数理解析研究所講究録
第404巻 1980年 130-134

ネットワークとマトロイド

北大　　木下 循

内要　Capacity にマトロイド的な制限を持つネットワークについての max-flow min-cut 定理の解説。

定義

Map $(E, \mathbb{Z}^+)$ で E から $\mathbb{Z}^+$ への写像全体からなる集合を表わす。(ただし $\mathbb{Z}^+$ は非負整数全体の集合。)

$\varphi, \psi \in$ Map $(E, \mathbb{Z}^+)$ について $\varphi \leq \psi \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \varphi(a) \leq \psi(a)$ $(\forall a \in E)$, また $\|\varphi\| := \sum_{a \in E} \varphi(a)$ と定義する。(ただし E は有限集合とする。)

定義 (integral) polymatroid ;

有限集合 E と $\mathcal{F} \subseteq$ Map $(E, \mathbb{Z}^+)$ への組 $(E, \mathcal{F}) =: M$ が次を満足するとき M を (E 上の, independent vectors $\mathcal{F}$ を持つ) polymatroid と言う。

i) 0写像は$\mathcal{F}$に含まれる。

ii) $\varphi\in\mathcal{F}$, $\psi\leq\varphi\Rightarrow\psi\in\mathcal{F}$。

iii) 任意の$\varphi_0\in Map(E,\mathbb{Z}^+)$について、

$$\mathcal{F}_{\varphi_0}:=\{\varphi\in\mathcal{F}\mid\varphi\leq\varphi_0\}$$

とおくと$\mathcal{F}_{\varphi_0}$のすべての極大元φについての$\|\varphi\|$は一定。(この一定の値をMのφ_0におけるrankと言い$r(\varphi_0)$で表す。)

ここではさらに便宜上 $\max_{\varphi\in\mathcal{F}}\|\varphi\|<\infty$ を仮定する。

polymatroid $M=(E,\mathcal{F})$が特に$\forall\varphi\in\mathcal{F}$, $\forall a\in E$について$\varphi(a)\leq 1$を満たすときMはマトロイドと言う。この場合$\varphi\in Map(E,\mathbb{Z}^+)$, $\varphi(a)\leq 1$ $(\forall a\in E)$ と$\{a\in E\mid\varphi(a)=1\}$を同一視することにより$\mathcal{F}$はEの部分集合の族と考えてよい。

$\varphi_0\in Map(E,\mathbb{Z}^+)$に対して$\langle\varphi_0\rangle:=\{\varphi\mid 0\leq\varphi\leq\varphi_0\}$, $M\langle\varphi_0\rangle:=(E,\langle\varphi_0\rangle)$と置く。$M\langle\varphi_0\rangle$はポリマトロイドとなる。

以下ではネットワークの概念を拡張することを目標とする。

有限集合V(点集合)($|V|=n$とおく)とV上の2n個のポリマトロイドの族(capacity)

$$\Gamma^+:=\{(V,\mathcal{F}_a^+)\}_{a\in V},\ \Gamma^-:=\{(V,\mathcal{F}_a^-)\}_{a\in V},$$

の組$G=(V,\Gamma^+,\Gamma^-)$を考える。この時Gのindependent graph (with capacity)で次の条件を満たす $\varphi \in Map(V \times V, \mathbb{Z}^+)$ (或いは組 (V, φ)) を意味することにする。

「$\forall a \in V$ に対し, $\varphi(a, \cdot) \in \mathcal{F}_a^+$, $\varphi(\cdot, a) \in \mathcal{F}_a^-$.」

次に source, 及び sink と呼ばれる特別な2点 c、d $\in V$ を固定する。

Gの (independent) flow (from c to d) とは、Gの independent graph φ でさらに $\forall a \in V$, $a \neq c, d$ について $\| \varphi(c, \cdot) \| = \| \varphi(\cdot, c) \|$ を満たすものを言う。φ の value $w(\varphi)$ を $w(\varphi) := \| \varphi(c, \cdot) \| - \| \varphi(\cdot, c) \|$ で定める。(これは $\| \varphi(\cdot, d) \| - \| \varphi(d, \cdot) \|$ に等しい。)

$V = A + B$, $A \ni c$, $B \ni d$ なる分割 (cut) に対して, capacity $C(A, B)$ を次のように定める；Gの independent graph φ で $\varphi|_{A \times A} = \varphi|_{B \times B} = \varphi|_{B \times A} = 0$ を満たすもの全体の集合を P とする。このとき

$$C(A, B) := \max_{\varphi \in P} \| \varphi \|$$

と置く。

定理 (max-flow, min-cut theorem)；

$$\max_{\varphi : flow} w(\varphi) = \min_{\substack{A+B=V \\ A \ni c \\ B \ni d}} C(A, B)$$

応用例，2部グラフに関するある命題。

（言葉が簡単になるので）一応デザインの言葉を使って説明する。

1デザイン $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$（$\mathcal{P}$; 点の集合，$\mathcal{B}$; ブロックの集合）を

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2+\cdots+\mathcal{P}_s$$
$$\mathcal{B}=\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2+\cdots+\mathcal{B}_t$$

と分割した場合（$\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_j$）について $\mathcal{D}$ から導かれる結合関係が簡単になる場合を考える．例えば一番単純な場合として次の（＊）の性質が考えられる。

（＊）$\forall i,j$，$\forall a\in\mathcal{P}$，$\forall A\in\mathcal{B}$ について次が成立。

$$|(a)\cap\mathcal{B}_j|\leq 1$$
$$|(A)\cap\mathcal{P}_i|\leq 1 .$$

命題

正の整数 $v, r, b, k, x_1, \cdots x_s, y_1, \cdots y_t$，（ただし，$vr = bk$）を与える。次のような性質を持つパラメーター v, r, b, k の1デザイン $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ が存在するための必要十分条件は次の（＊＊）が成立することである。

「（性質）

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2+\cdots+\mathcal{P}_s ,\quad |\mathcal{P}_i|=x_i$$

$$B = B_1 + B_2 + \cdots + B_t \qquad |B_j| = y_j$$

なる性質(*)を持つような分割が存在する。」

(**) すべての $\overline{\varphi} \in Map(\{1 \cdots s\}, Z^+)$, $\overline{\varphi}(i) \le x_i$

$\overline{\psi} \in Map(\{1 \cdots t\}, Z^+)$, $\overline{\psi}(j) \le y_j$

について次が成立。

$$vk + \sum_{i,j} \min(\overline{\varphi}(i), \overline{\psi}(j)) - k\sum_i \overline{\varphi}(i) - \ell \sum_j \overline{\psi}(j) \ge 0$$

∵ 次のようなグラフ (V, Γ^+, Γ^-) ($\Gamma^+ = \{(V, \mathcal{F}_a^+)\}_{a \in V}$, $\Gamma^- = \{(V, \mathcal{F}_a^-)\}_{a \in V}$) について定理を適用する。

$$V := \{c\} + \{d\} + \{a_1^1 \cdots a_{x_1}^1\} + \cdots + \{a_1^s \cdots a_{x_s}^s\}$$
$$+ \{b_1^1 \cdots b_{y_1}^1\} + \cdots + \{b_1^t \cdots b_{y_t}^t\}$$

source c, sink d.

$\mathcal{F}_c^- = \{\phi\}$, $\mathcal{F}_c^+ = \langle \varphi \rangle$ ($\varphi(a_i^j) = k$, $\varphi(b_i^j) = \varphi(d) = 0$)

$\mathcal{F}_d^+ = \{\phi\}$, $\mathcal{F}_d^- = \langle \psi \rangle$ ($\psi(a_i^j) = \psi(c) = 0$, $\psi(b_i^j) = \ell$)

$\mathcal{F}_{a_i^j}^+ = \{X \subseteq \{b_{k_1}^1 \cdots b_{k_t}^t\} \mid 1 \le k_i \le y_i\}$, $\mathcal{F}_{a_i^j}^- = \{\phi, \{c\}\}$,

$\mathcal{F}_{b_i^j}^- = \{X \subseteq \{a_{k_1}^1 \cdots a_{k_s}^s\} \mid 1 \le k_i \le x_i\}$, $\mathcal{F}_{b_i^j}^+ = \{\phi, \{d\}\}$.

($(V, \mathcal{F}_a^\pm)$ がマトロイドになる部分では $\mathcal{F}_a$ は集合族として表わしている。)