数理解析研究所講究録
第 403 巻 1980 年 96-103

v-sufficiency と (h)-regularity について

京大 理学部　小池 敏司

local topological analysis において、最も基本的な問題の一つは、C^k map-germ $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ ($k=1,2,\cdots,\infty,\omega$) の $0\in\mathbb{R}^n$ の近くにおける local topological picture を決定することである。そこから自然に出てくる問題として、"jet の v-sufficiency" がある。

$\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ を $(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ への C^k map germ ($k=1,2,\cdots,\infty,\omega$) の作る vector space とする。r-jet $w\in J^r(n,p)$ が <u>v-sufficient</u> in $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ ($k\geq r$) であるとは、$^\forall f, g\in\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ with $j^r(f)=j^r(g)=w$ に対し、ある $\sigma:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ local homeomorphism が存在して、$\sigma(f^{-1}(0))=g^{-1}(0)$ になる時言う。

v-sufficiency in $\mathcal{E}_{[r]}(n,p)$ 又は $\mathcal{E}_{[r+1]}(n,p)$ に対する判定法は、T. C. Kuo ([2]) によって与えられた。しかし、v-sufficiency in $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ ($k=r+2, r+3,\cdots,\infty,\omega$) に対する characterization は、1つも知られていな

い。

ここでは、(h)-regularity, $(\bar{h})$-regularity という概念を用いて、r-jet $w \in J^r(n,p)$ が v-sufficient in $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ ($k = r+1, r+2, \cdots, \infty, \omega$) になるための characterization を与える。

§1 v-sufficiency と regularity

上に述べたように、v-sufficiency in $\mathcal{E}_{[r]}(n,p)$ 又は $\mathcal{E}_{[r+1]}(n,p)$ に関しては、次の結果が知られている。

定理 1 (T. C. Kuo [2]) r-jet $w \in J^r(n,p)$ に対し、次の条件は同値である。

ⓐ w は、v-sufficient in $\mathcal{E}_{[r]}(n,p)$ (resp. $\mathcal{E}_{[r+1]}(n,p)$) である。

ⓑ ある正数 C (resp. δ) が存在して、

$$d(\mathrm{grad}\, w_1(x), \cdots, \mathrm{grad}\, w_p(x)) \geqq C|x|^{r-1}$$

$$(\text{resp. } d(\mathrm{grad}\, w_1(x), \cdots, \mathrm{grad}\, w_p(x)) \geqq C|x|^{r-\delta})$$

$x \in H_r$; horn neighborhood が成立する。

注意 1 (J. Bochnak and S. Łojasiewicz [1]) 特に $p=1$ の時、horn neighborhood H_r の代わりに

$|x| < \alpha \quad (\alpha > 0)$ と出来る。

<u>定義 1</u>　M_1, M_2 を $\mathbb{R}^l$ の中の n-dim. submanifold $(n < l)$ とし、$M_1 \supseteq A_1 \ni a_1$, $M_2 \supseteq A_2 \ni a_2$ とする。

germ (A_1, a_1) in M_1 と (A_2, a_2) in M_2 とが <u>topological equivalent</u> とは、ある近傍 $U_1 \in \mathcal{V}_{a_1}(M_1)$, $U_2 \in \mathcal{V}_{a_2}(M_2)$ と、ある homeomorphism $h : (U_1, a_1) \longrightarrow (U_2, a_2)$ とが存在して、$h(A_1 \cap U_1) = A_2 \cap U_2$ になる時言う。

X, Y をあるユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ に embed された C^∞-manifold, $y \in Y \subseteq \overline{X}$ とする。

<u>定義 2</u>　S は、$\mathbb{R}^l$ の submanifold, $\dim S = s = \operatorname{codim} Y$ とする。但し、$1 \leqq k \leqq \infty$ とする。

(1)　X が <u>(t^k)-regular</u> over Y at y とは、y で Y に transversal な任意の C^k-submanifold S に対し、ある近傍 $U \in \mathcal{V}_y(\mathbb{R}^l)$ が存在して、U の中で S は X に transversal になる時言う。

(2)　X が <u>(t^k)-regular</u> over Y at y とは、任意の C^k-submanifold S with $y \in S$ and $S \pitchfork Y$ at y

と X との intersection の y での germ の topological type は、S の選び方に独立になる時言う。

(3) X が <u>$(\overline{tt}^k)$-regular</u> over Y at y とは、任意の C^k-submanifold S with $y \in S$ and $S \pitchfork Y$ at y と X との intersection の定義1の意味での y での germ の topological type (即ち、S の中における topological type) は、S の選び方に独立になる時言う。

定義より明らかのように、$(\overline{tt}^k)$-regular $\Rightarrow$ (tt^k)-regular である。

<u>注意 2</u> (t^k), (tt^k)-regular というのは、一般に、$\operatorname{codim} Y \leq s \leq l$ に対し考えられる。その時、<u>(t^k_s)-regular</u>, <u>(tt^k_s)-regular</u> と言う。

<u>定理 2</u> (D. J. A. Trotman [4]) $1 \leqq k \leqq \infty$ に対し、

$$(tt^k_s)\text{-regular} \Rightarrow (t^k_s)\text{-regular} \quad \text{if} \quad \begin{cases} k = 1 \\ k > 1 \text{ and } s > \operatorname{codim} X \end{cases}$$

である。

<u>注意 3</u> $\dim X > \dim Y$ の時、(tt^k)-regular $\Rightarrow$

(t^k)-regular $(1 \leqq k \leqq \infty)$である。

§2 結果

まず、$w \in J^r(n,p)$から定まるvariety V_Fを導入しよう。r-jet $w \in J^r(n,p)$とr次のpolynomial map $w = (w_1(x), \cdots, w_p(x))$とidentifyする事にする。

$$F(x;\lambda) \equiv (F_1(x;\lambda^{(1)}), \cdots, F_p(x;\lambda^{(p)}))$$

但し、$F_i(x;\lambda^{(i)}) = w_i(x) + \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha^{(i)} x^\alpha \quad (1 \leqq i \leqq p)$ とおく。この時、$(\lambda_\alpha^{(i)})$はあるユークリッド空間Λとidentifyされる。

$\mathbb{R}^n \times \Lambda$におけるvariety

V_F : $F_1(x;\lambda^{(1)}) = 0, \cdots, F_p(x;\lambda^{(p)}) = 0$

とする。そのsingular subvarietyは、$\{0\} \times \Lambda$に含まれる i.e. $x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{grad} F_i \ (1 \leqq i \leqq p)$は、一次独立である。

$s > 0$に対し、$\pi_s : J^{r+s}(n,p) \longrightarrow J^r(n,p)$ canonical projectionとする。

r-jet $w \in J^r(n,p)$のrealizationの$0 \in \mathbb{R}^n$でのvarietyのgermのtopological typeとV_Fのregularityに関して、次の事が知られている。

<u>定理3</u> (T. C. Kuo and Y. C. Lu [3]) 次の条件は同値である。但し、$1 \leqq s < \infty$ とする。

ⓐ V_F は (t^s)-regular over Λ at 0 である。

ⓑ 任意の $\tilde{z} \in \pi_s^{-1}(w)$ は、v-sufficient in $\mathcal{E}_{[r+s]}(n,p)$ である。

ⓒ w は、$0 \in \mathbb{R}^n$ での variety の germ が non-homeomorphic な C^{r+s}-realization を高々有限個しか持たない。

定理3より、$w \in J^r(n,p)$ の realization の variety の topological type の有限性は、V_F の (t)-regularity で characterize された。ここで、特に有限個が一個になる時、即ち、$w \in J^r(n,p)$ が v-sufficient になる事を V_F の regularity を用いて characterize されないだろうか？
定理3と注意3より、r-jet $w \in J^r(n,p)$ と V_F の regularity については、次の図式が成立する事がわかる。

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
w\,;\ (v\text{-suff. in}) & \mathcal{E}_{[r+1]} & \to & \mathcal{E}_{[r+2]} & \to\cdots\to & \mathcal{E}_{[r+s]} & \to\cdots\to & \mathcal{E}_{[\infty]} & \to & \mathcal{E}_{[\omega]} \\
 & \updownarrow & & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & & & \\
V_F\,;\ (\text{-regular}) & (t^1) & \to & (t^2) & \to\cdots\to & (t^s) & \to\cdots\to & (t^\infty) & \to & (t^\omega) \\
 & \uparrow & & \uparrow & \cdots & \uparrow & \cdots & \uparrow & & \\
 & (h^1) & \to & (h^2) & \to\cdots\to & (h^s) & \to\cdots\to & (h^\infty) & \to & (h^\omega)
\end{array}
$$

<u>注意 4</u>　$V_F - \Lambda$, Λ は、semi-analytic な analytic submanifold より、(t^ω), $(\bar{t}^\omega)$-regularity を考える事にする。

$w \in J^r(n,p)$ の v-sufficiency in $\mathcal{E}_{[r+s]}(n,p)$ と V_F の (t^s), $(\bar{t}^s)$-regularity に関する考察により、次の結果を得た。

<u>定理</u>　(I) 次の条件ⓐⓑは同値である。

(i)　$s \in \mathbb{N}$ の時、ⓐ w は、v-sufficient in $\mathcal{E}_{[r+s]}(n,p)$ である。

ⓑ V_F は、$(\bar{t}^s)$-regular over Λ at 0 である。

(ii) $k = \infty, \omega$ の時、ⓐ w は、v-sufficient in $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ である。

ⓑ V_F は、$(\bar{t}^k)$-regular over Λ at 0 である。

(II) 特に $p \geqq 2$, $s \in \mathbb{N}$ の時、次の条件ⓒも同値である。

ⓒ V_F は、(t^s)-regular over Λ at 0 である。

<u>問題</u>　$p=1$ の時も、(t)-regularity が同値になるか？ $n=1, 2$ の時は成立している。

文　献

[1] J. Bochnak and S. Łojasiewicz : A converse

of the Kuiper-Kuo theorem, Proc. of the Liverpool Singularities Sym. Springer Lecture Notes in Math. 192 (1971), p254-261.

[2] T. C. Kuo: *Characterizations of v-sufficiency of jets*, Topology 11 (1972), p115-131.

[3] T. C. Kuo and Y. C. Lu: *Sufficiency of jets via stratification theory*, Invent. Math., 57 Fasc. 3 (1980), p219-226.

[4] D. J. A. Trotman: Interprétations Topologiques des Conditions de Whitney, Soc. Math. France, Astérisque 59-60 (1978), p223-248.