数理解析研究所講究録
第404巻 1980年 135-157

完全2組グラフのbipartite分解について

新居浜高専　潮　和彦

§0. はじめに

n_1+n_2 個の点と n_1n_2 本の線からなる完全2組グラフ K_{n_1,n_2} $(n_1 \leqq n_2)$ を，k_1+k_2 個の点と k_1k_2 本の線からなる完全2組グラフ K_{k_1,k_2} $(k_1 \leqq k_2)$ の和（互いに線を共有しない）に分解すること（bipartite分解）を考える。

bipartite分解において，分解された1つ1つの K_{k_1,k_2} をブロックとよぶ。K_{n_1,n_2} の2組の点集合を V_1, V_2 $(|V_1|=n_1, |V_2|=n_2)$ とする。V_1 の点を k_1 個と V_2 の点を k_2 個もつブロックをA型ブロックとよび，V_2 の点を k_1 個と V_1 の点を k_2 個もつブロックをB型ブロックとよぶ。

K_{n_1,n_2} が K_{k_1,k_2} の和にbipartite分解されることを

$$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$$

で表わし，bipartite分解されないことを

$$K_{n_1,n_2} \not\longrightarrow K_{k_1,k_2}$$

で表わす．

§1.　bipartite 分解の必要条件

bipartite 分解の必要条件に関して，次の定理を得る．

定理1　$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$　$(n_1 \leqq n_2,\ k_1 \leqq k_2)$

$\Longrightarrow$

(N1)　$k_1 \leqq n_1$,　$k_2 \leqq n_2$

(N2)　$k_1k_2 \mid n_1n_2$

(N3)　$n_1 = k_1x_i + k_2y_i$,　$n_2 = k_1x_j' + k_2y_j'$

$(i=1,2,\cdots,n_2;\ j=1,2,\cdots,n_1)$

ただし，$x_i, y_i, x_j', y_j', b_1, b_2$ は

(N4)　$\sum_{i=1}^{n_2} k_1x_i = \sum_{j=1}^{n_1} k_2y_j' = b_1k_1k_2$,　$\sum_{i=1}^{n_2} k_2y_i = \sum_{j=1}^{n_1} k_1x_j' = b_2k_1k_2$

をみたす非負の整数

証明　K_{n_1,n_2} $(n_1 \leqq n_2)$ が b_1 個のA型ブロックと b_2 個のB型ブロックに分解されたものとする．各ブロック K_{k_1,k_2} $(k_1 \leqq k_2)$ は K_{n_1,n_2} のサブグラフであるから，$k_1 \leqq n_1$, $k_1 \leqq n_2$　∴ $k_1 \leqq n_1$．さらに，$n_2 \geqq k_1$, $n_2 \geqq k_2$　∴ $n_2 \geqq k_2$．従って，(N1)は必要である．K_{n_1,n_2} は n_1n_2 本の線をもち，各ブロックは k_1k_2 本の線をもつから，$k_1k_2 \mid n_1n_2$ が成り立つ．従って，(N2)は必要である．

V_2 の点 v_i をもつA型ブロックの数を x_i，B型ブロックの数を y_i とすれば，v_i は $k_1x_i+k_2y_i$ 個の点と結ばれている．v_i は V_1 の n_1 個の点とすべて結ばれているから，$n_1=k_1x_i+k_2y_i$ が成り立つ．V_1 の点 v_j' をもつB型ブロックの数を x_j'，A型ブロックの

数をy_j'とすれば，v_j'は$k_1x_j'+k_2y_j'$個の点と結ばれている．v_j'はV_2のn_2個の点とすべて結ばれているから，$n_2=k_1x_j'+k_2y_j'$が成り立つ．従って，(N3)は必要である．

b_1個のA型ブロックの線を，v_iを結ぶ線として，及び，v_j'を結ぶ線として，2通りに数えれば，$\sum_{i=1}^{n_2}k_1x_i=\sum_{j=1}^{n_1}k_2y_j'=b_1k_1k_2$が成り立つ．$b_2$個のB型ブロックの線を，$v_i$を結ぶ線として，及び，$v_j'$を結ぶ線として，2通りに数えれば，$\sum_{i=1}^{n_2}k_2y_i=\sum_{j=1}^{n_1}k_1x_j'$ $=b_2k_1k_2$が成り立つ．従って，(N4)は必要である．

必要条件(N1)－(N4)はまた十分条件でもあるように思われる．事実，このあとの章に述べるように，(N1)－(N4)をみたすパラメータ$k_1,k_2,n_1,n_2,x_i,y_i,x_j',y_j',b_1,b_2$に関して，多くの場合，十分条件でもあることが証明される．

§2.　隣接行列

bipartite分解に役立つ隣接行列を考える．V_1のn_1個の点を列方向に並べ，V_2のn_2個の点を行方向に並べる．V_2の点v_iとV_1の点v_j'を結ぶ線を(i,j)要素と対応させる．V_2の点v_iとV_1の点v_j'を線で結ぶとき，(i,j)要素の値を1とし，結ばないとき0とすれば，各ブロックに対して，$n_2\times n_1$の0-1行列（隣接行列）が対応する．

今，A型ブロックの1つを

$$B=\{B_1;B_2\}\quad(|B_1|=k_1,\ |B_2|=k_2,\ B_1\subset V_1,\ B_2\subset V_2)$$

とすれば，

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i\in B_2 \text{ かつ } v_j'\in B_1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_{ij}=\begin{cases}k_1 & (v_i\in B_2)\\ 0 & (v_i\notin B_2)\end{cases}\qquad \sum_{i=1}^{n_2} m_{ij}=\begin{cases}k_2 & (v_j'\in B_1)\\ 0 & (v_j'\notin B_1)\end{cases}\qquad \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} m_{ij}=k_1k_2$$

をみたす隣接行列 $M=\|m_{ij}\|$ が対応する．

B型ブロックの1つを

$$B=\{B_1\,;\,B_2\}\quad (|B_1|=k_1,\ |B_2|=k_2,\ B_1\subset V_2,\ B_2\subset V_1)$$

とすれば，

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i\in B_1 \text{ かつ } v_j'\in B_2)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_{ij}=\begin{cases}k_2 & (v_i\in B_1)\\ 0 & (v_i\notin B_1)\end{cases}\qquad \sum_{i=1}^{n_2} m_{ij}=\begin{cases}k_1 & (v_j'\in B_2)\\ 0 & (v_j'\notin B_2)\end{cases}\qquad \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} m_{ij}=k_1k_2$$

をみたす隣接行列 $M=\|m_{ij}\|$ が対応する．

A型ブロックに対応する隣接行列を<u>A-行列</u>，B型ブロックに対応する隣接行列を<u>B-行列</u>とよぶ．どの要素の値も1となる $n_2\times n_1$ の行列を M_G とすれば，K_{n_1,n_2} には M_G が対応する．

従って，K_{n_1,n_2} の bipartite 分解の問題は，行列 M_G を何個かのA-行列とB-行列の和に分解する問題であるといえるので次の定理が成り立つ．

<u>定理2.1</u>　K_{n_1,n_2} が b_1 個のA型ブロック $B_A^{(p)}$ と b_2 個のB型ブ

ロック $B_B^{(q)}$ に分解されるための必要十分条件は、

$$M_G = \sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)} + \sum_{q=1}^{b_2} M_B^{(q)}$$

が成り立つことである。ここで、$M_A^{(p)}$ は $B_A^{(p)}$ に対応する A-行列、$M_B^{(q)}$ は $B_B^{(q)}$ に対応する B-行列である。

必要条件 (N1)-(N4) の十分性に関して、次の定理を得る。

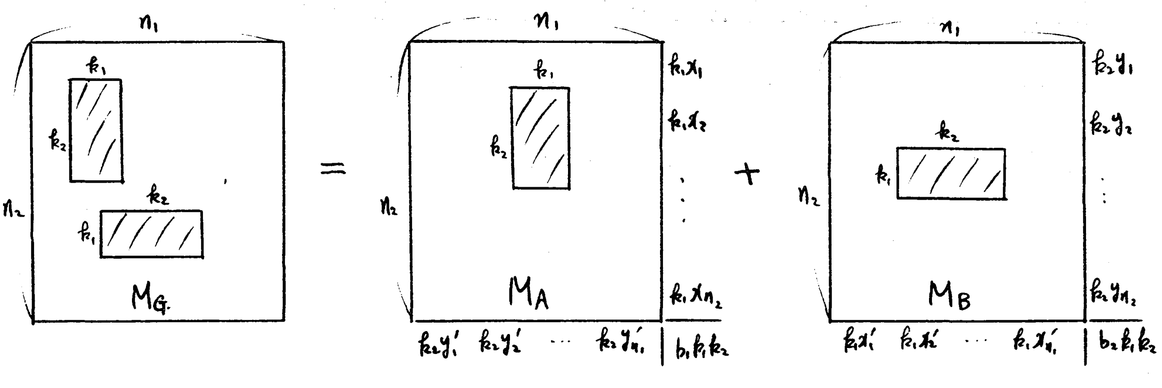
<u>定理2.2</u>　(N1)-(N4) をみたすパラメータに関して、

(I)　行和ベクトル $(k_1x_1, k_1x_2, \dots, k_1x_{n_2})$ と列和ベクトル $(k_2y_1', k_2y_2', \dots, k_2y_{n_1}')$ をもつ隣接行列 M_A と、行和ベクトル $(k_2y_1, k_2y_2, \dots, k_2y_{n_2})$ と列和ベクトル $(k_1x_1', k_1x_2', \dots, k_1x_{n_1}')$ をもつ隣接行列 M_B が存在する。

(II)　$M_A + M_B = M_G$ が成り立つ。

(III)　M_A が b_1 個の A-行列に、M_B が b_2 個の B-行列に分解される。

ならば、$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$.



必要条件 (N1)−(N4) の十分性を

(i) $n_1 \leqq n_2$, $k_1 = k_2$

(ii) $n_1 \leqq n_2$, $1 = k_1 < k_2$

(iii) $n_1 = n_2$, $1 < k_1 < k_2$

(iv) $n_1 < n_2$, $1 < k_1 < k_2$

の4つの場合において考える.

§ 3. bipartite 分解 ($n_1 \leqq n_2$, $k_1 = k_2$ の場合)

$n_1 \leqq n_2$, $k_1 = k_2 = p$ の場合, 次の定理が成り立つ.

定理 3 $K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{p,p} \iff p|n_1,\ p|n_2$

§ 4. bipartite 分解 ($n_1 \leqq n_2$, $1 = k_1 < k_2$ の場合)

$k_1 = 1$ の時, K_{1,k_2} ($k_2 \geqq 2$) は次数 k_2 の claw 又は star とよばれる. $n_1 \leqq n_2$ の場合, 完全2組グラフの claw 分解に関して, 次の定理が得られる.

定理 4 [1; Theorem 2.2] $K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{1,k_2} \iff \begin{cases} k_2|n_2 & (n_1 < k_2 \text{ のとき}) \\ k_2|n_1 n_2 & (n_1 \geqq k_2 \text{ のとき}) \end{cases}$

§ 5. bipartite 分解 ($n_1 = n_2$, $1 < k_1 < k_2$ の場合)

$n_1 = n_2 = n$, $1 < k_1 < k_2$ の場合, 必要条件 (N1) より $k_2 \leqq n$ である. (i) $k_2 = n$, (ii) $k_2 < n$ の2通りを考える.

5.1 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 = n$ の場合)

$1 < k_1 < k_2 = n$ の場合, 次の定理が成り立つ.

定理 5.1 $K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \iff k_1|n$

5.2 bipartite 分解 ($1<k_1<k_2<n$ の場合)

$(k_1, k_2)=d$ とおく. (i) $d=k_1$, (ii) $1\leqq d<k_1$ の2通りが考えられる.

5.2.1 bipartite 分解 ($1<k_1<k_2<n$, $d=k_1$ の場合)

$1<k_1<k_2<n$, $d=k_1$ の場合, 次の定理が成り立つ.

定理 5.2 $K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \Leftrightarrow$ (i) $k_1k_2|n^2$, (ii) $n=k_1x+k_2y$ $(x, y\geqq 0)$

5.2.2 bipartite 分解 ($1<k_1<k_2<n$, $1\leqq d<k_1$ の場合)

$k_1=dk_1'$, $k_2=dk_2'$, $(k_1', k_2')=1$ とおく. 必要条件 (N3) より, $n=k_1x+k_2y=d(k_1'x+k_2'y)$. $\therefore$ $d|n$. $n=dn'$ とおく. 必要条件 (N2) より, $k_1k_2|n^2$ $\therefore$ $k_1'k_2'|n'^2$. k_1', k_2', n' は必要条件 (N1)−(N4) をみたす. k_1', k_2', n' に関して, 次の lemma が成り立つ.

Lemma 5.3 $K_{n',n'} \longrightarrow K_{k_1',k_2'} \Longrightarrow K_{dn',dn'} \longrightarrow K_{dk_1',dk_2'}$

Lemma 5.3 より, $(k_1, k_2)=1$, $1<k_1<k_2<n$ をみたすパラメータ k_1, k_2, n を用いて, 必要条件 (N1)−(N4) の十分性を証明する.

必要条件 (N3) に関して, 次の定理が成り立つ.

定理 5.4 $(k_1, k_2)=1$ のとき, $n=k_1x+k_2y$ $(x, y\geqq 0)$ をみたす (x, y) が1個だけ存在する $\Longrightarrow K_{n,n} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; K_{k_1,k_2}$

$n=k_1x+k_2y$ $(x, y\geqq 0)$ をみたす (x, y) が α 個 $(\alpha\geqq 2)$ とする. $n=k_1x_i+k_2y_i$ $(i=1, 2, \cdots, \alpha)$ ($x_1<x_2<\cdots<x_\alpha$) とおく. $(k_1, k_2)=1$ より, $x_i=x_1+(i-1)k_2$, $y_i=y_\alpha+(\alpha-i)k_1$ $(0\leqq x_1<k_2,\ 0\leqq y_\alpha<k_1)$, $n=k_1x_i+k_2y_i=(\alpha-1)k_1k_2+k_1x_1+k_2y_\alpha$ である. $n_0=n-(\alpha-2)k_1k_2$ とおく. $n_0=k_1k_2+k_1x_1+k_2y_\alpha = k_1x_1+k_2(y_\alpha+k_1)$

$= k_1(x_1+k_2)+k_2y_2$ となり，$n_0=k_1x+k_2y\ (x,y\geqq 0)$ をみたす (x,y) が2個存在する．k_1,k_2,n_0 に関して，次の lemma が成り立つ．

<u>Lemma 5.5</u>　$K_{n_0,n_0}\longrightarrow K_{k_1,k_2}\Rightarrow K_{n_0+(\alpha-2)k_1k_2,\,n_0+(\alpha-2)k_1k_2}\longrightarrow K_{k_1,k_2}$

Lemma 5.5 より，非負の解を2個もつ n に対して，必要条件 (N1)～(N4) の十分性を証明する．

$n=k_1x_1+k_2y_1=k_1x_2+k_2y_2\ (0\leqq x_1<k_2,\ 0\leqq y_2<k_1,\ x_2=x_1+k_2,\ y_1=y_2+k_1)$ とおく．このとき，$n=k_1k_2+k_1x_1+k_2y_2$ である．k_1,k_2,n に関して，(i) $k_1k_2|n$，(ii) $k_1k_2\nmid n$ の2通りが考えられる．

<u>(I) $k_1k_2|n$ の場合</u>　一般に，$k_1k_2|n$ の時，次の定理が成り立つ．

<u>定理 5.6</u>　$k_1k_2|n\Longrightarrow K_{n,n}\longrightarrow K_{k_1,k_2}$

<u>(II) $k_1k_2\nmid n$ の場合</u>　k_1,k_2 を素因数分解する：

$k_1=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_\rho^{e_\rho}=P_1^2Q_1,\ k_2=q_1^{d_1}q_2^{d_2}\cdots q_t^{d_t}=P_2^2Q_2$

とおく．ここで，$P_1=p_1^{[\frac{e_1}{2}]}p_2^{[\frac{e_2}{2}]}\cdots p_\rho^{[\frac{e_\rho}{2}]}$，$Q_1=k_1/P_1^2$，$P_2=q_1^{[\frac{d_1}{2}]}q_2^{[\frac{d_2}{2}]}\cdots q_t^{[\frac{d_t}{2}]}$，$Q_2=k_2/P_2^2$ である．このとき，次の lemma が成り立つ．

<u>Lemma 5.7</u>　$(k_1,k_2)=1$，$k_1k_2|n^2\Longrightarrow P_1Q_1P_2Q_2|n$

$n=P_1Q_1P_2Q_2R$ とおく．$k_1=P_1^2Q_1$，$k_2=P_2^2Q_2$，$n=P_1Q_1P_2Q_2R$ を $n=k_1x_1+k_2y_1$ に代入すれば，$(k_1,k_2)=1$，$0\leqq x_1<k_2$，$k_1\leqq y_1<2k_1$ より

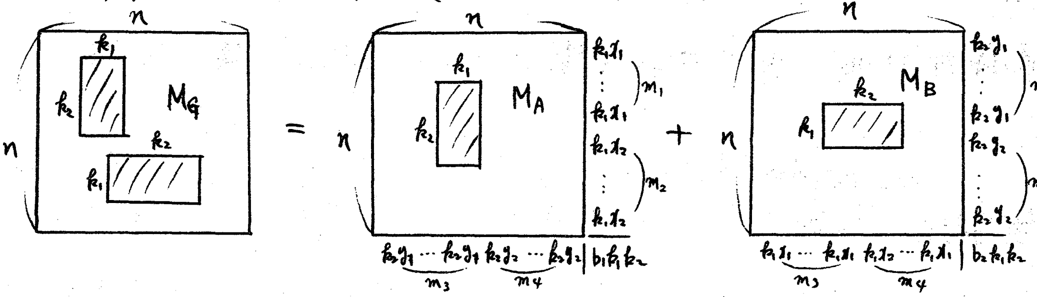
$$x_1=\alpha P_2Q_2,\ y_1=\beta P_1Q_1,\ R=\alpha P_1+\beta P_2\quad(0\leqq\alpha<P_2,\ P_1\leqq\beta<2P_1)$$

を得る．さらに，$x_2=x_1+k_2$，$y_2=y_1-k_1$ より

$$x_2=(\alpha+P_2)P_2Q_2,\ y_2=(\beta-P_1)P_1Q_1$$

を得る．

行和ベクトル $(\overbrace{k_1x_1,\cdots,k_1x_1}^{m_1},\overbrace{k_1x_2,\cdots,k_1x_2}^{m_2})$ と列和ベクトル $(\overbrace{k_2y_1,\cdots,k_2y_1}^{m_3},\overbrace{k_2y_2,\cdots,k_2y_2}^{m_4})$ をもつ隣接行列 M_A と，行和ベクトル $(\overbrace{k_2y_1,\cdots,k_2y_1}^{m_1},\overbrace{k_2y_2,\cdots,k_2y_2}^{m_2})$ と列和ベクトル $(\overbrace{k_1x_1,\cdots,k_1x_1}^{m_3},\overbrace{k_1x_2,\cdots,k_1x_2}^{m_4})$ をもつ隣接行列 M_B の存在を証明する $(m_1+m_2=m_3+m_4=n)$.



$$
(N4)\begin{cases}
k_1x_1m_1+k_1x_2m_2=k_2y_1m_3+k_2y_2m_4=b_1k_1k_2\\
k_2y_1m_1+k_2y_2m_2=k_1x_1m_3+k_1x_2m_4=b_2k_1k_2\\
m_1+m_2=m_3+m_4=n
\end{cases}
$$

をみたすように，m_1,m_2,m_3,m_4 を決めたい．$m_1+m_2=m_3+m_4=n$ をみたす m_1,m_2,m_3,m_4 に対して，次の lemma が成り立つ．

<u>Lemma 5.8</u>　$k_1x_1m_1+k_1x_2m_2$, $k_2y_1m_3+k_2y_2m_4$, $k_2y_1m_1+k_2y_2m_2$, $k_1x_1m_3+k_1x_2m_4$ は，k_1k_2 の倍数である．

<u>Lemma 5.9</u>　$(k_1x_1m_1+k_1x_2m_2)+(k_2y_1m_1+k_2y_2m_2)=n^2$

$(k_2y_1m_3+k_2y_2m_4)+(k_1x_1m_3+k_1x_2m_4)=n^2$ である．

$(k_1,k_2)=1$, $k_1k_2 \nmid n$, $0\leqq x_1<k_2$, $0\leqq y_2<k_1$, $n=k_1k_2+k_1x_1+k_2y_2$ より，$x_1=y_2=0$ はありえない．従って，$k_1x_1=k_2y_2$ はありえない．

$m_3=0$ 又は $m_4=0$ とおいて (N4) をみたす m_1,m_2,m_3,m_4 に関し

て，次の lemma が成り立つ．

<u>Lemma 5.10</u>　(i) $k_1x_1 < k_2y_2$ のとき，$m_2 = \frac{(k_2y_2 - k_1x_1)n}{k_1k_2}$, $m_1 = n - m_2$, $m_3 = 0$, $m_4 = n$ とおく．(ii) $k_1x_1 > k_2y_2$ のとき，$m_1 = \frac{(k_1x_1 - k_2y_2)n}{k_1k_2}$, $m_2 = n - m_1$, $m_3 = n$, $m_4 = 0$ とおく．このとき，m_1, m_2, m_3, m_4 は (N4) をみたす $0 < m_1, m_2 < n$ の整数である．

隣接行列 M_A, M_B の存在に関して，一般に，次の定理が成り立つ．

<u>定理 5.11</u> [1; Corollary 1.3] 総和の等しい行和ベクトル $(r_1, r_2, \cdots, r_m)$ と列和ベクトル $(\overbrace{p, p, \cdots, p}^{n})$ をもつ $m \times n$ の 0-1 行列が存在するための必要十分条件は，

$$r_i \leqq n$$

である．

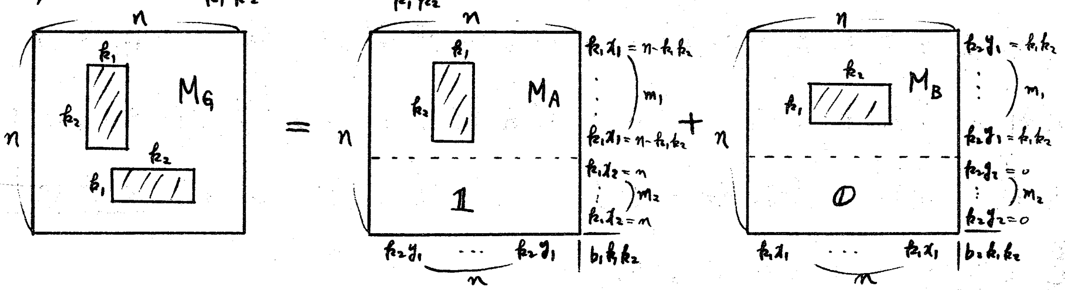
今，$k_1x_1, k_1x_2, k_2y_1, k_2y_2 \leqq n$ であるから，定理 5.11 より，隣接行列 M_A, M_B が存在する．

M_A が b_1 個の A-行列に，M_B が b_2 個の B-行列に分解され，$M_A + M_B = M_G$ が成り立つような M_A, M_B を作る．

$k_1k_2 \nmid n$ より，(i) $k_1 | n, k_2 \nmid n$，(ii) $k_1 \nmid n, k_2 | n$，(iii) $k_1 \nmid n, k_2 \nmid n$ の 3 通りが考えられる．

<u>(II.1) $k_1 | n$, $k_2 \nmid n$ の場合</u>　このとき，$0 < x_1 < k_2$, $x_2 = x_1 + k_2$, $y_1 = k_1$, $y_2 = 0$, $n = k_1k_2 + k_1x_1$ である．よって，$k_1x_1 = n - k_1k_2$, $k_1x_2 = n$, $k_2y_1 = k_1k_2$, $k_2y_2 = 0$ である．$k_1x_1 > k_2y_2$ であるから，Lemma 5.10

より，$m_1 = \frac{(k_1x_1 - k_2y_2)n}{k_1k_2} = \frac{(n-k_1k_2)n}{k_1k_2}$，$m_2 = n - m_1$，$m_3 = n$，$m_4 = 0$　とおく．



$M_A + M_B = M_G$ が成り立つような隣接行列 M_A，M_B を作るアルゴリズムに関して，次の定理が成り立つ．

<u>定理5.12</u> [1; Theorem 1.1]　総和の等しい行和ベクトル $(r_1, r_2, \cdots, r_m)$ と列和ベクトル $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ $(s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n)$ をもつ $m \times n$ の 0-1 行列が存在するための必要十分条件は，行和ベクトル $(r_2, r_3, \cdots, r_m)$ と列和ベクトル $(s_1-1, s_2-1, \cdots, s_{r_1}-1, s_{r_1+1}, \cdots, s_n)$ をもつ $(m-1) \times n$ の 0-1 行列が存在することである．

M_A に関しては，まず，第1行において，第1列から右へ第 k_1x_1 列までの k_1x_1 個の要素を1とする．次に，第2行において，第 (k_1x_1+1) 列から右へ k_1x_1 個の要素をとる．k_1x_1 個の要素をとり終るまでに第 n 列にぶつかった場合は，残りの個数は，第1列から右へとる．これを第 n 行までつづける（第 (m_1+1) 行からは，各行で k_1x_2 個とる）．このアルゴリズムを，<u>右方向の糸巻きアルゴリズム</u>とよぶ．

M_B に関しては，まず，第1行において，第 n 列から左へ第 $(n-k_2y_1+1)$ 列までの k_2y_1 個の要素をとる．次に，第2行において，

オ$(n-k_2y_1)$列から左へk_2y_1個の要素をとる．k_2y_1個の要素をとり終るまでにオ1列にぶつかった場合は，残りの個数は，オn列から左へとる．これをオn行までつづける（オ(m_1+1)行からは，各行でk_2y_2個とる）．このアルゴリズムを，左方向の糸巻きアルゴリズムとよぶ．

定理5.11及び定理5.12より，右方向の糸巻きアルゴリズムによって作られた隣接行列M_Aと，左方向の糸巻きアルゴリズムによって作られた隣接行列M_Bに対して，

$$M_A+M_B=M_G$$

が成り立つ．

M_Aがb_1個のA-行列に，M_Bがb_2個のB-行列に分解されることを証明する．

M_Aにおいて，値1をもつ$b_1k_1k_2$個の要素を，右方向の糸巻きアルゴリズムによってとった要素の順に，一列に並べる．これを要素列とよぶ．$g=(k_1x_1,k_1x_2)$，$k_1x_1=ga$，$k_1x_2=gb$，$(a,b)=1$とおけば，m_1はbの倍数となる．$l=m_1/b$とおく．$gb=k_1x_2=n$であるから，要素列のはじめのn個をオ1行に，次のn個をオ2行に，…と配置する．$la+m_2=la+n-m_1=k_1k_2$より，k_1k_2行の配置となる．これを要素配列とよぶ．この要素配列の各列の要素は，M_Aの同じ列番号をもっている．この要素配列を，k_1列ずつ，k_2行ずつに分割すれば，n個の小配列が得られる．こ

の小配列の各々に対して，A-行列が対応する．

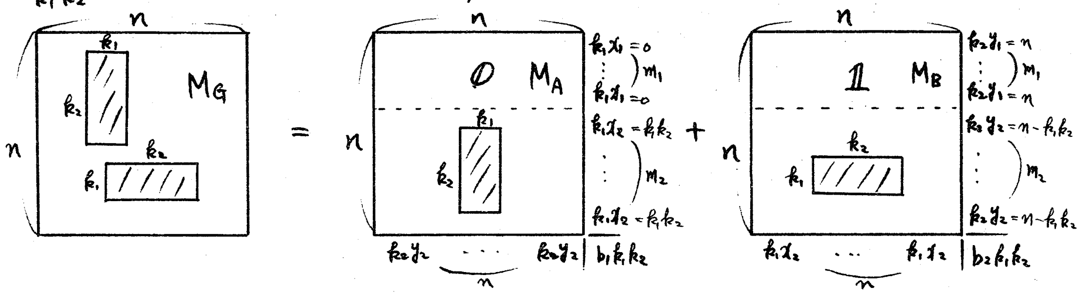
M_Bにおいて，左方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考える．この要素列を k_2m_1 個ずつに分割して，k_1 行の要素配列が得られる．この要素配列を，k_2 列ずつに分割すれば，m_1 個の小配列が得られる．この小配列の各々に対して，B-行列が対応する．従って，M_A は $b_1=n$ 個の A-行列に，M_B は $b_2=m_1$ 個の B-行列に分解される．

以上より，次の定理が得られる．

<u>定理5.13</u>　$1<k_1<k_2<n$，$(k_1,k_2)=1$，$k_1|n$，$k_2\nmid n$，$k_1k_2|n^2$ の場合，

$$n=k_1x+k_2y\ (x,y\geq 0) \text{ をみたす } (x,y) \text{ が 2 個} \Longrightarrow K_{n,n}\longrightarrow K_{k_1,k_2}.$$

<u>(II.2)　$k_1\nmid n$，$k_2|n$ の場合.</u>　このとき，$x_1=0$，$x_2=k_2$，$0<y_2<k_1$，$y_1=y_2+k_1$，$n=k_1k_2+k_2y_2$ である．よって，$k_1x_1=0$，$k_1x_2=k_1k_2$，$k_2y_1=n$，$k_2y_2=n-k_1k_2$ である．$k_1x_1<k_2y_2$ であるから，Lemma5.10より，$m_2=\dfrac{(k_2y_2-k_1x_1)n}{k_1k_2}=\dfrac{(n-k_1k_2)n}{k_1k_2}$，$m_1=n-m_2$，$m_3=0$，$m_4=n$ とおく．



右方向の糸巻きアルゴリズムによって，行和ベクトル $(\overbrace{k_1x_1,\dots,k_1x_1}^{m_1},\overbrace{k_1x_2,\dots,k_1x_2}^{m_2})$ と列和ベクトル $(\overbrace{k_2y_2,\dots,k_2y_2}^{n})$ をもつ隣接行列 M_A を作る．左方向の糸巻きアルゴリズムによって，行和べ

クトル（$k_2y_1, \overbrace{\cdots}^{m_1}, k_2y_1, k_2y_2, \overbrace{\cdots}^{m_2}, k_2y_2$）と列和ベクトル（$k_1x_2, \overbrace{\cdots}^{n}, k_1x_2$）をもつ隣接行列$M_B$を作る．$M_A + M_B = M_G$ が成り立つ．

M_Aにおいて，右方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考える．$k_1m_2 = y_2n$ となるから，この要素列を k_1m_2 個ずつに分割して，k_2 行の要素配列が得られる．これを k_1 列ずつに分割すれば，m_2 個の小配列が得られる．この小配列に A-行列が対応する．

M_Bにおいて，左方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考える．$g' = (k_2y_1, k_2y_2)$, $k_2y_1 = g'a'$, $k_2y_2 = g'b'$, $(a', b') = 1$ とおけば，m_2は a' の倍数となる．$l' = m_2/a'$ とおく．$g'a' = k_2y_1 = n$ であるから，この要素列を n 個ずつに分割して，$m_1 + l'b' = n - m_2 + l'b' = k_1k_2$ 行の要素配列が得られる．これを k_2列ずつ，k_1行ずつに分割すれば，n 個の小配列が得られる．この小配列に B-行列が対応する．従って，M_A は $b_1 = m_2$ 個の A-行列に，M_B は $b_2 = n$ 個の B-行列に分解される．

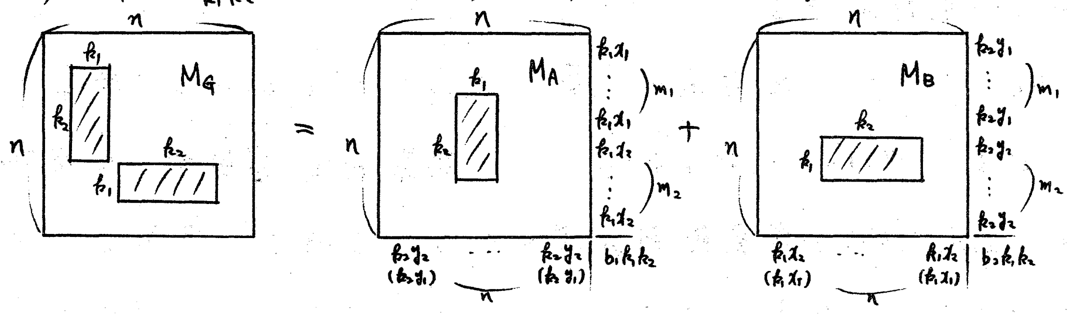
以上より，次の定理が得られる．

<u>定理 5.14</u>　$1 < k_1 < k_2 < n$, $(k_1, k_2) = 1$, $k_1 \nmid n$, $k_2 | n$, $k_1k_2 | n^2$ の場合，

$n = k_1x + k_2y$ $(x, y \geqq 0)$ をみたす (x, y) が２個 $\Longrightarrow$ $K_{n,n} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$．

<u>(II.3)　$k_1 \nmid n$, $k_2 \nmid n$ の場合</u>　このとき，$0 < x_1 < k_2$, $x_2 = x_1 + k_2$, $0 < y_2 < k_1$, $y_1 = y_2 + k_1$, $n = k_1k_2 + k_1x_1 + k_2y_2$ である．Lemma 5.10 より，(i) $k_1x_1 < k_2y_2$ のとき，$m_2 = \dfrac{(k_2y_2 - k_1x_1)n}{k_1k_2}$, $m_1 = n - m_2$, $m_3 = 0$, $m_4 = n$ とおく．(ii) $k_1x_1 > k_2y_2$ の

とき，$m_1=\frac{(k_1x_1-k_2y_2)n}{k_1k_2}$，$m_2=n-m_1$，$m_3=n$，$m_4=0$ とおく．



右方向の糸巻きアルゴリズムによって，行和ベクトル$(\overbrace{k_1x_1,\cdots,k_1x_1}^{m_1},\overbrace{k_1x_2,\cdots,k_1x_2}^{m_2})$と列和ベクトル$(\overbrace{k_2y_2,\cdots,k_2y_2}^{n})$（又は，$(\overbrace{k_2y_1,\cdots,k_2y_1}^{n})$）をもつ隣接行列$M_A$を作る．左方向の糸巻きアルゴリズムによって，行和ベクトル$(\overbrace{k_2y_1,\cdots,k_2y_1}^{m_1},\overbrace{k_2y_2,\cdots,k_2y_2}^{m_2})$と列和ベクトル$(\overbrace{k_1x_2,\cdots,k_1x_2}^{n})$（又は，$(\overbrace{k_1x_1,\cdots,k_1x_1}^{n})$）をもつ隣接行列$M_B$を作る．$M_A+M_B=M_G$が成り立つ．

$k_1x_1m_1$, $k_1x_2m_2$, $k_2y_1m_1$, $k_2y_2m_2$はnの倍数である．$g=(k_1x_1,k_1x_2)$, $k_1x_1=ga$, $k_1x_2=gb$, $(a,b)=1$, $g'=(k_2y_1,k_2y_2)$, $k_2y_1=g'a'$, $k_2y_2=g'b'$, $(a',b')=1$とおく．さらに，$e=(g,g')$, $g=ef$, $g'=ef'$, $(f,f')=1$とおけば，nはeの倍数である．$l=n/e$とおけば，m_1,m_2はlの倍数となる．$l_1=m_1/l$, $l_2=m_2/l$とおく．

M_Aにおいて，右方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考える．$gl=fn$であるから，この要素列をgl個ずつに分割して，l_1a+l_2b行の要素配列が得られる．glはk_1の倍数であり，l_1a+l_2bはk_2の倍数であるから，これをk_1列ずつ，k_2行ずつに分割すれば，$\frac{gl}{k_1}\times\frac{l_1a+l_2b}{k_2}$個の小配列が得られる．この小配列に

A-行列が対応する．

M_Bにおいて，左方向の糸巻きアルゴリズムによる要素列を考える．$g'l=f'n$ であるから，この要素列を $g'l$ 個ずつに分割して，$l_1a'+l_2b'$ 行の要素配列が得られる．$g'l$ は k_2 の倍数であり，$l_1a'+l_2b'$ は k_1 の倍数であるから，これを k_2 列ずつ，k_1 行ずつに分割すれば，$\frac{g'l}{k_2}\times\frac{l_1a'+l_2b'}{k_1}$ 個の小配列が得られる．この小配列にB-行列が対応する．従って，M_A は $b_1=\frac{gl}{k_1}\times\frac{l_1a+l_2b}{k_2}$ 個のA-行列に，M_B は $b_2=\frac{g'l}{k_2}\times\frac{l_1a'+l_2b'}{k_1}$ 個のB-行列に分解される．

以上より，次の定理が得られる．

<u>定理5.15</u>　$1<k_1<k_2<n$，$(k_1,k_2)=1$，$k_1\nmid n$，$k_2\nmid n$，$k_1k_2|n^2$ の場合，

$$n=k_1x+k_2y\ (x,y\geqq 0)\ \text{をみたす}\ (x,y)\ \text{が 2 個} \Longrightarrow K_{n,n}\longrightarrow K_{k_1,k_2}$$

Lemma 5.3 — 定理5.15 より，$1<k_1<k_2<n$，$1\leqq d<k_1$ の場合，次の定理が得られる．

<u>定理5.16</u>　$1<k_1<k_2<n$，$1\leqq d<k_1$ の場合，

$$K_{n,n}\longrightarrow K_{k_1,k_2} \Longleftrightarrow \text{(i)}\ k_1k_2|n^2,\ \text{(ii)}\ n=k_1x+k_2y\ (x,y\geqq 0)\ \text{をみたす}\ (x,y)\ \text{が 2 個以上存在する．}$$

<u>注意</u>　$n=k_1x+k_2y\ (x,y\geqq 0)$ をみたす (x,y) が2個以上存在するときは，必要条件(N4)は余分である．

§6.　bipartite 分解（$n_1<n_2$，$1<k_1<k_2$ の場合）

(i) $n_1\leqq k_2$，(ii) $n_1>k_2$ の2通りを考える．

6.1　bipartite 分解（$n_1<n_2$，$1<k_1<k_2$，$n_1\leqq k_2$ の場合）

必要条件 (N1) より，k_1, k_2, n_1, n_2 の関係は，(i) $k_1 < k_2 = n_1 < n_2$ ，(ii) $k_1 < n_1 < k_2 < n_2$ ，(iii) $k_1 < n_1 < k_2 = n_2$ ，(iv) $k_1 = n_1 < k_2 \leqq n_2$ の 4 通りが考えられる．

(I) $k_1 < k_2 = n_1 < n_2$ の場合　この場合，次の定理が成り立つ．

定理 6.1　$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \iff k_1 | n_2$

(II) $k_1 < n_1 < k_2 < n_2$ の場合　この場合，次の定理が成り立つ．

定理 6.2　$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \iff k_1 | n_1,\ k_2 | n_2$

(III) $k_1 < n_1 < k_2 = n_2$ の場合　この場合，次の定理が成り立つ．

定理 6.3　$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \iff k_1 | n_1$

(IV) $k_1 = n_1 < k_2 < n_2$ の場合　この場合，次の定理が成り立つ．

定理 6.4　$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \iff k_2 | n_2$

6.2 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$ の場合)

$(k_1, k_2) = d$ とおく．(i) $d = k_1$，(ii) $1 \leqq d < k_1$ の 2 通りが考えられる．

6.2.1 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$, $d = k_1$ の場合)

$1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$, $d = k_1$ の場合，次の定理が成り立つ．

定理 6.5　$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \iff \begin{cases} \text{(i) } k_1 k_2 | n_1 n_2, \text{ (ii) } n_1 = k_1 x + k_2 y \ (x, y \geqq 0), \\ \text{(iii) } n_2 = k_1 x' + k_2 y' \ (x', y' \geqq 0) \end{cases}$

6.2.2 bipartite 分解 ($1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$, $1 \leqq d < k_1$ の場合)

$k_1 = d k_1'$, $k_2 = d k_2'$, $(k_1', k_2') = 1$ とおく．必要条件 (N3) より，$n_1 = k_1 x + k_2 y = d(k_1' x + k_2' y)$，$n_2 = k_1 x' + k_2 y' = d(k_1' x' + k_2' y')$．$\therefore\ d | n_1,\ d | n_2$．$n_1 = d n_1'$, $n_2 = d n_2'$

とおく．必要条件 (N2) より $k_1k_2|n_1n_2$. ∴ $k_1'k_2'|n_1'n_2'$. k_1', k_2', n_1', n_2' は必要条件 (N1)−(N4) をみたす．k_1', k_2', n_1', n_2' に関して，次の lemma が成り立つ．

<u>Lemma 6.6</u> $K_{n_1',n_2'} \longrightarrow K_{k_1',k_2'} \Longrightarrow K_{dn_1',dn_2'} \longrightarrow K_{dk_1',dk_2'}$

Lemma 6.6 より，$(k_1,k_2)=1$, $1<k_1<k_2<n_1<n_2$ をみたすパラメータ k_1, k_2, n_1, n_2 を用いて，必要条件 (N1)−(N4) の十分性を考えて行く．k_1, k_2, n_1, n_2 に関して，

(i) $k_1k_2|n_1$, (ii) $k_1k_2|n_2$, (iii) $k_1k_2\nmid n_1,\ k_1k_2\nmid n_2$

の3通りが考えられる．

<u>(I) $k_1k_2|n_1$ の場合</u>　この場合，次の定理が成り立つ．

<u>定理 6.7</u> $K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \Longleftrightarrow n_2 = k_1x' + k_2y'\ (x', y' \geqq 0)$

<u>(II) $k_1k_2|n_2$ の場合</u>　この場合，次の定理が成り立つ．

<u>定理 6.8</u> $K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \Longleftrightarrow n_1 = k_1x + k_2y\ (x, y \geqq 0)$

<u>(III) $k_1k_2\nmid n_1,\ k_1k_2\nmid n_2$ の場合</u>

必要条件 (N3) より，$n_1 = k_1x + k_2y\ (x, y \geqq 0)$ をみたす (x, y) が α 個，$n_2 = k_1x' + k_2y'\ (x', y' \geqq 0)$ をみたす (x', y') が α' 個とする．$n_1 = k_1x_i + k_2y_i$ $(i=1,2,\cdots,\alpha)$ $(x_1<x_2<\cdots<x_\alpha)$, $n_2 = k_1x_j' + k_2y_j'$ $(j=1,2,\cdots,\alpha')$ $(x_1'<x_2'<\cdots<x_{\alpha'}')$ とおく．$(k_1,k_2)=1$ より，$x_i = x_1 + (i-1)k_2$, $y_i = y_\alpha + (\alpha-i)k_1$, $x_j' = x_1' + (j-1)k_2$, $y_j' = y_{\alpha'}' + (\alpha'-j)k_1$, $n_1 = (\alpha-1)k_1k_2 + k_1x_1 + k_2y_\alpha$, $n_2 = (\alpha'-1)k_1k_2 + k_1x_1' + k_2y_{\alpha'}'$ $(0 \leqq x_1, x_1' < k_2,\ 0 \leqq y_\alpha, y_{\alpha'}' < k_1)$ である．

$k_1k_2\nmid n_1$, $(k_1,k_2)=1$ より，k_1, k_2, n_1 に関して，

(i) $k_1|n_1$, $k_2\nmid n_1$, (ii) $k_1\nmid n_1$, $k_2|n_1$, (iii) $k_1\nmid n_1$, $k_2\nmid n_1$

の3通りが考えられる．

$k_1k_2\nmid n_2$, $(k_1,k_2)=1$ より，k_1,k_2,n_2に関して，

(i)$'$ $k_1|n_2$, $k_2\nmid n_2$, (ii)$'$ $k_1\nmid n_2$, $k_2|n_2$, (iii)$'$ $k_1\nmid n_2$, $k_2\nmid n_2$

の3通りが考えられる．

従って，k_1,k_2,n_1,n_2 に関して，(i)−(i)$'$，(i)−(ii)$'$，(i)−(iii)$'$，(ii)−(i)$'$，(ii)−(ii)$'$，(ii)−(iii)$'$，(iii)−(i)$'$，(iii)−(ii)$'$，(iii)−(iii)$'$ の9通りが考えられる．この9通りの場合の各々について，必要条件(N1)−(N4)の十分性を考えて行く．

(III.1) (i)−(ii)$'$: $k_1|n_1$, $k_2\nmid n_1$, $k_1\nmid n_2$, $k_2|n_2$ の場合　一般に，$k_1|n_1$, $k_2|n_2$ の場合に，次の定理が成り立つ．

定理6.9　$k_1|n_1$, $k_2|n_2$ $\Longrightarrow$ $K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

(III.2) (ii)−(i)$'$: $k_1\nmid n_1$, $k_2|n_1$, $k_1|n_2$, $k_2\nmid n_2$ の場合　一般に，$k_2|n_1$, $k_1|n_2$ の場合に，次の定理が成り立つ．

定理6.10　$k_2|n_1$, $k_1|n_2$ $\Longrightarrow$ $K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

(III.3) (i)−(i)$'$: $k_1|n_1$, $k_2\nmid n_1$, $k_1|n_2$, $k_2\nmid n_2$ の場合

$n_1=k_1x+k_2y$ $(x,y\geqq 0)$ をみたす (x,y) が α 個，$n_2=k_1x'+k_2y'$ $(x',y'\geqq 0)$ をみたす (x',y') が α' 個とする．$n_1<n_2$ より，$\alpha\leqq\alpha'$ である．次の定理が成り立つ．

定理6.11　$\alpha=1$, $\alpha'\geqq 1$ $\Longrightarrow$ $K_{n_1,n_2} \not\longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理6.12　$\alpha=\alpha'=2$ $\Longrightarrow$ $K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理 6.13　$2 \leqq \alpha \leqq \alpha' \Longrightarrow K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

以上より，次の定理が得られる．

定理 6.14　$1<k_1<k_2<n_1<n_2$, $(k_1,k_2)=1$, $k_1|n_1$, $k_2\nmid n_1$, $k_1|n_2$, $k_2\nmid n_2$ のとき，

$$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } k_1k_2|n_1n_2 \quad \text{(ii) } n_1=k_1x+k_2y\ (x,y\geqq 0) \text{ をみたす } (x,y) \\ \text{が 2 個以上, (iii) } n_2=k_1x'+k_2y'\ (x',y'\geqq 0) \text{ をみたす } (x',y') \\ \text{が 2 個以上} \end{cases}$$

注意　$2 \leqq \alpha \leqq \alpha'$ のとき，必要条件 (N4) は余分である．

(III.4) (ii)-(ii)′: $k_1\nmid n_1$, $k_2|n_1$, $k_1\nmid n_2$, $k_2|n_2$ の場合

$n_1=k_1x+k_2y\ (x,y\geqq 0)$ をみたす (x,y) が α 個，$n_2=k_1x'+k_2y'\ (x',y'\geqq 0)$ をみたす (x',y') が α' 個とする．$n_1<n_2$ より，$\alpha \leqq \alpha'$ である．次の定理が成り立つ．

定理 6.15　$\alpha=1$, $\alpha'\geqq 1 \Longrightarrow K_{n_1,n_2} \not\longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理 6.16　$\alpha=\alpha'=2 \Longrightarrow K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理 6.17　$2 \leqq \alpha \leqq \alpha' \Longrightarrow K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

以上より，次の定理が得られる．

定理 6.18　$1<k_1<k_2<n_1<n_2$, $(k_1,k_2)=1$, $k_1\nmid n_1$, $k_2|n_1$, $k_1\nmid n_2$, $k_2|n_2$ のとき，

$$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } k_1k_2|n_1n_2\text{,} \quad \text{(ii) } n_1=k_1x+k_2y\ (x,y\geqq 0) \text{ をみたす } (x,y) \\ \text{が 2 個以上, (iii) } n_2=k_1x'+k_2y'\ (x',y'\geqq 0) \text{ をみたす } (x',y') \\ \text{が 2 個以上.} \end{cases}$$

注意　$2 \leqq \alpha \leqq \alpha'$ のとき，必要条件 (N4) は余分である．

(III.5) (i)-(iii)′: $k_1|n_1$, $k_2\nmid n_1$, $k_1\nmid n_2$, $k_2\nmid n_2$ の場合

$n_1 = k_1x + k_2y \ (x, y \geqq 0)$ をみたす (x, y) が α 個, $n_2 = k_1x' + k_2y' \ (x', y' \geqq 0)$ をみたす (x', y') が α' 個とする. $n_1 < n_2$ より, $\alpha \leqq \alpha'+1$ である. 次の定理が成り立つ.

定理 6.19　$\alpha = 1, \alpha' \geqq 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \not\longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.20　$\alpha = 2, \alpha' = 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.21　$\alpha \leqq \alpha'+1 \ (\alpha \geqq 2, \alpha' \geqq 2) \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

以上より, 次の定理が得られる.

定理 6.22　$1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$, $(k_1, k_2) = 1$, $k_1 | n_1$, $k_2 \nmid n_1$, $k_1 \nmid n_2$, $k_2 \nmid n_2$ のとき,

$$K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2} \iff \begin{cases} \text{(i) } k_1k_2 | n_1n_2, \text{ (ii) } n_1 = k_1x + k_2y \ (x, y \geqq 0) \text{ をみたす } (x, y) \\ \text{が 2 個以上, (iii) } n_2 = k_1x' + k_2y' \ (x', y' \geqq 0) \text{ をみたす } (x', y') \\ \text{が 1 個以上} \end{cases}$$

注意　$\alpha \leqq \alpha'+1 \ (\alpha \geqq 2, \alpha' \geqq 1)$ のとき, 必要条件 (N4) は余分である.

(III.6) (ii)-(iii)′: $k_1 \nmid n_1$, $k_2 | n_1$, $k_1 \nmid n_2$, $k_2 \nmid n_2$ の場合

$n_1 = k_1x + k_2y \ (x, y \geqq 0)$ をみたす (x, y) が α 個, $n_2 = k_1x' + k_2y' \ (x', y' \geqq 0)$ をみたす (x', y') が α' 個とする. $n_1 < n_2$ より, $\alpha \leqq \alpha'+1$ である. 次の定理が成り立つ.

定理 6.23　$\alpha = 1, \alpha' \geqq 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \not\longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.24　$\alpha = 2, \alpha' = 1 \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

定理 6.25　$\alpha \leqq \alpha'+1 \ (\alpha \geqq 2, \alpha' \geqq 2) \Rightarrow K_{n_1, n_2} \longrightarrow K_{k_1, k_2}$

以上より, 次の定理が得られる.

定理 6.26　$1 < k_1 < k_2 < n_1 < n_2$, $(k_1, k_2) = 1$, $k_1 \nmid n_1$, $k_2 | n_1$, $k_1 \nmid n_2$, $k_2 \nmid n_2$ のとき,

$$K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2} \iff \begin{cases} \text{(i) } k_1k_2 \mid n_1n_2,\ \text{(ii) } n_1 = k_1x + k_2y\ (x,y \geqq 0) \text{ をみたす} (x,y) \\ \text{が2個以上, (iii) } n_2 = k_1x' + k_2y'\ (x',y' \geqq 0) \text{ をみたす} (x',y') \\ \text{が1個以上.} \end{cases}$$

注意　$\alpha \leqq \alpha'+1\ (\alpha \geqq 2, \alpha' \geqq 1)$ のとき，必要条件(N4)は余分である．

(III.7) (iii)-(i)': $k_1 \nmid n_1,\ k_2 \nmid n_1,\ k_1 \mid n_2,\ k_2 \nmid n_2$ の場合

$n_1 = k_1x + k_2y\ (x,y \geqq 0)$ をみたす (x,y) が α 個，$n_2 = k_1x' + k_2y'\ (x',y' \geqq 0)$ をみたす (x',y') が α' 個とする．$n_1 < n_2$ より，$\alpha \leqq \alpha'$ である．次の定理が成り立つ．

定理 6.27　$\alpha = \alpha' = 1 \implies K_{n_1,n_2} \not\longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理 6.28　$2 \leqq \alpha \leqq \alpha' \implies K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

(III.8) (iii)-(ii)': $k_1 \nmid n_1,\ k_2 \nmid n_1,\ k_1 \nmid n_2,\ k_2 \mid n_2$ の場合

$n_1 = k_1x + k_2y\ (x,y \geqq 0)$ をみたす (x,y) が α 個，$n_2 = k_1x' + k_2y'\ (x',y' \geqq 0)$ をみたす (x',y') が α' 個とする．$n_1 < n_2$ より，$\alpha \leqq \alpha'$ である．次の定理が成り立つ．

定理 6.29　$\alpha = \alpha' = 1 \implies K_{n_1,n_2} \not\longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理 6.30　$2 \leqq \alpha \leqq \alpha' \implies K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

(III.9) (iii)-(iii)': $k_1 \nmid n_1,\ k_2 \nmid n_1,\ k_1 \nmid n_2,\ k_2 \nmid n_2$ の場合

$n_1 = k_1x + k_2y\ (x,y \geqq 0)$ をみたす (x,y) が α 個，$n_2 = k_1x' + k_2y'\ (x',y' \geqq 0)$ をみたす (x',y') が α' 個とする．$n_1 < n_2$ より，$\alpha \leqq \alpha'+1$ である．次の定理が成り立つ．

定理 6.31　$\alpha = \alpha' = 1 \implies K_{n_1,n_2} \not\longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理6.32　$\alpha=3,\ \alpha'=2 \Longrightarrow K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

定理6.33　$\alpha \leqq \alpha'+1\ (\alpha \geqq 2,\ \alpha' \geqq 3) \Longrightarrow K_{n_1,n_2} \longrightarrow K_{k_1,k_2}$

§7. おわりに

§6において，(III.7) $\alpha=1,\ \alpha'\geqq 2$，(III.8) $\alpha=1,\ \alpha'\geqq 2$，(III.9) $\alpha=1,\ \alpha'\geqq 2$ および $\alpha=2,\ \alpha'=1,2$ の場合の十分性に関する証明が残されている．これらの場合を除けば，必要条件(N1)−(N4)はまた，十分条件でもある．

参考文献

[1] S. Yamamoto, H. Ikeda, S. Shige-eda, K. Ushio and N. Hamada, On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, Hiroshima Math. J. 5 (1975), 33-42.

[2] 潮 和彦, Bipartite decomposition of complete bipartite graphs, 日本数学会·昭和55年度年会·応用数学分科会·講演予稿集(1980), 44-50.