数理解析研究所講究録
第405巻 1980年 17-30

確率過程における変数の縮約 II
(古典開放系の模型化)

京大理　長谷川　洋

まず，表題の意味を Ornstein - Uhlenbeck のブラウン運動の実例によって説明する。これは歴史的なもので，Einstein = Smoluchowski のブラウン運動（ブラウン粒子の位置の拡散）が OU ブラウン運動（位置および速度の確率過程）の“時間的な粗視化”であることはよく知られているが，これが OU 過程における速度変数の縮約という実例である。すなわち

1次元 O-U 過程　単位質量のブラウン粒子に関し，その位置および速度をそれぞれ x, u で表わすと

$$\dot{x} = u \tag{a}$$

$$\dot{u} = -\gamma u - \frac{\partial \phi}{\partial x} + f(t) \qquad \gamma > 0 \tag{b}$$

γ：粘性定数，$\phi(x)$：ポテンシャル，$f(t)$：ランダム力

これは明らかにニュートンの法則に従う粒子の運動がさらに速度に比例する抵抗およびランダム力（ガウス型白色ノイズ）によっても支配されて乱雑に運動するというモデルになっているが，時間のスケールの十分粗い範囲（$t \gg 1/\gamma$）では，

運動は事実上速度uを含まない次の方程式

$$\dot{x} = \frac{-1}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} f(t) \qquad \text{(c)}$$

で十分よく記述される。[1][2]　この事実をもって「確率過程(c)は、確率過程(a)(b)の変数uの縮約である」と呼ぶ。ここで特にγが定数でなくて一般に変数xの(正値)関数、$\gamma(x)$、であるとすると新らしい問題が生ずる。すなわち(c)において$\frac{1}{\gamma(x)}f(t)$はいわゆる“掛け算された白色ノイズ”(multiplicative white noise)となりその正確な定義を与えなければならない。われわれの主張点の一つは、これがStratonovichの意味の対称積[3]$\frac{1}{\gamma(x)}\circ f(t)$でなければならないというものである。このように、縮約すべき変数の係数が一般に定数でない場合への拡張、さらには多変数を同時に縮約する問題への拡張など、出来るだけ一般的なかたちで確率過程の方程式(ランジュバン方程式—確率微分方程式(SDE))からの変数の縮約を定式化して具体的解を与える、というのが第一の問題である(森氏の稿参照)。また、縮約過程(c)はその分布(Fokker-Planck方程式の解)として、fに関する揺動散逸定理[4]のもとに、定常分布$p_{st}(x) \propto e^{-\beta\phi(x)}$をもつことが示されるが、一般の場合にそのような条件を明らかにして熱力学を構成する、というのが第二の問題である。

以下，確率微分方程式論に従って問題を設定する。
2種類の(実)確率変数 $\{x_\mu,\ u_i\ ;\ \mu=1,\cdots d,\ i=d+1,\cdots d+m\}$ に関する $d+m$ 次元（Itô）SDE　（以下通常のテンソル和法を使う）

$$dx_\mu(t) = \left(v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i}(x(t))\,u_i(t)\right)dt + dX_\mu(t) \qquad (1a)$$

$$du_i(t) = \left(-\gamma_{ij}(x(t))\,u_j(t) + b_i(x(t))\right)dt + dU_i(t) \qquad (1b)$$

を考察する。ここで $\{dX_\mu,\ dU_i\}$ は n 次元標準ブラウン運動 $B(t)$
（$E\,dB(t)=0$，$E\,dB(t)\,dB(t) = \mathbf{I}\,dt$，$\mathbf{I}$：$n\times n$ 単位行列）
により

$$dX_\mu(t) = \sigma_\mu(x(t))\cdot dB(t),\quad dU_i(t) = \sigma_i(x(t))\cdot dB(t) \qquad (\sigma\text{：}n\text{次元横ベクトル})$$

と表わされるものとし，従って

$$E\,dX_\mu(t)\,dX_\nu(t) = 2L_{\mu\nu}(x(t))dt \qquad L_{\mu\nu}=L_{\nu\mu} \qquad (2a)$$

$$E\,dX_\mu(t)\,dU_i(t) = 2L_{\mu i}(x(t))dt \qquad L_{\mu i}=L_{i\mu} \qquad (2b)$$

$$E\,dU_i(t)\,dU_j(t) = 2L_{ij}(x(t))dt \qquad L_{ij}=L_{ji} \qquad (2c)$$

のように与えられる。係数 v，α，γ，b および L はすべて x の有界・滑らかな関数であるとするが u は含まないので，従って SDE（1a, b）は u に関し線型である。さらに γ が $(m\times m)$ 正値行列であればそれは安定なブラウン運動を意味するが，ここでは強い正値性

$$\gamma_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0,\quad \gamma_{ij}\xi_i\xi_j = 0 \longrightarrow \xi = 0 \qquad (3)$$

を仮定する。SDE 理論よりさらに v，σ に関する Lipschitz 条件があれば解の存在・一意性が保証される。これらのもとに

<u>問題1</u>　方程式 $(1a, b)$ において変数 u を縮約し，x だけの Itô SDE を求めること（縮約の厳密な定義および具体的手続きは後述）。

次に，方程式 $(1a)$ に関聯して，x の決定論的運動方程式

$$\dot{x}_\mu(t) = v_\mu(x(t)) \tag{4}$$

が運動の積分（ハミルトニアン）$H(x(t))$, $\frac{d}{dt}H(x(t)) = 0$, をもつとする。(4) は autonomous（v は $x(t)$ のみを通して t の関数）という前提で，それは

$$v_\mu(x)\frac{\partial H}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{grad}\, H \text{ が速度 } v \text{ に直交}) \tag{5}$$

で條件付けられる。さらに

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} v_\mu(x) = 0 \quad (\text{div}\, v = 0) \tag{6}$$

として，この力学系を quasi-hamiltonian system と呼ぶ。

<u>問題2</u>　quasi-hamiltonian system $\{x_\mu\}$ を含む $d+m$ 次元次の Itô SDE

$$dx_\mu(t) = (v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i}(x(t))u_i(t))\,dt \tag{7a}$$

$$du_i(t) = (-\gamma_{ij}(x(t))u_j(t) + b_i(x(t)))\,dt + dU_i(t), \tag{7b}$$

ただし γ_{ij} は強正値(3)，$E\,dU_i\,dU_j = (\gamma_{ij} + \gamma_{ji})\,kT\,dt$, (8) より u を縮約し，縮約された確率過程 $x(t)$ の定常分布が正準分布，$p(x) = Z_\beta^{-1}\,e^{-\beta H(x)}$, $\beta = 1/kT$, をもつための條件を求めること。（この結果を用い熱力学法則が定式化される）

<u>縮約の定義と手続き</u>　<u>(1) 問題の経緯</u>　統計物理において，複雑な方程式から必要なだけの情報を保ちつつそれ以外の変数を消去して簡単化することはしばしば必要になる（情報の縮約[4]）。その手段としてよく用いられるのは Zwanzig, Mori に始まる「射影演算子の方法」[5][6] であるが，確率過程論の専門家の間にそのような発想はないであろうか。Papanicolaou, Stroock, Varadhan によって論ぜられた一般的な極限定理 [7] がこれに該当することがわかった。† そこでは縮約変数 u は y という記号で扱われ y に関する「線型」の制約を設けず一般的な ergodicity の仮定だけで縮約過程 $x(t)$ の存在（および x の拡散過程の存在）が証明されている。y が x に比し速い過程である，という前提も物理的なものであり，y は "driving process" x は "driven process" と呼ばれている。従って本研究の基礎をこの文献に求めることが出来る。われわれの結果は縮約過程 u に関する線型性を仮定していて [7] の特別な場合に相当しているが，その代償として縮約結果の Itô SDE を係数関数によって具体的に表示し得たものである。その結果，「断熱消去法」（(1b) において $du=0$ より u を求め (1a) に代入する）の当否を明らかにし，合わせて「非対称性」を含む森氏の結果‡ を考察する。

---

† 本研究会における伊藤清教授の御注意，および大和・小谷両氏からの御連絡による。　‡ 森肇「確率過程における変数の縮約」（前稿）

(2) Papanicolaou, Stroock, Varadhan 極限定理の適用 (1a, b)

の代りに収束因子 ε の入った $d+m$ 次元 Itô SDE

$$d x^{\varepsilon}_{\mu}(t) = \left(v_{\mu}(x^{\varepsilon}(t)) + \frac{1}{\varepsilon} \alpha_{\mu i}(x^{\varepsilon}(t)) u^{\varepsilon}_{i}(t) \right) dt + d X_{\mu}(t) \qquad (1a')$$

$$d u^{\varepsilon}_{i}(t) = \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_{ij}(x^{\varepsilon}(t)) u^{\varepsilon}_{j}(t) + \frac{1}{\varepsilon} b_{i}(x^{\varepsilon}(t)) \right) dt + \frac{1}{\varepsilon} d U_{i}(t) \qquad (1b')$$

($d X_{\mu}(t)$, $d U_{i}(t)$ は変数が x^{ε} である点を別として前と同じ)

の $\varepsilon \to 0$ 極限を考察する。driving process $u^{\varepsilon}(t)$ に関する ergodicity は γ の強正値性 (3) が相当している。各 x に対し $u^{\varepsilon}(t)$ はガウス過程であり $\varepsilon \to 0$ で分布は定常分布 $\varphi_0(u) = (2\pi \det V)^{-1} e^{-\frac{1}{2} u V^{-1} u}$ という極限分布に近付く。V は $m \times m$ 対称行列で,(一般に x の関数として)

$$V(x) = \int_0^{\infty} e^{-t\gamma} (2L) e^{-t\gamma'} dt \ ; \ \gamma V + V \gamma' = 2L \quad (\gamma' : \gamma \text{ の transpose})$$

から求められる共分散行列である。この分布は u の平均 $\langle u \rangle_{\varphi_0} = 0$ で特徴付けられ, 従って (1a′) の ε^{-1} の項に対し

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \alpha_{\mu i}(x^{\varepsilon}(t)) \, u_i(t) \rangle_{\varphi_0} = 0$$

となる。これは定理の成立にとって必要な "centering condition" が満足されていることを示す。以上により極限定理が適用されて $\lim_{\varepsilon \to 0} x^{\varepsilon}(t)$ $\lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(t)$ は存在し, それぞれ $x(t)$ $u(t)$ とすると $u(t) = 0$ および $x(t)$ の従う Itô SDE が定められる。また, $x(t)$ の任意の C^{∞} 関数 $f(x(t))$ に対する Itô 公式も導かれ (martingale approach!), それは $\varepsilon = 1$ すなわち (1a, b) に対し射影演算子の方法 (分布を φ_0 に射影する) を適用した結果と一致する。

問題1の解

縮約された Itô SDE

$$dx_\mu(t) = \begin{pmatrix} v_\mu(x) + \alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}\, b_j(x) \\ +\left((\alpha V)_{\nu j}(x) + 2L_{\nu j}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}) \end{pmatrix}_{x=x(t)} dt$$

$$+\ \alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}(x)_{x=x(t)}\, dU_j(t) + dX_\mu(t) \qquad (9)$$

Itô 公式 ($f(t,x) \equiv E(f(x(t)) \mid x(t)=x)$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (v_\mu + \alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij} b_j)\frac{\partial f}{\partial x_\mu}$$

$$+\left((\alpha V)_{\nu j} + 2L_{\nu j}\right)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right) + L_{\mu\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \qquad (9a)$$

(Fokker-Planck 方程式は この adjoint form として書かれる)

Remark 1　conventional な "adiabatic elimination" の当否

1次元 O-U process の u の縮約 (c) は明らかに始めの連立方程式 (a) と (b) において $\dot{u}=0$ より u を求め (a) に代入して得られるものである。この手段を adiabatic elimination (断熱消去) と呼ぶことがある。この手段が一般的に正しい結果を与えるものか，もし正しくないとすればそれはどういう場合か，が上の結果から調べられる。すなわち (1b) に対しこれを形式的に実行してみると

$$u_i\, dt = \gamma^{-1}_{ij} b_j\, dt + \gamma^{-1}_{ij}\circ dU_j \quad \text{(stratonovich 対称積!)}$$

より

$$dx_\mu = (v_\mu + \alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij} b_j)\, dt + \underbrace{\alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}\circ dU_j} + dX_\mu$$

$$\left(Y\circ dX = \tfrac{1}{2}dY\, dX + Y\, dX \ \longrightarrow\right) \qquad +\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}\right) dU_j\, dx_\nu + \alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}\, dU_j$$

この変換で $dU_j\,dx_\nu$ の dx_ν に再び上の dx_μ の式を用い dt の係数に対する補正項を見出すと，(2b, c) を用いることにより

$$dx_\mu = \left(\begin{array}{l} v_\mu + \alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij} b_j \\ + \underline{\underline{(L_{\ell j}\alpha_{\nu k}\gamma^{-1}_{k\ell} + L_{\nu j})}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij}) \end{array} \right) dt$$

$$+ \alpha_{\mu i}\gamma^{-1}_{ij} dU_j + dX_\mu \qquad (10)$$

が得られる。２重アンダーラインの部分は正解 (9) の dt の係数括弧内オ２項と比較さるべきものである（それ以外の部分では (9) と (10) とは完全に一致している）。ガウス過程に関する分散行列と拡散係数行列の関係式 $L = \frac{1}{2}(\gamma V + V\gamma')$ より２重アンダーライン部分は次のように比較される：

correct	conventional
$\alpha_{\nu k}V_{kj} + 2L_{\nu j}$	$\frac{1}{2}\alpha_{\nu k}(V_{kj} + \gamma^{-1}_{k\ell}V_{\ell\ell'}\gamma_{j\ell'}) + L_{\nu j}$

若し $\gamma^{-1}V\gamma' = V$ すなわち $\gamma V = V\gamma' =$ 対称行列ならば始め部分は両者一致する。それから後の部分については factor 2 だけ異る（$L_{\nu j}$ は dX, dU の cross correlation！）このことより次の結論に達する．

［定理］ 方程式 (1 a, b) から driving process u を縮約するのに conventional な断熱消去を行って（如何なる α に対しても）正しい結果が得られるためには

(i) 対称性 $\gamma V = V\gamma'$（詳細均合の条件）

(ii) $L_{\nu j} = 0$ （x に対するノイズと u に対するノイズの独立性）

が必要かつ十分である。そして，この条件のもとに，断熱消

去はホワイト・ノイズに対する掛け算を Stratonovich の意味にとって行われる。

條件 (i) が「詳細均合」の條件であるとはガウス過程 $du_i = -\gamma_{ij} u_j \times dt + dU_i$ の條件確率 $P(u_2 t_2 | u_1 t_1) = P(u_2, u_1; t_2 - t_1)$ に関する対稱性

$$P(u_2, u_1; t_2 - t_1)\varphi_0(u_1) = P(u_1, u_2; t_1 - t_2)\varphi_0(u_2) \qquad (11)$$

―微視的可逆性 (microscopic reversibility)― と同等である。従って $\gamma V \neq V\gamma'$ は Onsager 相反関係の破れを意味するもので $\gamma V - V\gamma'$ は富田教授により非可逆循環 (irreversible circulation) と名付けられたものに相当している。これが 0 でない時の方程式 (1a, b) の縮約過程にはノイズ補正として γV と $V\gamma'$ の平均値ではなく γV だけが寄与する，というのが正しい結果である。前稿森氏の所説に現れる「非対稱性」はこのことを指すものである。

Remark 2　われわれの結果 (9) は前稿森氏の結果と詳細に比較されるべきものである。上記の條件 (i) (ii) 特に「非対稱性」に関する森氏の所説とは完全な一致を表明する。しかしながら別の点で無視出来ない不一致点があることを附記しないわけにはゆかない。(9) のドリフト項 (dt の係数括弧部分) は，森氏の $H_i = V_i + [\partial \Xi_{ij}/\partial b_j]_{b=a}$, V_i ; (14) 式，と比較されるがその具体形 [　] の中の { } を 0 としたものと一致する。すなわち，この { } 部分が両者の不一致点である。(補遺参照)

問題2の解

公式(9)において，　$v_\mu \dfrac{\partial H}{\partial x_\mu} = 0$，　$\dfrac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} = 0$　および

$$L_{\mu i} = 0 \tag{12}$$

$$V = \beta^{-1} I \qquad \left(\beta = \frac{1}{kT} \right) \tag{13}$$

の場合である。(13)は，uの定常分散 V が x によらなければ，適当な1次変換により一般性を失うことなくこのように仮定出来る。その結果

$$dx_\mu(t) = \left(v_\mu(x) + \alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1} b_j(x) + \beta^{-1}\alpha_{\nu j}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}) \right)_{x=x(t)} dt + \alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}(x)_{x=x(t)}\, dU_j(t) \tag{14}$$

これに対する Fokker-Planck 方程式は，条件(8)のもとに，

$$b_i(x) = \beta^{-1}\frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial x_\nu}(x) - \alpha_{\nu i}\frac{\partial H}{\partial x_\nu}(x) \tag{15}$$

の場合に限り次の形式にまとめられる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(-v_\mu p) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(D_{\mu\nu}\left(\beta\frac{\partial H}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)p\right) \tag{16}$$

$$D_{\mu\nu}(x) = \beta^{-1}\alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}\alpha_{\nu j}(x) \tag{16a}$$

この時の定常解は熱平衡分布

$$p_{eq}(x) = \frac{1}{Z_\beta}e^{-\beta H(x)} \tag{17}$$

となる。

<u>Remark 3　条件(15)の物理的意義</u>　(7a, b) および (8) に対しさらに (15) を用いると

$$dx_\mu(t) = \left(v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i}(x(t))\, u_i(t) \right) dt \qquad (18a)$$

$$du_i(t) = \left(-\gamma_{ij}(x(t))\, u_j(t) - \frac{\partial H}{\partial x_\nu}\alpha_{\nu i}(x(t)) + \beta^{-1}\frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial x_\nu}(x(t)) \right) dt + dU_i$$

又は $$= \left(-\gamma_{ij}(x(t))\, u_j(t) - \frac{\partial H}{\partial x_\nu}\alpha_{\nu i}(x(t)) \right) dt + \alpha_{\nu i}(x(t)) \circ dW_\nu \qquad (18b)$$

ただし dW_ν は

$$E\, dx_\mu\, dW_\nu = 2\beta^{-1}\delta_{\mu\nu}\, dt \qquad (19)$$

を満す Wiener 過程 とすれば，$\alpha_{\nu i} \circ dW_\nu = \alpha_{\nu i}\, dW_\nu + \beta^{-1}\frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial x_\nu} dt$ となり $\alpha_{\nu i}\, dW_\nu = dU_i$ として (7a, b) に一致する。(18a, b) および (19) が縮約によって正準熱平衡を示す標準形である。

又 $$b_i = \beta^{-1} e^{\beta H(x)} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(e^{-\beta H(x)} \alpha_{\nu i}(x) \right) \qquad (20)$$

より $$\langle b_i \rangle_{eq} = 0 \qquad (21)$$

これは 線型方程式 $du_i = (-\gamma_{ij}\, u_j + b_i)\, dt + dU_i$ の非同次項 は 熱平均 $=0$ の条件を満すことを意味する。

さらに，(18a, b) における $\alpha\, dt$ の項は driving process — driven process 間の「相互作用」を意味するが，この相互作用に対し「全エネルギー」$\mathcal{H} = H(x) + \frac{1}{2} u_i u_i$ が'保存'される。

すなわち $$d\mathcal{H} = \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \circ dx_\mu + u_i \circ du_i$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial x_\mu} v_\mu + \frac{\partial H}{\partial x_\mu}\alpha_{\mu i} u_i - \gamma_{ij} u_i u_j - \frac{\partial H}{\partial x_\nu}\alpha_{\nu i} u_i \right) dt$$

+ノイズ項

$$= -\gamma_{ij}\, u_i u_j\, dt + \alpha_{\nu i} u_i \circ dW_\nu. \qquad (22)$$

縮約SDE (14) は条件 (15), (19) のもとで次のように簡単になる。

$$dx_\mu = [\, v_\mu + \alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}\alpha_{\nu j}\left(-\frac{\partial H}{\partial x_\nu}\right) + \beta^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}\alpha_{\nu j})\,]\,dt + \alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}\alpha_{\nu j}\,dW_\nu$$
$$= \left(v_\mu - D_{\mu\nu}\beta\frac{\partial H}{\partial x_\nu}\right)dt + \beta D_{\mu\nu}\circ dW_\nu$$

これに対する拡散方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \left(-\beta\frac{\partial H}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\left(D_{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right) \qquad (23)$$

と書かれるが，f として $H(x)$ および $\log p_t(x)$ を用いたものが熱力学第1および第2法則を示す関係式である。

文献

[1] S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 1.

[2] E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion (Princeton University Press, 1967) §10.

[3] K. Itô, Lecture Notes in Physics 39 (Springer 1975) p.214.

[4] 久保亮五 "統計物理学" (岩波 1978) 第5章.

[5] R. Zwanzig, Suppl. Prog. Theor. 64 (1974), 74.

[6] H. Mori, Prog. Theor. Phys. 33 (1965), 423 ; 48 (1973), 764 ; 51 (1974), 109 ; 56 (1976) 754.

[7] G. C. Papanicolaou, D. Strook and S. R. S. Varadhan Martingale Approach to Some Limit Theorems 1976 Duke Turbulence Conference.

補遺

Remark 2 で触れた森氏の結果との不一致点について説明を追加しておく。われわれの出発点の方程式（1a, b）は森氏の方程式

$$dA_i(t)/dt = v_i(A) - \alpha_{ij}(A)\,B_j + r_i^A(t) \qquad (11)$$

$$dB_j(t)/dt = \beta_j(A) - \gamma_{jk}(A)\,B_k + r_j^B(t) \qquad (12)$$

（前稿 森氏の稿より そのまま引用）

と本質的に同じものであって，driving 変数 $u \longrightarrow B$，driven 変数 $x \longrightarrow A$ という対応関係になっている。

1．森氏の場合，縮約方程式は二種の変数の速さの比 δ に関する展開になっていて（11）式の右辺を(12)のそれに比し $O(\delta)$（すなわち v_i，α_{ij}，$r_i^A = O(\delta)$）とし $O(\delta^2)$ の完全な式が森氏の結果である。一方われわれの結果(9)は，文献[7]に従うものであるが，森氏の展開と異る。それは簡単に云って γ^{-1}（Bの decay 行列 γ の逆）の展開であって（9）は $O(\gamma^{-1})$ の完全な式になっている。この立場から森氏の V_i の式（14）を見るならば不一致の項は $O(\gamma^3)$ に属するものである。両者のいずれが正しいものであるかは，それぞれの方法の principle でみる限り判定出来ない。それは具体的な問題に適用した場合，ケースバイケースであるとも考えられる。そこで以下一つの実例についてみる。

2. Ornstein-Uhlenbeck 過程 (a)(b) の速度縮約

簡単のため γ = 定数とする。

われわれの結果 $\qquad \dot{x} = \frac{-1}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}f(t)$

森氏の式の適用 $\qquad \dot{x} = \frac{-1}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\gamma}f(t)$

このあとの縮約ランジュバン方程式に対応する Fokker-Planck 方程式を作るとそれは定常解に $e^{-\beta\phi}$ を与えないという難点を含むことがわかる。われわれの立場からするとドリフトに $O(\gamma^{-3})$ の補正を考慮するのならば，それに consistent なノイズの補正を与える必要がある，ということである。この問題は最近 projection operator を用いない方法により San Miguel Sancho (J. Stat. Phys. 22 (1980) 605) が解答を与えている。それによれば，Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}p\right)\right)$$

となり，確かにドリフトは森氏の式を用いる結果と一致しさらに拡散係数も γ^{-3} の補正を受け全体として $e^{-\beta\phi}$ を定常解として持つ形になっている。減衰調和振動子の例などからこの結果は正しいと考えられ，これを導く projection の理論を検討中である。(1980 9月)