数理解析研究所講究録
第 403 巻 1980 年 8-20

8

Notes on Finitely Determined Singularities of Formal Vector Fields

By Fumio Ichikawa (都立大)

Introduction.

Let X be a germ of C^∞-vector field at $0 \in R^n$. We say that X is k-determined if for any C^∞-vector field germ Y which has the same k-jet as X at $0 \in R^n$, ther is a C^∞-local diffeomorphism $\varphi : (R^n, 0) \longrightarrow (R^n, 0)$ such that $\varphi_* Y = X$. X is finitely determined if there is a positive integer k such that X is k-determined. For the singularities of vector fields, Sternberg linearization theorem [5] is well-known. It can be stated as follows:

Theorem. Let X be a C^∞-vector field on R^n of the following form $X = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + o(|x|)$. Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the eigenvalues of the matrix (a_{ij}), and suppose that for each λ_i, $i=1, \ldots, n$

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n \neq \lambda_i$$

whenever the m_j are non-negative integers with $\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$. Then there exists a C^∞-local diffeomorphism $\varphi : (R^n, 0) \longrightarrow (R^n, 0)$ such that

$$\varphi_* X = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

in some neighbourhood of $0 \in R^n$.

On the other hand, Takens proved the following theorem [10].

Theorem. Let X be a C^∞-vector field on R^1 of the form

$$X(x) = x^k F(x) \frac{\partial}{\partial x}$$

with $F(0) \neq 0$ and $k \geq 2$. Then there exists a C^∞-orientation preserving diffeomorphism $\varphi : (R^1, 0) \longrightarrow (R^1, 0)$ such that in some neighbourhood of $0 \in R^1$,

$$\varphi_* X = (\delta x^k + \alpha x^{2k-1}) \frac{\partial}{\partial x}$$

with $\delta = \pm 1$ and $\alpha \in R^1$; δ and α are uniquely determined by the $(2k-1)$-jet of X at $0 \in R^1$.

Using the notion k-determined, above two theorems assert respectively 1-determined, (2k-1)-determined under the each conditions. In this note we study the condition for the formal vector fields with singularities to be formally finitely determined.

Definitions and statement of the results.

Let K be the field of real numbers R or complex numbers C. Let $\mathfrak{F}(n) = K[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$ be the formal power series algebra on n variables over K. $\mathfrak{m}_n$ denotes the unique maximal ideal of $\mathfrak{F}(n)$.

Formal vector field X is a derivation of $\mathfrak{F}(n)$, i.e. X is a linear map of $\mathfrak{F}(n)$ into itself which satisfies $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ where $f, g \in \mathfrak{F}(n)$. For two derivations X and Y, $[X,Y]$ denotes the usual Lie bracket product, i.e. $[X,Y] = XY - YX$. $\mathfrak{X}^k(n)$ is the Lie algebra given by

$$\left\{ X \;\middle|\; X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha| \geq k+1} a_{i\alpha} x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}.$$

We obtain a sequence of Lie algebras

$$\mathfrak{X}^{o}(n) \supset \mathfrak{X}^{1}(n) \supset \mathfrak{X}^{2}(n) \supset \ \ldots$$

and $\mathfrak{X}^{k}(n)$ is the ideal of $\mathfrak{X}^{o}(n)$.

<u>Definition</u>. By $J^{k}(n)$, we mean the quotient Lie algebra $\mathfrak{X}^{o}(n)/\mathfrak{X}^{k}(n)$ and by $[\ ,\ ]^{k}$ its Lie bracket. $J^{k}(n)$ is called k-<u>jet</u> <u>space</u> and the element of $J^{k}(n)$ is called k-<u>jet</u>.

We have a natural projection $j^{k}\colon \mathfrak{X}^{o}(n) \longrightarrow J^{k}(n)$.

Let X be a derivation of $\mathfrak{F}(n)$ and let φ be a K-algebra automorphism of $\mathfrak{F}(n)$. We define a derivation $\varphi_{*}X$ of $\mathfrak{F}(n)$ by

$$\varphi_{*}X = \varphi^{-1}\circ X\circ \varphi ,$$

i.e. the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(n) \arrow[r, "\varphi_{*}X"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{F}(n) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathfrak{F}(n) \arrow[r, "X"] & \mathfrak{F}(n) \end{tikzcd}$$

commutes. Immediately, we have

$$\varphi_{*}[X,Y] = [\varphi_{*}X,\ \varphi_{*}Y]$$
$$\psi_{*}\ \varphi_{*}X = (\varphi\circ\psi)_{*}X$$

where X and Y are derivations of $\mathfrak{F}(n)$, φ and ψ are automorphisms.

<u>Definition</u>. Let $X,Y \in \mathfrak{X}^{o}(n)$. We will say X and Y are <u>equivalent</u> if there is a K-algebra automorphism φ of $\mathfrak{F}(n)$ such that $\varphi_{*}Y = X$.

<u>Definition</u>. Let $X \in \mathfrak{X}^{o}(n)$. We say X is k-<u>determined</u> if for any $Y \in \mathfrak{X}^{o}(n)$ such that $j^{k}X = j^{k}Y$, X and Y are equivalent. We will say X is <u>finitely</u> <u>determined</u> if X is k-determined for some k.

Definition. Let $z \in J^k(n)$. We say z is wild if for any $X \in \mathfrak{X}^0(n)$ such that $j^k X = z$, X is not finitely determined.

Let $z \in J^1(n)$ and suppose $z = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ denote the eigenvalues of the matrix (a_{ij}) counted with their multiplicities. $K(z)$ denotes the set of n-tuple of non-negative integers given by

$$K(z) = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \;\middle|\; \alpha_1 \cdot \lambda_1 + \dots + \alpha_n \cdot \lambda_n = 0 \right\}.$$

Under this notation, we state the several eigenvalue conditions.

Definition. We say 1-jet z satisfies the strong eigenvalue condition (abbreviated S.E.C.) if $K(z) = \{(0, \dots, 0)\}$.

Definition. We say 1-jet z satisfies the weak eigenvalue condition (abbreviated W.E.C.) if if there is an n-tuple of non-negative integers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ such that

$$K(z) = \{ r\alpha \mid r = 0, 1, 2, \dots \}.$$

Definition. We say 1-jet z satisfies the nice eigenvalue condition (abbreviated N.E.C.) if the following hold

(1) z satisfies W.E.C.

(2) $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_p$ denote the reciprocally distinct eigenvalues of z. For each $i = 1, \dots, p$

if $\beta_1 \tilde{\lambda}_1 + \dots + \beta_p \tilde{\lambda}_p = \tilde{\lambda}_i$

β_j: non-negative integer $j = 1, \dots, p$

then $\beta_i > 0$.

In this note, we scketch the outline of the proof of following theorems [2].

Theorem 1. *Let* $X \in \mathfrak{X}^0(n)$. *If* j^1X *satisfies* S.E.C. , *then* X *is finitely determined*.

Let $X \in \mathfrak{X}^0(n)$. We can decompose X as follows:
$X = X^s + X^n$, $[X^s, X^n] = 0$ where X^s (resp. X^n) is the semi-simple (resp. nilpotent) part of $X : \mathfrak{F}(n) \longrightarrow \mathfrak{F}(n)$. We define precisely in § 2.

Theorem 2. *Let* $X \in \mathfrak{X}^0(n)$. *If* j^1X *satisfies* N.E.C. *but not* S.E.C. *then the following statements are equivalent* :

(1) X *is finitely determined*

(2) $X|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *is non-trivial*, i.e. $X|_{\mathcal{H}} \neq 0$
where $\mathcal{H} = \{ f \in \mathfrak{F}(n) \mid X^s(f) = 0 \}$
and X^s *is the semi-simple part of* X.

Theorem 3. *Let* $z \in J^1(n)$. *If* z *does not satisfy* W.E.C. *then* z *is wild*.

§1. Tangent space of orbit

Gを$\mathfrak{F}(n)$の$\mathbb{K}$-algebra automorphism全体のなすgroupとする。Gの元φが$\varphi(x_i)=y_i$のとき$\varphi=(y_1,\cdots,y_n)$であらわす。G^kを$\varphi=(x_1+\sum_{|\alpha|\geqq k+1} a_{1\alpha}x^\alpha, \cdots, x_n+\sum_{|\alpha|\geqq k+1} a_{n\alpha}x^\alpha)$の形のものからなる$G$のnormal subgroupとし、$GL^k$をquotient group G/G^kとする。GL^kには自然に有限次元Lie群の構造が入る。

GL^k (resp. $J^k(n)$)の元は$\mathfrak{F}(n)/\mathfrak{m}_n^{k+1}$のautomorphism (resp. derivation)である。Gの$\mathfrak{X}^0(n)$への作用をk-Jetで考え

れば、GL^k が $J^k(n)$ に次のように作用している。$X_k \in J^k(n)$, $\varphi_k \in GL^k$ に対し、$\varphi_{k*} X_k = \varphi_k^{-1} \circ X_k \circ \varphi_k$

X_k の GL^k-orbit を $GL^k \cdot X_k$ であらわすと、$GL^k \cdot X_k$ は $J^k(n)$ の sub manifold である。

<u>Definition</u> $X \in \mathfrak{X}^0(n)$ に対し、$\tau_k(X)$, $\tau(X)$ を

$$\tau_k(X) = \text{codimension of } GL^k \cdot (j^k X) \text{ in } J^k(n)$$

$$\tau(X) = \lim_{k \to \infty} \tau_k(X)$$

で定義する。明らかに、$k \leqq l$ のとき $\tau_k(X) \leqq \tau_l(X) \leqq \tau(X)$

<u>Lemma 1.1</u> $X, Y \in \mathfrak{X}^0(n)$ X と Y は equivalent であるとする。
このとき、X が k-det $\Longleftrightarrow$ Y が k-det (証明略)

<u>Proposition 1.2</u> $X \in \mathfrak{X}^0(n)$ X は finitely determined とする。
$\Longrightarrow \tau(X) < \infty$ (証明略)

$X_k \in J^k(n)$ に対し、$\exp X_k$ を次で定義する。

$$\exp X_k = E + X_k + \frac{1}{2!}(X_k)^2 + \cdots$$

但し E は $\mathfrak{F}(n)/\mathfrak{m}_n^{k+1}$ から $\mathfrak{F}(n)/\mathfrak{m}_n^{k+1}$ への恒等写像。定義から、ただちに、$\exp tX_k$ が GL^k の one-parameter subgroup であり、GL^k の単位元における接空間 $T_e GL^k$ と $J^k(n)$ が同一視できることがわかる。さらに $X_k, Y_k \in J^k(n)$ に対し、

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp tY_k)_* X_k = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp -tY_k)\circ X_k \circ (\exp tY_k)$$
$$= [X_k, Y_k]^k$$

従って次の命題をえる。

<u>Proposition 1.3</u> $X \in \mathfrak{X}^0(n)$, $j^k X = X_k$ とする。このとき、

$$T_{X_k} GL^k \cdot X_k = \{ [X_k, Y_k]^k \mid Y_k \in J^k(n) \}$$

特に、 $\tau_k(X) = \dim_{\mathbb{K}} \{ Y_k \in J^k(n) \mid [X_k, Y_k]^k = 0 \}$

§2 Normal Form

以下の section で簡単のため $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。

$X_k \in J^k(n)$ に対し、 X_k^s (resp. X_k^n) を linear map $X_k : \mathfrak{F}/\mathfrak{m}^{k+1} \longrightarrow \mathfrak{F}/\mathfrak{m}^{k+1}$ の semi-simple part (resp. nilpotent part) とする。

i.e. $X_k = X_k^s + X_k^n$, $[X_k^s, X_k^n]^k = 0$ この分解は unique

<u>Proposition 2.1</u> X_k^s, X_k^n は $\mathfrak{F}(n)/\mathfrak{m}_n^{k+1}$ の derivation である。

(証明略)

<u>Definition</u> $X \in \mathfrak{X}^0(n)$, $X_k = j^k X$ とする。このとき、

$$X^s = \varprojlim_k X_k^s \qquad X^n = \varprojlim_k X_k^n \qquad \text{(inverse limit)}$$

とおき、X^s, X^n を X の semi-simple part, nilpotent part という。

$X = X^s + X^n$, $[X^s, X^n] = 0$ $G \ni \varphi$ に対して

$(\varphi_* X)^s = \varphi_* X^s$, $(\varphi_* X)^n = \varphi_* X^n$ が成立つ。

次に標準形について述べる[3],[6]。適当な線形変換で $X\in\mathcal{X}^0(n)$ の 1-jet X_1 は Jordan 標準形になっていると仮定する。

i.e. $X_1^S=\lambda_1 x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_2 x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_n x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$

各 $i=1,2,\cdots,n$ に対し、帰納的に $f_i^k\in\mathcal{F}/m^{k+1}$ $k=1,2,3,\cdots$ を次をみたすようにとることができる。

$$f_i^1=x_i\ ,\quad X_k^S f_i^k=\lambda_i f_i^k\ ,\quad \pi_{k,k+1}f_i^{k+1}=f_i^k$$

但し $X_k=j^kX$, $\pi_{k,k+1}:\mathcal{F}/m^{k+2}\longrightarrow\mathcal{F}/m^{k+1}$ projection。

$f_i=\varprojlim_k f_i^k$ (inverse limit) と定義すると明らかに

$$X^S f_i=\lambda_i f_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

従って $G\ni\varphi$ $\varphi=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ で変換すると

$$(\varphi_*X)^S=\varphi_*X^S=\lambda_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_nx_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$[(\varphi_*X)^S,(\varphi_*X)^n]=0$ に注意すれば、φ_*X は次の形をしている。

$$\varphi_*X=X_1+\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\langle\mu,\lambda\rangle=\lambda_i}a_{i\mu}x^{\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (*)$$

但し $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$: n-tuple of non-negative integers $|\mu|\geq 2$

$\langle\mu,\lambda\rangle=\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2+\cdots+\mu_n\lambda_n$ とする。

(*) を X の <u>normal form</u> と呼ぶ。

[Remark] X の normal form は一意的には定まらない。しかし、$j^kX=j^kY$ のとき、X と Y の normal form は同じ k-jet をもつように出来る。

§3. Proof

定理1の証明

Lemma 1.1より、Xの1-jet X_1はJordan標準形になっていると仮定して一般性失もない。X_1の固有値を$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$とすると、$X_1$がS.E.C.をみたすことから容易に

$$T = \{\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \text{ 非負整数の} n \text{組} \mid \langle \mu, \lambda \rangle = \lambda_i \text{ for some } \lambda_i \ i = 1, \cdots, n \ |\mu| \geqq 2\}$$

は有限集合である。但し $|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n$。

$$k = \max_{\mu \in T} |\mu|$$

とおけば、Remarkより、k-jetがXと同じ任意のYに対し、XとYは同じnormal formをもつ。即ち XとYはequivalent 従って、Xはk-determined。

定理3の証明の概略

簡単のため、1-jet Zが対角化されている場合のみ証明する。$Z = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$

ZがW.E.C.をみたさないとすると、非負整数のn組 μ, νで、$\langle \mu, \lambda \rangle = \langle \nu, \lambda \rangle = 0$, $|\mu| = |\nu| = T$, μとνは$\mathbb{Q}$上一次独立であるものが存在する。

$X \in \mathcal{X}^0(n)$を$j^1X = Z$となるようにとると、$s = 0, 1, \cdots, l$に対し、$\left[X_{lT+1}, x^{s\mu+(l-s)\nu} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right]^{lT+1} = \left[Z, x^{s\mu+(l-s)\nu} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right]$

$=0$. 但し $X_{\ell T+1}=j^{\ell T+1}X$ である。

Prop 1.3 より $T_{\ell T+1}(X)>\ell$ $\ell\to\infty$ とすれば $\tau(X)=\infty$

Prop 1.2 より X は finitely determined でない。 X は任意であったから、Σ は wild である。

定理2の証明の概要

$X\in\mathfrak{X}^0(n)$ の 1-jet X_1 は N.E.C. をみたし、S.E.C. をみたさないとする。X_1の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ が互いに相異なる場合を扱う。Th 2 (2) が座標系によらない表現であることに注意すれば、Lemma 1.1 より X は normal form になっていると仮定してよい。即ち

$$X_1=\lambda_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_nx_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

(**) $$X=X_1+\sum_{m=1}^{\infty}a_{1m}x^{m\alpha}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}x^{m\alpha}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

但し $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 非負整数のn組で $K(X_1)=\{r\alpha\mid r=0,1,2,\cdots\}$

この時、Xの semi-simple part $X^S=\lambda_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_nx_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ であるから、$\mathcal{H}=\{f\in\mathcal{F}\mid X^S(f)=0\}=\{\sum_{m=0}^{\infty}b_mx^{m\alpha}\}$ で与えられ、容易に次が同値であることがわかる。

(2) $X|_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ が non-trivial i.e. $X|_{\mathcal{H}}\neq 0$

(3) ある正整数Lが存在して、$a_{1L}\alpha_1+a_{2L}\alpha_2+\cdots+a_{nL}\alpha_n\neq 0$

従って (1)$\Longleftrightarrow$(3)を証明すればよい。 まず (1)$\Longrightarrow$(3) は次からわかる。

Proposition 3.1　$X\in\mathfrak{X}^0(n)$ は normal form (**) になっているとする。全ての m に対し $\sum_{i=1}^{n} a_{im}\alpha_i=0$ ならば、X は finitely determined でない。

[証明]　任意の ℓ に対し $[X, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{\ell\alpha}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}]=0$ であることが容易に計算でわかる。従って $\tau(X)=\infty$　Prop 1.2 より X は finitely determined でない。

以下で $X\in\mathfrak{X}^0(n)$ に対し X_k で k-jet j^kX をあらわす。

Lemma 3.2　$X, Y\in\mathfrak{X}^0(n)$, $Y_1=0$, $[X_k, Y_k]^k=0$ とする。このとき、$j^{k+1}(\exp Y)_*X = X_{k+1}+[X_{k+1}, Y_{k+1}]^{k+1}$　(証明略)

(3) ⇒ (1) の証明　簡単のため、$m=1,2,\cdots,L-1$ に対して $a_{1m}=a_{2m}=\cdots=a_{nm}=0$ の場合のみ証明する。即ち、

$$X=X_1+\sum_{m=L}^{\infty}a_{1m}x^{m\alpha}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\sum_{m=L}^{\infty}a_{nm}x^{m\alpha}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$\sum_{i=1}^{n}a_{iL}\alpha_i\neq 0$ と仮定する。

$X_{(L)}:=a_{1L}x^{L\alpha}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+a_{nL}x^{L\alpha}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$, $M:=\sum_{i=1}^{n}a_{iL}\alpha_i$

$B_\ell:=x^{\ell\alpha}x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,x^{\ell\alpha}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ で張られる vector space とする。$[X_{(L)},-]$ は B_ℓ から $B_{\ell+L}$ への linear map をひきおこす。

$[X_{(L)}, x^{\ell\alpha}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}]=\ell M x^{(\ell+L)\alpha}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-L\alpha_i(\sum_{j=1}^{n}a_{jL}x^{(\ell+L)\alpha}x_j\frac{\partial}{\partial x_j})$

従って B_ℓ $\ell=1,2,\cdots$ の base $x^{\ell\alpha}x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,x^{\ell\alpha}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ を fix して linear map $[X_{(L)},-]:B_\ell\longrightarrow B_{\ell+L}$ を matrix で表示すると、

$$(***) \qquad L\begin{bmatrix} -\alpha_1 a_{1L} & -\alpha_2 a_{1L} & \cdots & -\alpha_n a_{1L} \\ -\alpha_1 a_{2L} & -\alpha_2 a_{2L} & & -\alpha_n a_{2L} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\alpha_1 a_{nL} & -\alpha_2 a_{nL} & \cdots & -\alpha_n a_{nL} \end{bmatrix} + \ell M E$$

但し E は $(n\times n)$ 単位行列をあらわす。

$$\text{determinant } (***) = \ell^{n-1} M^n (\ell - L)$$

従って、$\ell \geqq L+1$ のとき、$[X_{(L)}, -] : B_\ell \longrightarrow B_{\ell+L}$ は surjective.

さて、$B_\ell \ni Y$ に対し $[X, Y] = [X_{(L)}, Y] +$ heigher order に注意すれば、以上のことと Lemma 3.2 より、適当に $Y^{L+1} \in B_{L+1}$ をとれば、$(\exp Y^{L+1})_* X$ は $(2L+1)|\alpha|$-jet が X のそれと同じで、$(2L+1)|\alpha|+1$ 次の項が 0 であるようにできる。さらに $[X^S, Y^{L+1}] = 0$ より $(\exp Y^{L+1})_* X^S = X^S$ に注意すれば、

$$[X^S, (\exp Y^{L+1})_* X] = [(\exp Y^{L+1})_* X^S, (\exp Y^{L+1})_* X]$$
$$= (\exp Y^{L+1})_* [X^S, X] = 0$$

従って、$(\exp Y^{L+1})_* X$ も normal form になっている。

全く同様に、適当な $Y^{L+2} \in B_{L+2}$ をとれば

$$(\exp Y^{L+2})_* [(\exp Y^{L+1})_* X]$$

の $(2L+2)|\alpha|+1$ 次の項が 0 であるようにできる。以下、同様にして帰納的に $B_{L+\ell} \ni Y^{L+\ell}$ $\ell = 1, 2, 3, \cdots$ をとり、

$$\varphi = \varprojlim_{\ell} (\exp Y^{L+1}) \circ (\exp Y^{L+2}) \circ \cdots \circ (\exp Y^{L+\ell})$$

(inverse limit) をとれば、$\varphi_* X$ は $(2L|\alpha|+1)$ 次の polynomial vector field となり、$j^{2L|\alpha|+1} X = j^{2L|\alpha|+1} \varphi_* X$ である。

前節の Remark より Y が X と同じ $(2L|\alpha|+1)$-jet をもつとすると、Y の normal form も X と同じ $(2L|\alpha|+1)$-jet をもち、全く同じ手続で $\varphi_* X$ と同じ polynomial vector field とすることができる。従って X と Y は equivalent. 特に X は $(2L|\alpha|+1)$-determined である。

Reference

[1]. T. Fukuda ：初等カタストロフィー　共立出版 1976

[2] F. Ichikawa ：Finitely Determined Singularities of Formal Vector Fields

[3] A. Koriyama, Y. Maeda, H. Omori：On Lie algebras of vector fields on expansive sets . Japan J. Math 3. 1977

[4] J. Mather ：Stability of C^∞ mappings III , I.H.E.S 35 1968

[6] H. Omori：無限次元リー群論　紀伊國屋 1978

[5] E. Nelson：Topics in dynamics I ：Math. Note Princeton Press. 1969

[7] S. Sternberg：Local contractions and theorem of Poincare Amer. J. Math 79

[9] F. Takens：Singularities of vectorfields I.H.E.S 43 1973

[10] F. Takens：Normal forms for certain singularities of vector fields. . Ann. Inst. Fourier 23. 1973.