well posedであることに反する。

次に低階の部分P_{m-1}に対する制約をのべる。(A-1)の他にさらに次を仮定する。

(A-2) $\mathring{Q}_{m-1}(\partial_t,\partial_x,\partial_y)$はt方向に強双曲型である。即ち、$\mathring{Q}(\tau,\xi,\eta)=0$の根$\tau_i(\xi,\eta)$は、$(\xi,\eta)\in R^1\times R^\ell\setminus\{0\}$に対して、全て実で、かつ相異なる。

<u>定理3</u>　仮定(A-1)、(A-2)の下に、Goursat問題が、$\mathcal{E}$-well posedであるならば、P_{m-1}は次の形でなければならない。

(9) $P_{m-1}(\tau,\xi,\eta) = c\,\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta) + b_1(\xi,\eta)Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$.

この定理は、双曲型方程式の Cauchy 問題の Levi 条件に類似のものである。Cauchy 問題では、特性根が重根になって、はじめて Levi 条件がでてきたが、Goursat 問題では、特性根が単根であっても、このような条件がでてくる。

定理3の基本的な証明の方針は、定理1と同じである。

定理1, 2, 3の逆である次の定理がなりたつ。

<u>定理4</u>

$$P(\tau,\xi,\eta)=(b_1(\xi,\eta)+c)\left(\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)+Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)\right)$$
$$+R_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$$

ここで $b_1(\xi,\eta)$ は (ξ,η) の一次実多項式, $b_1(1,0)=1$,

$\mathring{Q}_{m-1}(\partial_t,\partial_x,\partial_y)$ は t 方向に強双曲型とする。

上の P に対する Goursat 問題は, $\mathcal{E}$-well posed である。

証明は、逐次近似法によって、解を構成する。

定理1〜4の証明については、[1], [3] を参照して下さい。

<u>命題2の証明</u>

ここで、先に残しておいた命題2の証明をしよう。

$\mathrm{Im}\, a_j \neq 0$ とすると, data $\{\psi|_{\Sigma}, \varphi, f\}$ から, 解 $u(t,x,y)$ への連続性が破れることを示そう。

uとして，t, x, y_jのみの関数で，$Pu=0$なるものを考えよう。

$$Pu = (\partial_x - a\partial_y + c)\partial_t^{m-1} u + (h_2(\partial_x, \partial_y)\partial_t^{m-2} + \cdots + h_m(\partial_x \partial_y))u = 0.$$

ここで $a = -a_j$，$\eta \in R^1$ である。

$$u = e^{i\eta(ax+y)-cx} v(t, x)$$

とおけば，$v(t, x)$のみたす方程式は，

$$(10)\quad \partial_x \partial_t^{m-1} v = -\{h_2(\partial_x + ia\eta - c, i\eta)\partial_t^{m-2} + \cdots$$
$$+ h_m(\partial_x + ia\eta - c, i\eta)\} v(t, x)$$
$$\equiv \sum_{s=2}^{m} \sum_{p+q\le s} a_{spq} \partial_x^p \eta^q \partial_t^{m-s} v$$

である。$v(t, x)$に対して，次のGoursat dataを考えよう。

$$(11)\quad \begin{cases} \partial_t^i v(0, x) = 0 & 0 \le i \le m-2 \\ v(t, 0) = t^{m-1}/(m-1)! \end{cases}.$$

(10), (11) をみたす形式解を，

$$(12)\quad v(t, x) = \sum_{j,k} v_{j,k}\, t^j x^k / j!k!$$

とおこう。(11)より

$$(11')\quad \begin{cases} v_{j,k} = 0 & j = 0, 1, \cdots m-2,\ k = 0, 1, 2, \cdots \\ v_{m-1,0} = 1 & \\ v_{j,0} = 0 & j \ne m-1 \end{cases}.$$

(12)を(10)に代入して、両辺の $t^{\ell}x^{r}$ の係数をくらべると、

$$(13)\quad v_{m-1+\ell,\, r+1} = \sum_{s=2}^{m} \sum_{p+q\le s} a_{spq}\, \eta^{q}\, v_{\ell+m-s,\, r+p}$$

(11′)と(13)より

$$(14)\quad v_{m-1+\ell,\, k} = 0 \qquad k > \ell \geq 0.$$

$k \le \ell$ なる項については、η が正の実数で、大の所で次の評価を得る。

$$(15)\quad |v_{\ell+m-1,\, k}| \le A C^{\ell} \eta^{k+\ell} (k+\ell)! \qquad k \le \ell.$$

A, C は定数.

(15)の証明は、ℓ に関する帰納法による。

(12)と(14)より $v_{m-1,0}=1$ を使って次の式が得られる。

$$(16)\quad v(t,x) = \sum_{k\le\ell} v_{m-1+\ell,\, k} \frac{t^{m-1+\ell}\, x^{k}}{(m-1+\ell)!\, k!}$$

$$= \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{\ell\ge1} \sum_{k=0}^{\ell} v_{m-1+\ell,\, k} \frac{t^{m-1+\ell}\, x^{k}}{(m-1+\ell)!\, k!} .$$

上式第2項を、(15)を使って評価しよう。

$$\sum_{\ell\ge1} \sum_{k=0}^{\ell} A C^{\ell} \eta^{k+\ell} (k+\ell)! \frac{t^{m-1+\ell}\, x^{k}}{(m-1+\ell)!\, k!}$$

$$\le \sum_{\ell\ge1} \sum_{k=0}^{\ell} A C^{\ell} \eta^{k+\ell}\, 2^{k+\ell}\, t^{m-1+\ell}\, x^{k}$$

$x=x_0$ で x を固定し、$C>1$, $\eta>1$ とすれば、上式は次の式でおさえられる。

$$(17)\quad A t^{m-1}\sum_{\ell\geqq 1} C^{\ell}\eta^{2\ell}2^{2\ell}t^{\ell}(1+|x_0|)^{\ell}.$$

$$(18)\quad 0<t<1/4C\eta^2(1+|x_0|)$$

のとき，級数(17)は収束する。結局(18)をみたすtに対して，

$$|V(t,x_0)|>t^{m-1}\Big(1-\sum_{\ell=1}^{\infty}A\{4C\eta^2(1+|x_0|)t\}^{\ell}\Big)$$

を得る。よって，例えば，

$$t_\eta = 1/8C\eta^2(1+|x_0|)\cdot A$$

ととれば，

$$(19)\quad |V(t_\eta,x_0)|\geqq M/\eta^{2(m-1)}$$

を得る。ここでMは，ηに無関係な正の定数。

さて，もとのuにもどれば，

$$(20)\quad u=e^{ia\eta x+i\eta y-cx}\,V(t,x)$$

であった。$\mathrm{Im}\,a\neq 0$より，$(\mathrm{Im}\,a)x_0<0$となるように，x_0をとろう。つぎの評価が得られる。

$$(21)\quad |u(t_\eta,x_0,y)|=e^{-(\mathrm{Im}\,a)\cdot x_0\eta-\mathrm{Re}\,c x_0}|V(t_\eta,x_0)|$$
$$\geqq e^{-(\mathrm{Im}\,a)x_0\eta-\mathrm{Re}\,c x_0}M\eta^{-2m+2}$$

一方(20)のuのみたすGoursat dataは，(11)より

$$\begin{cases} \partial_t^i u(0,x,y)=0 & 0\leqq i\leqq m-2\\ u(t,0,y)=e^{i\eta y}t^{m-1}/(m-1)! \end{cases}$$

であるから，E-well posedの仮定より，解はηに関して，

高々多項式の増大order をもつ。これは (21) に矛盾する。

q. e. d

西谷の定理について

最後に西谷氏が[3]で得られた結果についてのべよう。

次の定数係数偏微分作用素を考えよう。

$$(N)\quad A(\partial_t, \partial_x, \partial_y) = \sum_{j=\ell}^{m} C_j(\partial_x, \partial_y)\partial_t^{m-j},\ (t, x, y) \in R_+^1 \times R^1 \times R^\ell.$$

ここで $C_j(\xi, \eta)$ は, (ξ, η) に関する j 次多項式とする。j 次同次部分を C_j^o であらわそう。

仮定 $C_\ell^o(1, 0) = 1$ 即ち $\partial_x^\ell \partial_t^{m-\ell}$ の係数は1.

上の仮定の下で, 次のGoursat問題を考えよう。

$$(P)\quad \begin{cases} A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)\, u(t, x, y) = 0 \\ \partial_t^i u(0, x, y) = \varphi_i(x, y) \in \mathcal{E}_{x,y} & 0 \leq i \leq m-\ell-1 \\ \partial_x^j u(t, 0, y) = \psi_j(t, y) \in \mathcal{E}_{t,y} & 0 \leq j \leq \ell-1 \end{cases}$$

もちろん $\{\varphi_i\}$ と $\{\psi_j\}$ の間には, compatibility 条件がなりたっているとする。

定理 [Nishitani] 上記の仮定の下で, (P) が $\mathcal{E}$-well posed であるための必要かつ十分な条件は, $\varepsilon > 0$ が存在して, $0 < |\delta| \leq \varepsilon$ であるような任意の δ に対して, $A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ は, $(1, \delta, 0)$ 方向に双曲型である。

証明は[3]をみて下さい。

(N)の形に書けるということは，方程式に対してどのくらいの制限になっているのであろうか。$\ell=1$（即ち$t=0$が一重特性面）の時には，いつでもこの形になっている。さらに$t=0$が特性面でかつ，$A(\partial_t,\partial_x,\partial_y)$が，いずれかの方向に双曲型なら，(N)の形になっていることが示される。
(N)の形及び，西谷の定理から，今までのべてきたGoursat問題は，双曲型方程式と非常に密接な関係があることがわかる。

(N)以外の形をしたもので，Goursat問題が$\mathcal{E}$-well posedなものがあるだろうか？
今のところ，(N)以外の形をしたものについて，Goursat問題は定義していないので，一応次のように考えておこう。偏微分作用素の最高階部分については(N)と同じ制限をおくが，低階（$m-1$階微分以下の部分）については，何も制限をおかない，即ち

$$L=\sum_{j=\ell}^{m} C_j^0(\partial_x,\partial_y)\,\partial_t^{m-j}+P_{m-1}(\partial_t,\partial_x,\partial_y).$$

さらに$C_\ell^0(1.0)=1$も仮定する。dataは(P)と同じもの。（$t=0$に$m-\ell$個，$\cancel{x=\ell}$ $x=0$にℓ個与える）とする。

この問に対する答が、どうなのか今のところ(私には)わからないが、ただ一つ否定的な例がある。

$$L = \partial_t^2 + \partial_t \partial_x^2$$

で、$t=0$ に1個、$x=0$ に2個 data を与える Goursat 問題を考える時、これは $\mathcal{E}$-well posed ではない。証明は、$L = \partial_t(\partial_t + \partial_x^2)$ として、$\partial_t + \partial_x^2$ が semi elliptic であることを使えばよい。

参照文献

[1] Y. Hasegawa : On the C^∞-Goursat problem for equations with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. 19-1 (1979) 125-151

[2] S. Mizohata : Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961-1962) 109-127

[3] T. Nishitani : On the $\mathcal{E}$-well posedness for the Goursat problem with contant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. 20-1 (1980) 179-190.