数理解析研究所講究録
第 405 巻 1980 年 12-16

確率過程における変数の縮約

九大 理学部　森 肇

多くの体系の状態変数ベクトル $A(t)=\{A_i(t)\}$ の時間変化は確率運動方程式

$$dA_i(t)/dt = V_i(A(t),t) + S_i(A(t),t) \tag{1}$$

によって記述できる。たゞしこゝで $V_i(a,t)$ は $A(t)$ の値 $a=\{a_i\}$ および t の一義的関数であり，$S_i(a,t)$ は確率過程である。$S_i(a,t)$ の型として通常

$$S_i(a,t) = g_{ij}(a)\, r_j^B(t), \tag{2}$$

$$r_j^B(t) : \text{Gaussian white noise}, \tag{3}$$

$$\langle r_j^B(t)\, r_m^B(t')\rangle = 2 L_{jm}^{BB}\, \delta(t-t') \tag{4}$$

が仮定される。たゞしこゝで L_{jm}^{BB} は対称行列である。

問題は，現在トピックスになりつゝある，熱平衡から遠く隔った非平衡開放系では，仮定 (2) が成立しない場合がい

ろいろとあることである。つまり，(2)では

$$\langle S_i(a,t)\, S_l(a',t')\rangle = 2\,\eta_{il}(a,a')\,\delta(t-t'), \tag{5}$$

$$\eta_{il}(a,a') \equiv g_{ij}(a)\, L^{BB}_{jm}\, g_{lm}(a'), \tag{6}$$

$$= \eta_{li}(a',a) \tag{7}$$

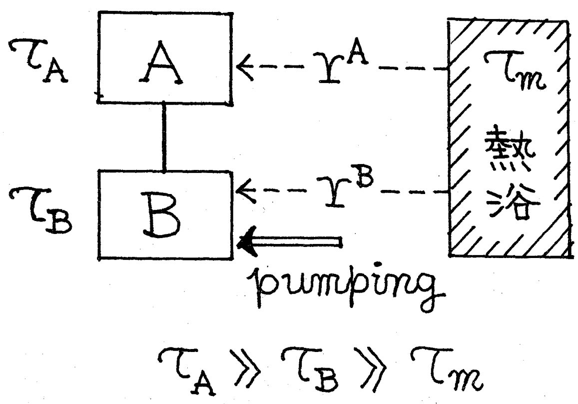
となるが，非平衡開放系では

$$\langle S_i(a,t)\, S_l(a',t')\rangle \tag{8}$$
$$= 2\left[\xi_{il}(a,a')\,\delta_+(t-t') + \xi_{li}(a',a)\,\delta_+(t'-t)\right],$$

$$\xi_{il}(a,a') \neq \xi_{li}(a',a), \tag{9}$$

$$\delta_+(t) \equiv \delta(t)\text{の右半分} \tag{10}$$

となる場合がいろいろとある。非対称(9)が核心であり，このような非対称が何故現われるかについて述べたい。



互に相互作用する2つの体系A，Bが，熱浴からガウス型white noise $\Upsilon^A(t)$, $\Upsilon^B(t)$ をうけ，右図のように，体系Bは

外部からの pumping により熱平衡から遥かにずれた非平衡開放系であるとしよう。このような多くの系がモデル

$$dA_i(t)/dt = v_i(A) - \alpha_{ij}(A)B_j + \Gamma_i^A(t), \tag{11}$$

$$dB_j(t)/dt = \beta_j(A) - \gamma_{jk}(A)B_k + \Gamma_j^B(t) \tag{12}$$

で記述できることが知られている。こゝで係数 $v_i, \alpha_{ij}, \beta_j$ γ_{jk} は $A(t)$ の関数である。問題は (12) を積分して $B_j(t)$ を $A(t)$ および $\Gamma^B(t)$ の関数として表わし，(11) に入れることによって，(1) の型の式を作れるか，またそのとき確率過程 $S_i(a,t)$ としてどの様なものが得られるかということである。このような変数の縮約は，一般には複雑であるが，変数 A，B の時間変化の時間スケール τ_A，τ_B が $\tau_A \gg \tau_B$ のときには，$\delta \equiv \tau_B/\tau_A$ の2次までの近似では，比較的簡単である。適当な時間のスケールをとって

$$v_i,\ \alpha_{ij},\ \Gamma_i^A \sim O(\delta), \tag{13}$$

β_j, γ_{jk}, $\Gamma_j^B \sim O(1)$ としよう。そのとき

$$\begin{aligned} V_i(a,t) = {} & v_i(a) - \alpha_{ij}(a)\,[\gamma^{-1}(a)]_{jk} \\ & \times\Big[\beta_k(a) - \{v_\ell(a) - \alpha_{\ell m}(a)[\gamma^{-1}(a)]_{mn}\beta_n(a)\}\{\tfrac{\partial}{\partial a_\ell}[\gamma^{-1}(a)]_{kp}\beta_p(a)\}\Big] \\ & - \alpha_{ij}(a)[\gamma^{-1}(a)]_{jk}\alpha_{\ell m}(a)\Big[\tfrac{\partial}{\partial a_\ell}\tilde{\chi}_{km}(a,a')\Big]_{a'=a}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$S_i(a,t) = r_i^A(t) - \alpha_{ij}(a)\int_0^\infty d\tau [e^{-\tau\gamma(a)}]_{jk}\, r_k^B(t-\tau) \qquad (15)$$

となる。たゞしこゝで，γ^{-1} は γ の逆行列であり，また

$$\tilde{\chi}_{km}(a,a') \equiv 2\int_0^\infty ds [e^{-s\gamma(a)}]_{ki} L_{ij}^{BB} [e^{-s\gamma(a')}]_{mj}$$

とした。このように，(11)，(12) は変数 $B(t)$ を消去することにより，(1) 式に縮約できる。しかし確率力 $S_i(a,t)$ は，(2) の型とはならず，(15) の第2項のように，記憶型となる。つまり，時刻 t の確率力 $S_i(a,t)$ には，t と $t-\tau_B$ との間の，過去の時刻の r_k^B の値が効いてくる。この記憶効果のために，$\delta\to 0$ の極限でも (8) の非対称性が現われることとなる。事実，(15) の時間相関をとり，$t > t'$ のとき

$$\exp[-(t-t')\gamma(a)] = 2\gamma^{-1}(a)\, \delta_+(t-t')$$

とおけば，(8) が得られ，その係数は

$$\begin{aligned}\xi_{il}(a,a') = L_{il}^{AA} &- 2\alpha_{ij}(a)[\gamma^{-1}(a)]_{jk} L_{kl}^{BA} \\ &+ \alpha_{ij}(a)[\gamma^{-1}(a)]_{jk}\tilde{\chi}_{km}(a,a')\alpha_{lm}(a')\end{aligned}$$

と求まる。たゞしこゝに，(4) を一般化して

$$\langle r_i^\alpha(t)\, r_j^\beta(t')\rangle = 2L_{ij}^{\alpha\beta}\, \delta(t-t')$$

とした。Onsager の相反定理により $L_{il}^{\alpha\beta} = L_{li}^{\beta\alpha}$ であるが，しかし，$\xi_{il}(a, a')$ は (9) のように一般に非対称である。

このような非対称性は今まで知られていなかったが，レーザーなど非平衡開放系で重要となることがわかってきた。
確率微分方程式の数学的理論は (2) の型の確率力に対しては完成しているように思われる。それはそのまゝ (15) ないしは (8) の型の確率力に対しても拡張できるのであろうか？
(8) から Fokker-Planck の式を導くのは容易である。
(15) もガウス過程であるからである。結果は

$$
\begin{aligned}
H_i(a,t) &= V_i(a,t) + [\partial \xi_{ij}(b,a)/\partial b_j]_{b=a}, \\
E_{ij}(a) &= \xi_{ij}(a,a)
\end{aligned}
$$

をそれぞれ drift 係数，拡散係数とする Fokker-Planck 方程式である。対応する Langevin 方程式は

$$
dA_i(t)/dt = H_i(A(t),t) + R_i(t)
$$

$\langle R_i(t) R_j(0) ; a_0 \rangle = 2E_{ij}(a_0)\delta_+(t)$, $t \geq 0$ で与えられる。詳細は T. Morita, H. Mori & K.T. Mashiyama Prog. Theor. Phys. (to be published) を参照されたい。