

## 5-デザインについて

広大学校教員 景山 三平

5- $(v, k, \lambda)$  design について次の2つの結果を述べよう。

[定理1]  $v \geq 2k$  なる 5-design  $\alpha$  について、 $\lambda$  数  $b$  は  $b \geq v(v-1)$  を満たす。

[定理2] 5- $(12, 6, 1)$  design は  $b = v(v-1)$  を満たす唯一つの 5-design である (補構造を除く)。

Ray-Chaudhuri and Wilson [4] は  $v \geq k+3$  なる 5-design に対して  $b \geq (v-1)(v-2)$  を示し、最近 Carmony [1] は  $b = (v-1)(v-2)$  なる 5-design は存在しないことを示した。また Kageyama [2] は  $v \geq k+2$  なる 5-design に対して  $b \geq v(v-1)(v-2)/(2k)$  を示している。この定理はこの不等式の改良と算術づけを与えている。

$t$ -design の complement も  $t$ -design であること  $v \geq 2k$  の範囲で考察することにする。以下、証明を与える。

一般に  $5$ - $(v, k, \lambda_5)$  design に対して

$b = \lambda_5 v(v-1)(v-2)(v-3)(v-4) / [k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)]$  が成り立つ。先ず Kageyama の不等式より次を得る。

補題:  $v \geq 2k+2$  に対して  $b \geq v(v-1)$  が成り立つ。

### (定理 1 の証明)

補題より 定理は  $v=2k, v=2k+1$  のときのみを示せば十分である。

【 $v=2k$  の場合】  $\lambda_2$  のとき  $\lambda_2 = r(k-1)/(2k-1)$  であり  $r = l(2k-1)$  なる自然数  $l$  が存在する。

$5$ -design の  $105X-S$  は  $b = 2l(2k-1), \lambda_2 = l(k-1), \lambda_3 = \frac{l(k-2)}{2}, \lambda_4 = \frac{l(k-2)(k-3)}{2(2k-3)}, \lambda_5 = \frac{l(k-3)(k-4)}{4(2k-3)}$  である。今  $b \geq v(v-1) \iff l \geq k$  であり  $l \geq k$  を示す。  $\lambda_4$  の整数性は  $(k-2, 2k-3) = 1$  であり

(1)  $\frac{l(k-3)}{2k-3}$  は整数である。

$(k-3, 2k-3) \leq 3$  であり 次の 3 つの場合に分けて考える。

(i)  $(k-3, 2k-3) = 1$ : (1) より  $l \geq 2k-3 > k$  ( $\because k \geq 5$ )。即ち  $l > k (\iff b > v(v-1))$  が成り立つ。

(ii)  $(k-3, 2k-3) = 2$ : (1) あり  $l \geq k - 3/2$ .  $v = 2^n$   
 $l = k-1$  あり  $2/4$  は非整数も有り。  $\therefore 2$   $l \geq k$ .

(iii)  $(k-3, 2k-3) = 3$ :  $k-3 = 3a_1, 2k-3 = 3a_2, (a_1, a_2) = 1$   
 $(a_1, a_2)$ : ~~自然数~~. (1) あり

(2)  $\frac{la_1}{a_2}$  は整数である。

$\therefore 2$   $l \geq a_2 = 2k/3 - 1$ .  $\therefore$   $l = a_2$  あり

(3)  $2k = 3(l+1)$

を得る。尚  $\lambda_3 = l(k-2)/2$  と  $k = 3(a_1+1)$  (奇数)

は  $l = \text{even}$  を意味する。  $\therefore$  (3) は矛盾する。

$\therefore 2$   $l \neq a_2$ .  $\therefore$  あり (2) あり  $l \geq 2a_2 = 4k/3 - 2 \geq k$  ( $\because$   $l$  は整数,  $k \geq 5$ ).  $\therefore$   $a \neq 3$  に  $v = 2k$  あり  $l \geq k$  ( $\Leftrightarrow b \geq v(v-1)$ ) が成り立つ。

【 $v = 2k+1$  の場合】  $\therefore$  あり  $v = b/k/(2k+1)$  あり

$b = l(2k+1)$  あり自然数  $l$  が存在する。 5-design の  $11^5$

$X$ - $S$  は  $r = lk, \lambda_2 = \frac{l(k-1)}{2}, \lambda_3 = \frac{l(k+1)(k-2)}{2(2k-1)}$ ,

$\lambda_4 = \frac{l(k-2)(k-3)}{4(2k-1)}, \lambda_5 = \frac{l(k-2)(k-3)(k-4)}{4(2k+1)(2k-3)}$  あり。  $\therefore$

$b \geq v(v-1) \Leftrightarrow l \geq 2k$  あり  $l \geq 2k$  を示す =

あり。  $2/3$  の整数性と  $(k-1, 2k-1) = 1$  あり

(4)  $\frac{l(k-2)}{2k-1}$  は整数である。

$(k-2, 2k-1) \leq 3$  あり 可能性の因子2つの場合に分け  
2考える。

(i)  $(k-2, 2k-1) = 1$ : (4) あり  $l \geq 2k-1$ . 先ず  
 $l = 2k-1$  のとき  $l_5 = (k-2)(k-3)(k-4) / [4(2k-3)]$ .  
また  $(k-2, 2k-3) = 1$ ,  $(k-3, 2k-3) \leq 3$ ,  $(k-4, 2k-3)$   
 $\leq 5$  が成り立つ。  $k=2$  4 $l_5$  の整数性,  $2k-3$  が奇  
数,  $k-3, k-4$  が連続2整数あり  $(k-3, 2k-3) = 3$  則  
 $(k-4, 2k-3) = 5$  の場合のみ成り立つ。  $\therefore$   $k=9$  は意味するが  $l_4 = 2/2$  となり結局  
 $l \geq 2(2k-1) > 2k$  を示す。

(ii)  $(k-2, 2k-1) = 3$  ( $\Leftrightarrow k-2 = 3f_1, 2k-1 = 3f_2, (f_1,$   
 $f_2) = 1$ ): (4) あり

(5)  $\frac{lf_1}{f_2}$  は整数である。

$\therefore$  あり  $l \geq f_2 = (2k-1)/3$ .

(a)  $l = (2k-1)/3$  のとき;  $12l_5$  の整数性も  $(k-2,$   
 $2k-3) = 1$  あり  $(k-3)(k-4)/(2k-3)$  は整数である。

(1) と同様  $k=9$  を得る。  $\therefore$   $k=17$  は  $l = 17/3$   
(非整数) 則 (5) あり  $l \geq 2f_2 = 2(2k-1)/3$  を  
導く。

(b)  $l = 2(2k-1)/3$  のとき;  $6l_5$  の整数性も  $(k-2,$

$2k-3) = 1$  であり  $(k-3)(k-4)/(2k-3)$  は整数となる。  
 (a) と同様  $k=12$   $k=9$  として  $l=34/3$  (非整数) と  
 存在しない (5) であり 再び  $l \geq 3f_2 = 2k-1$  と存在。  
 (c)  $l=2k-1$  である;  $4f_5$  の整数性  $(k-2, 2k-3)$   
 $=1$  であり  $(k-3)(k-4)/(2k-3)$  は整数である。(a)  
 と同様  $k=12$   $k=9$  として  $l=17$  である。  $\therefore$  である  
 $14=21/2$  (非整数) と存在。  $\therefore$   $2l > 2k$   
 $(\Leftrightarrow b > v(v-1))$  と存在。

(定理2の証明)

補題より  $v=2k+2, 2k+1, 2k$  のとき  $v$  に  
 $b=v(v-1)$  存在する 5-design を示すことができる。 実際  
 $b=v(v-1)$  存在する 5-design の  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  は  
 $r=k(v-1), \lambda_2=k(k-1), \lambda_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{v-2},$   
 $\lambda_4 = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(v-2)(v-3)}, \lambda_5 = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{(v-2)(v-3)(v-4)}$

と存在。

[  $v=2k+2$  の場合 ]  $(2k-1, k-1) = 1, (2k-1, k-2) \leq 3,$   
 $(2k-1, k-3) \leq 5, 2k-1$  は奇数 であり  $2\lambda_4$  の整数  
 性より  $(2k-1, k-2) = 3, (2k-1, k-3) = 5$  である,  
 $k=8$  を示す。  $\therefore$  である 5-(18, 8, 2) design の非存在

存在は Kramer [3] により示された。 $\square$

【 $v=2k+1$  の場合】  $\lambda_3$  は常に非整数 ( $k \geq 3$ ) である。 $\square$

【 $v=2k$  の場合】  $(2k-3, k-2) = 1$ ,  $(2k-3) \mid k(k-3)$ ,  
 $(k, 2k-3) \leq 3$ ,  $(k-3, 2k-3) \leq 3$  であり  $2/4$  の整数性は  
 $(k, 2k-3) = 3$ ,  $(k-3, 2k-3) = 3$  を要す。これは  
 $k=6$  を示す ( $\lambda_5 = 1$ ) である。このとき  $5-(12, 6, 1)$   
design は存在 (一部は  $\square$ ) であり  $W.H$  [5] により知ら  
れた。 $\square$

本稿の定理 1, 2 は Carmony [1] により公開問題に  
対して完全な解答を与えた。 $\square$

### 参考文献

- [1] L. A. Carmony (1978). Tight  $(2t+1)$ -designs.  
Utilitas Math. 14, 39-47.
- [2] S. Kageyama (1975). Note on an inequality for  
tactical configurations. Ann. Inst. Statist. Math.  
27, 529-530.
- [3] E. S. Kramer (1975). Some  $t$ -designs for  $t \geq 4$   
and  $v=17, 18$ . Proc. Sixth Southeastern Conf.

on Combinatorics, Graph Theory and Computing  
 (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1975),  
 pp. 443-460.

[4] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson (1975). On  
 $t$ -designs. Osaka J. Math. 12, 737-744.

[5] E. Witt (1938). Über Steinersche  
 Systeme. Abh. Math. Sem. Hamb. 12,  
 265-275.