数理解析研究所講究録
第 405 巻 1980 年 62-78

非線型確率微分方程式の漸近評価法

東大 理　　鈴木増雄

§1.序

統計物理学に現れる現象は、一般に確率論的性格を持っているため、確率微分方程式で記述されるものが多い。アインシュタインのブラウン運動の理論は、その典型的な例である。これは、非平衡統計物理学における散逸揺動定理の草分けである。アインシュタインは線型ブラウン運動の理論を扱ったので、美事に拡散係数を揺動によって表わすことができたが、相転移を起すような非線型なブラウン運動は、一般に厳密に解くことは出来ない。しかしながら、この非線型の系は、対称性の破れという観点からみると大変重要である。たとえ厳密に解くことが出来なくとも、それを漸近的にでも評価できれば、その系の物理的な振舞いの特徴が理解できるはずである。具体的には、$x(t)$を確率変数として、

$$\frac{d}{dt}x(t)=\alpha(x(t))+\beta(x(t))\eta(t) \qquad (1)$$

で記述される系を考える。但し、$\eta(t)$は、ガウシャンでホワイトなランダム変数とする：

$$\langle \xi(t)\,\xi(t')\rangle = 2\varepsilon\,\delta(t-t'). \qquad (2)$$

非線型部分$\alpha(x(t))$が丁度不安定現象を表わすような場合について考えると、前回の研究会[1)]で発表したように、スケーリングの取り扱いにより、小さなεと大きな時間領域(互に独立でない)に対して漸近評価が可能である。今回の目的は、前回の物理的な理論形式をもっと一般化して、不安定点近傍以外に用いられるΩ－展開[2,3)]と不安定点近傍で有用なスケーリング理論とをそれぞれの領域で含むような統一的な理論形式を提案し、それを数学的にもすっきりした表現形式に持って行くことである。

各論に入る前に、基本的な考え方を述べておこう。(1)の確率微分方程式は、random time variable を用いれば、数学的には単純な線型ブラウン運動に変換されて、形式解が求まるが、物理的な時間の関数としてのゆらぎや秩序形成の議論には役に立たない。そこで、漸近評価によって、顕わな形に物理的近似解を求めることが基本的に重要になる。今、ランダムな力の強さεを小さなパラメタとみなして、漸近評価を行い、εが有限のときの系の物理的特徴を捉える。それには、xを適当に、非線型な mapping をして、$\xi=\xi(x,t)$という変数空間に移して考える:

$$\text{nonlinear mapping} \quad x \rightarrow \xi = \xi(x, t). \quad (3)$$

この新しい変数空間で、ξに関する確率微分方程式を線型化して、問題を解く。こうすると、もとのxの空間では、非線型効果が、(3) の mapping に対応してとり入れられることになる。これは、言わば、くり込まれた効果であるから、この方法を、renormalized perturbation expansion method と呼ぶことができる。この解を不安定点近傍を除いた通常の領域で、εに関して展開すると、van Kampen－Kubo のΩ－展開の表式が導かれる。また、xの初期値を不安定点に近づけると、前のスケーリング解を導くことができる。こうして、我々の新しい取り扱いは、両方を含む統一的な理論形式になっていることがわかる。したがって、初期値$x=x_0=\delta$（不安定点を$x=0$として、それからのずれ）をオーダー1のところ（通常の示領性領域）から、オーダー$\sqrt{\varepsilon}$（不安定領域）まで連続的に変えていき、解の様子を調べることもできる。

§2. Langevin equation でのΩ－展開

まず始めに、統計物理学 ではよく知られているΩ－展開[2-4)]の方法を(1)の確率微分方程式を用いて説明しよう。van Kampen-Kubo に従って、確率変数xを次のように2つの部分に分ける：

$$x(t) = y(t) + \xi(t). \tag{4}$$

但し、$y(t)$は決定論的な部分で、$\xi(t)$は、ゆらぎの部分を表わす。Ω－展開の要点は、中央極限定理に対応して、$\xi(t)$を$\sqrt{\varepsilon}$のオーダーの小さいゆらぎとみて、$\xi(t)$に関する摂動展開を行い低次で切ることである。この近似の成立条件は、$\xi(t)$が考えているすべての時間でいつも$\sqrt{\varepsilon}$のオーダーになっていることである。後で述べるように、不安定点からの緩和の問題では、この条件は破れる。すなわち、初期時刻で、この条件が充たされるようにしておいても、不安定点からの緩和の場合には、途中で、ゆらぎ$\xi(t)$は、どんどん大きくなり、$\log\Omega$の時間領域（スケーリング領域）では1のオーダーになり、(4)のように分離出来なくなる。このような状況下では、εの高次の項の中で、$t\sim\log\Omega$の時間で1のオーダーになる項はすべて集めなければならなくなる。この方法については後で一般的に議論する。

さて、(4)を(1)に代入して、εの0次と1次の項を両辺それぞれ等置して、

$$\dot{y}(t) = \alpha(y(t)), \quad \dot{\xi}(t) = \alpha'(y(t))\xi(t) + \beta(y(t))\eta(t), \tag{5}$$

が得られる。但し、$\alpha'(x) = d\alpha(x)/dx$, $\dot{y}(t) = dy/dt$。

(5)の第2式を積分して

$$\zeta(t) \doteqdot \left(\exp\int_0^t \alpha'(y(s))ds\right)\left(\int_0^t \exp\left[-\int_0^s \alpha'(y(u))du\right]\beta(y(s))\eta(s)ds + \zeta(0)\right) \quad (6)$$

が得られる。これより、分散 $\sigma(t) \equiv \langle \zeta^2(t) \rangle / \varepsilon$ の充たす微分方程式を(2)を用いて作ると、

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = 2\alpha'(y(t))\sigma(t) + 2\beta^2(y(t)) \quad (7)$$

となり、これは、$C_2(x) \equiv 2\beta^2(x)$ とおくと、よく知られた方程式である。[2-4)]

§3. 丁度不安定点からの緩和とスケーリング理論

不安定点を $x=0$ とすると、$\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=\gamma>0$ である。$y(0)=0$ であるから、$y(t)\equiv 0$ となり、(4)の分け方は意味が無くなる。しかも、$\zeta(t)$ は始めは $\sqrt{\varepsilon}$ のオーダーでも、時間 t が大きくなると、1のオーダーにまで増大するから、単純な漸近評価は出来なくなる。すなわち、時間 t と ε を切り離して漸近評価することは出来ない。この点が数学における今までの確率微分方程式に関する漸近評価と本質的に異なる点である。この新しい漸近評価を実行するには、前[1)]も話したようにいろいろな方法がある。時間を3つの領域に分割して、それぞれの領域で漸近評価を行い、最後に、全体を滑

らかに接続する方法が一番簡単で物理的であるが、数学的にきちんとやるには、xの非線型変換を用いるとよい。すなわち、$\dot{x}=\alpha(x)$の解曲線を新しい座標とする変数ξの表示で、漸近評価を行う。すなわち、非線型マッピングとして

$$\xi(x,t)=F^{-1}\left(e^{-\gamma t}F(x)\right) \tag{8}$$

を行う。[5,6] 但し、$F(x)$は

$$F(x)=\exp\int_{a_0}^{x}\frac{\gamma}{\alpha(y)}dy. \tag{9}$$

ここで定数a_0は、$F'(0)=1$となる（規格化の条件）ように決める。この非線型変換によって(1)は

$$\frac{d\xi}{dt}=e^{-\gamma t}F'\left(F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi))\right)\beta\left(F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi))\right)\frac{\eta(t)}{F'(\xi)} \tag{10}$$

と変換される。右辺で、$\xi=0$とおくと、(10)は、線型化され、その解を$\xi_{sc}(t)$とおくと、

$$\frac{d}{dt}\xi_{sc}(t)=e^{-\gamma t}\beta(0)\eta(t) \tag{11}$$

となり、$\xi_{sc}(t)$は次の積分で表わされる：

$$\xi_{sc}(t)=\int_0^t e^{-\gamma s}\beta(0)\eta(s)ds+x(0). \tag{12}$$

したがって、スケーリングの解$x_{sc}(t)$は、(8)より

$$x_{sc}(t) = F^{-1}\left(e^{\gamma t} F(\xi_{sc}(t))\right) \tag{13}$$

と与えられる。たとえば、ゆらぎ、$\langle x_{sc}^2(t)\rangle$は、

$$\langle x_{sc}^2(t)\rangle = \left\langle\left[F^{-1}\left(e^{\gamma t} F(\xi_{sc}(t))\right)\right]^2\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2}\left[F^{-1}\left(e^{\gamma t} F\left(\xi\left\{\frac{\varepsilon}{\gamma}(1-e^{-2\gamma t}) + \langle x^2(0)\rangle\right\}^{1/2}\right)\right)\right]^2 d\xi \tag{14}$$

で与えられる[6]。スケーリングの性質を顕わにみるには、$\varepsilon e^{2\gamma t}$を固定して、$\varepsilon \to 0$, $t \to \infty$ の極限(scaling limit ; sc-lim)をとればよい。その結果，(14)より、

$$\text{sc-lim}\langle x_{sc}^2(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2}\left[F^{-1}(\xi\sqrt{\tau})\right]^2 d\xi \tag{15}$$

となる。但し、スケーリング変数τは

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\gamma}(e^{2\gamma t}-1) + \langle x^2(0)\rangle e^{2\gamma t}$$

$$\simeq \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} + \langle x^2(0)\rangle\right) e^{2\gamma t}. \tag{16}$$

通常、初期のゆらぎ$\langle x^2(0)\rangle$はオーダーεであり、τは$\varepsilon\exp(2\gamma t)$に比例する。こうして、上のスケーリング極限をとる漸近評価では、時間領域として、

$$t \sim \frac{1}{2\gamma} \log(1/\varepsilon) \qquad (17)$$

という中間領域が引き出せることになる。この近似がrandom force の効果をどのようにとり入れているかを見るために、$x_{sc}(t)$の微分方程式を作ってみると、

$$\frac{d}{dt}x_{sc}(t) = \alpha(x_{sc}(t)) + \frac{e^{-\gamma t}\alpha(x_{sc}(t))}{\alpha(\xi_{sc}(t))}\eta(t)$$

$$= \alpha(x_{sc}(t)) + \frac{\alpha(x_{sc}(t))}{\gamma F(x_{sc}(t))}\eta(t) \qquad (18)$$

となる。[4] random force $\eta(t)$にかかっている因子をみると、これは、$t=0$で1で、$t\to\infty$で零になるから、このとり扱いでは、random force $\eta(t)$の効果を初期領域では、充分とり入れ、時間の経過と共に、それを落とす近似になっている。このとり扱いが、scaling limit では、漸近的に厳密なものになることがわかる。物理的には、系が不安定点から出発するときは、時間の初期領域では、主として、random force の効果で確率変数は変化し、時間の中間領域（非線型領域）に入ると、random force は相対的にはほとんどきかなくなり、系の決定的な部分（すなわち、線型及び非線型効果）$\alpha(x)$によって、$x(t)$は変化するようになる。

ゆらぎ$\langle x^2(t)\rangle$がオーダーεから1のオーダーに変化す

るのは、スケーリング理論では(15)より、$\tau \simeq 1$のオーダーになったときであるから、その時間領域は

$$t_0 \simeq \frac{1}{2\gamma} \log \left[constant \times \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} + \langle x^2(0) \rangle \right)^{-1} \right] \quad (19)$$

の近傍であり、このt_0はonset timeと呼ばれる。この時間は丁度スケーリング領域の中央に位置する。具体的に、例えば、レーザーモデル

$$\dot{x}(t) = \gamma x - g x^3 + \eta(t) \quad (20)$$

で(19)のconstantの部分まで考慮すると、

$$t_0 \simeq \frac{1}{2\gamma} \log \left[\frac{g\varepsilon}{\gamma} \left(\sigma_0 + \frac{1}{\gamma} \right) \right]^{-1} \quad (21)$$

となる。但し、$\langle x^2(0) \rangle = \varepsilon \sigma_0$とおいた。これによると、非線型性$g$、random forceの強さ$\varepsilon$が小さいほど、秩序形成($\langle x^2(t) \rangle$がオーダー$\varepsilon$からオーダー1に変化すること)が遅くなることがわかる。すなわち、gとεがt_0に相乗的にきくことがわかる。これを相乗効果(synergism)と言う。実際、(20)に対する$F(x)$は、

$$F(x) = x \left\{ 1 - \frac{g}{\gamma} x^2 \right\}^{-1/2} \quad (22)$$

で与えられ、分布$P_{sc}(x, t)$は、

$$P_{sc}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\left\{1-\frac{g}{\gamma}x^2(1-e^{-2\gamma t})\right\}^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2\tau\left\{1-\frac{g}{\gamma}x^2(1-e^{-2\gamma t})\right\}}\right] \tag{23}$$

となる。[6] 但し、τは、(16)で定義されている。したがって、ゆらぎ$\langle x^2(t)\rangle$は、

$$\langle x^2(t)\rangle=\frac{\langle x^2\rangle_{st}}{\sqrt{2\pi}(1-e^{-2\gamma t})}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2/2}\frac{\xi^2\hat{\tau}}{\xi^2\hat{\tau}+1}\,d\xi, \tag{24}$$

で与えられる。ここで$\hat{\tau}$は次のように定義されたスケーリング変数である：

$$\hat{\tau}=\frac{g}{\gamma}(1-e^{-2\gamma t})\tau\ . \tag{25}$$

よって、$\langle x^2(t)\rangle$は、時間tが小さい領域では、(24)を$\hat{\tau}$で展開して、初項を残すと、

$$\langle x^2(t)\rangle=\tau+O(\varepsilon^2)=\frac{\varepsilon}{\gamma}(e^{2\gamma t}-1)+\langle x^2(0)\rangle e^{2\gamma t} \tag{26}$$

となり、ゆらぎは、オーダーεである。tが大きくなると、$\langle x^2(t)\rangle$は$\langle x^2\rangle_{st}$と同じオーダーすなわち、1のオーダーになる。こうして、ゆらぎのオーダーが時間と共に変化することが、巨視的秩序形成の本質であることがわかる。ゆらぎ$\langle x^2(t)\rangle$のΩ-依存性を

$$\langle x^2(t)\rangle \sim \Omega^{s(\hat{t})}\ ;\ \hat{t} = 2\gamma t/\log N \tag{27}$$

と表現することも出来るであろう。こうすると、

$$s(\hat{t}) = \begin{cases} -1 & \text{for } \hat{t}\sim 0 \\ 0 & \text{for } \hat{t}\to\infty, \end{cases} \tag{28}$$

という漸近的性質を持つ。例えば、線型近似の解 (26) に対して

$$\langle x^2(t)\rangle_{lin} \sim \varepsilon e^{2\gamma t} \sim \Omega^{s_1(\hat{t})} \tag{29}$$

とおくと、

$$s_1(\hat{t}) = \hat{t} - 1 \tag{30}$$

となる。勿論、これは、$\hat{t} \ll 1$ で使える式である。

§4. Unified theory of transient phenomena — Renormalized perturbation expansion method

ここでは、初期値 $x(0)=\delta$ が一般の場合を統一的に扱う方法を考える。もし、δ がオーダー1の量であれば、これは、normal case であって、Ω-展開の方法が使える。逆に $\delta\to 0$ では、スケーリング理論が有効であることがわかった。そこで、ここでは、δ がオーダー1から0まで変化する場合に

ついて、非線型確率微分方程式(1)の漸近解を求める方法を提案する。基本的な考え方は、§3のスケーリング理論と同様であるが、非線型変換(8)によって得られた確率微分方程式(10)に対する線型近似の精度をあげるところが新しい点である。

(i) General scheme

§3の(10)式を、簡単のために

$$\frac{d\xi}{dt} = G(\xi, t)\eta(t) \tag{31}$$

と書くことにする。ここで、$G(\xi, t)$は、

$$G(\xi, t) \equiv e^{-\gamma t} F'(F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi)))\beta(F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi)))\dot{F}(\xi) \tag{32}$$

Systematic perturbation expansion は、次の漸化式で与えられる：

$$\frac{d}{dt}\xi_{n+1}(t) = G(\xi_n(t), t)\eta(t). \tag{33}$$

零次$\xi_0(t)$をどう与えるかによっていろいろな漸近評価の理論が作れる。勿論、零次近似$\xi_0(t)$の与え方によらず、$n \to \infty$まで実行出来れば、$n \to \infty$に対して

$$\xi_n(t) \longrightarrow \xi(t) \quad (確率収束) \tag{34}$$

となるが、実際問題としては、第1近似$\xi_1(t)$で体系の物理的特徴が記述されるようになっていることが望ましい。そうでないと、実際上あまり役に立たない。次に、*Renormalized perturbation* の意味を説明しよう。$\xi_n(t)$を(33)の漸化式で解くと、これは、言わば、random force に関する摂動に近いものになる。特に、$\xi_0(t)$として$\eta(t)$を含まないものを用いると、$\xi_1(t)$は$\eta(t)$の1次の摂動近似になっている訳であるが、それを非線型変換(8)で$x(t)$にもどすと、$\eta(t)$の高次の効果も、部分的ではあるが、とり入れられることになる。この意味で、$x(t)$に対するこの展開方法をくりこまれた展開法と呼ぶことが出来る。

さて、$\xi_0(t)$の与え方によって、次のようにいろいろな漸近評価の理論が作れる。

(ii) 零次ξ_0として$\xi_0=x_0$とおくと、次のようなもっとくりこまれた式が得られる：

$$\frac{d}{dt}\xi_{RP}(t)=\left[e^{-\gamma t}F'(y(t,x_0))\beta(y(t,x_0))/F'(x_0)\right]\eta(t). \tag{35}$$

但し、$y(t,x_0)$は、初期値をx_0とする決定方程式の解で次のように表わされる：

$$y(t,x_0)=F^{-1}(e^{\gamma t}F(x_0)). \tag{36}$$

(35)式を積分して、少し便利な形に変形すると、次のようになる：

$$\xi_{RP}(t) = x_0 + e^{-\gamma t}\frac{\gamma F(y(t,x_0))}{F'(x_0)}\int_0^t \frac{\beta(y(s,x_0))}{\alpha(y(s,x_0))}\eta(s)\,ds. \tag{37}$$

これに対応するくりこまれた解 $x_{RP}(t)$ は、

$$x_{RP}(t) = F^{-1}(e^{\gamma t}F(\xi_{RP}(t))) \tag{38}$$

の形に表わされる。この解は、次のような面白い性質を持っている。

(a) もし、$x_{RP}(t)$ を $\eta(t)$ に関して展開して、その一次までとると、

$$x_{RP}(t) = y(t,x_0) + \alpha(y(t,x_0))\int_0^t \frac{\beta(y(s,x_0))}{\alpha(y(s,x_0))}\eta(s)\,ds + \cdots. \tag{39}$$

となり、当然ながら、Ω－展開の解に帰着する。

(b) 初期値 x_0 が非常に小さい（すなわち、不安定点に近い）とすれば、(i) の *original scaling theory* の結果になる。

(c) 上のとり扱いでは、x_0 は、任意であるから、示量性領域から、不安定領域まで、統一的に扱える。したがって、(37), (38) の解は、2つの領域の統一的解になっている。

(d) $x_{RP}(t)$ の分布 $P_{RP}(x,t)$ は通常のガウス分布の初期条件に対しては、

$$P_{RP}(x,t)=\frac{e^{-\gamma t}F'(x)}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sigma_{RP}(t)}\,F'(F^{-1}(e^{-\gamma t}F(x)))}\exp\left[-\frac{(F^{-1}(e^{\gamma t}F(x))-y_0)^2}{2\varepsilon\sigma_{RP}(t)}\right], \tag{40}$$

と与えられる。但し、分散$\sigma_{RP}(t)$は、

$$\sigma_{RP}(t)=e^{-2\gamma t}\left(\frac{\gamma F(y(t))}{F'(y_0)}\right)^2\int_0^t\frac{2\beta^2(y(s))}{\alpha^2(y(s))}ds+\sigma(0). \tag{41}$$

によって与えられる。

以上のように、$x_{RP}(t)$は、いろいろと便利な性質を持っている。しかし、(33)の漸化式を有限でとめる限り、$t\to\infty$で、正しい平衡分布には近づかないので、終領域では、次節のように、再び、ランダムな力を充分とり入れる必要がある。

§5。終領域でのゆらぎと Renormalized systematic approach

時間が充分経過して、終領域に入ると、$x_{sc}(t)$または、もっと一般に、$x_{RP}(t)$は、いくらでも、x_{st}に近づくから、そのまわりでのゆらぎを考慮することにより、正しい扱いをすることが出来る。そのために、そのようなくりこまれた解からの摂動展開を考える[4]:

$$x(t)=x_{sc}(t)+z_1(t)+z_2(t)+\cdots\cdots. \tag{42}$$

補正項$z_1(t), z_2(t),\cdots\cdots$が、$t$が大きくなったとき、定常解$x_{st}$のまわりのゆらぎを与える。

ランダムな力の効果がどのようにとり入れられているかをみるには、次の式をみるとよい：

$$\frac{d}{dt}x_{sc}(t) = \alpha(x_{sc}(t)) + b_F(t)\eta(t), \tag{43}$$

$$\frac{d}{dt}z_1(t) = \left\{\alpha'(x_{sc}(t)) + \beta'(x_{sc}(t))\eta(t)\right\}z_1(t) + \left(\beta(x_{sc}(t)) - b_F(t)\right)\eta(t) + \cdots\cdots . \tag{44}$$

但し、$b_F(t)$は、次のように定義された量である：

$$b_F(t) = \frac{\alpha(x_{sc}(t))}{\gamma F(x_{sc}(t))} F'\left(F^{-1}\left(e^{-\gamma t}F(x_{sc}(t))\right)\right)\beta(x_0) . \tag{45}$$

この$b_F(t)$は、時間の経過と共に$\beta(x_0)$から零に近づく量であるから、(18)式の下で議論したように時間の初期領域では、$x_{sc}(t)$に充分、ランダムな力がとり入れられているが、$t\to\infty$では、それが無視されている。それに丁度対応して、反対に、$z_1(t)$のランダムな力の強さ$\beta(x_{sc}(t)) - b_F(t)$は零から、もとの強さ$\beta(x)$に近づくので、$z_1(t)$等を通して、$t$が大きいところでのゆらぎが、とり入れられることになる。

§6 結び

もっと数学的に定式化する予定であったが、今回も、物理的な定式化が主になった。数学的な取り扱いは今後やりたい。

参考文献

1. 鈴木増雄：講究録 367 (1979年10月) p.114 及びその中の参考文献。

2. N.G. van Kampen, Can. J. Phys. 39 ('61) 551.

3. R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. 9 ('73) 51.

4. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 55 ('76) 383 及び同 supplement 64 ('78) 402.

5. M. Suzuki, 第17回ソルベイ会議報告 (John Wiley & Sons) 印刷中.

6. M. Suzuki, Advances in Chem. Phys. (in press).