数理解析研究所講究録
第405巻 1980年 94-111

非定常過程に対する統計的線形化法について

京大 理　村上 力

§1 はじめに

非線形なdrift項をもつ確率微分方程式が与えられたとき、その定常解過程のスペクトル密度等を近似的に計算する一つの有効な方法として、統計的線形化(statistical linearization)という方法が知られている[1]。 この統計的線形化法の基本的な考え方は、非線形のdrift項を、最小二乗法の意味で最もよい近似となるような線形のdrift項でおきかえることといえる。

本論では、同様の考えを確率微分方程式の、特に非定常解の取り扱いに適用することを目的とする。 まず次節では、drift項の異なる2つの確率微分方程式の解の分布間の関係について知られている事実をまとめておく(§2)。 次に、それらのことを、特に2つの確率微分方程式のうちの一方のdrift項が線形である場合に適用することによって、ある条

件のもとでは、線形なdrift項の係数をうまく選べば、2つの方程式の解の（初期値に関する条件付の）平均ベクトルと分散行列が等しくなることがわかる（§3）。 このことから、非線形な確率微分方程式が与えられたとき、それをself-consistentに決められるある係数をもった線形の確率微分方程式でおきかえるという一つの近似法（statistical linearization）を考えることができる。 一方、このような近似法は、近似の良さに対する評価規準として、2つの分布の近さを測るKullback-Leibler情報量を用いる立場からみても、線形なdrift項の係数の決め方としては最良のものになっていることがわかる（§4）。 最後に、小さなパラメータϵが存在するような場合、統計的線形化によって得られる方程式系にさらに$\epsilon \to 0+$の漸近理論を適用することを考える（§5）。

§2 確率微分方程式の解の分布について

まずはじめに、いくつかの記号を導入しておくことにする。

ある確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上にn次元Wiener過程 $W = \{(W_1(t), \cdots, W_n(t)) ; t \in [0, \infty)\}$と$n$次元確率ベクトル$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$で$W$とは独立かつ$E|\xi|^4 = E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2)^2 < \infty$なるものが与えられているとする。 このとき、$\{W(s) ; s \in [0, t]\}$と$\xi$によって生成される$\sigma$-集合体を$\mathcal{F}_t$と書くことにする。

一方pathの空間としては、$\mathbb{C}$で$[0,\infty)$で定義され$\mathbb{R}^n$に値をとる連続関数$x=\{(x_1(t),\cdots,x_n(t));t\in[0,\infty)\}$の全体を表わすことにし、$\mathcal{B}$を$\mathbb{C}$の全ての筒集合から生成される$\sigma$-集合体、$\mathcal{B}_t$を時刻$t$までの筒集合全体から生成される$\sigma$-集合体とする。

さて、以下ではα，$\hat{\alpha}$などで次のような性質をもつ写像を表わすことにする。即ち、写像$\alpha:[0,\infty)\times\mathbb{C}\ni(t,x)\longrightarrow(\alpha_1(t,x),\cdots,\alpha_n(t,x))\in\mathbb{R}^n$は$(t,x)$に関して連続（$\mathbb{C}$には距離$d(x,x')=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}(\max_{0\le t\le m}|x(t)-x'(t)|\wedge 1)$による位相を考えておく[2)]）であり、各$t\geq 0$に対して写像$\alpha_t:\mathbb{C}\ni x\rightarrow(\alpha_1(t,x),\cdots,\alpha_n(t,x))\in\mathbb{R}^n$が$\mathcal{B}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測（即ち$\alpha_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))\subset\mathcal{B}_t$）となるものである。

このとき、2つの連続な確率過程$X=\{(X_1(t),\cdots,X_n(t));t\in[0,\infty)\}$ $\hat{X}=\{(\hat{X}_1(t),\cdots,\hat{X}_n(t));t\in[0,\infty)\}$がそれぞれ確率微分方程式

$$dX(t)=\alpha(t,X)dt+dW(t)\quad,\quad X(0)=\xi \tag{2.1}$$

$$d\hat{X}(t)=\hat{\alpha}(t,\hat{X})dt+dW(t)\quad,\quad \hat{X}(0)=\xi \tag{2.2}$$

を満たすとし、μ_X，$\mu_{\hat{X}}$でそれらの分布、即ちX，$\hat{X}$によって誘導される$(\mathbb{C},\mathcal{B})$上の確率測度を表わすことにする。

次に、このような2つの分布μ_X，$\mu_{\hat{X}}$の間に成立することがらを、以下で使いやすい形にして定理としてまとめておくことにする。証明の詳細等については、例えばLiptser & Shiryaevの本（Chap. 6，7）[3)]を参照されたい。

<u>定理</u> 次の3つの条件が満たされているとする。

(I) 写像 α , $\hat{\alpha}$ に対して確率微分方程式 (2.1) , (2.2) は一意的な強い解[2),3)]をもつ。

(II) $P\{\int_0^t |\psi(s,\hat{X})|^2 ds < \infty\} = 1$, $t \geqq 0$

ただし、$\psi(t,x) = \alpha(t,x) - \hat{\alpha}(t,x)$ である。さらに、

$$\rho(t) = \exp\left\{\int_0^t \psi(s,\hat{X})\cdot dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(s,\hat{X})|^2 ds\right\} \qquad (2.3)$$

とおくとき、($\psi(s,\hat{X})\cdot dW(s) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(s,\hat{X})dW_i(s)$, $|\psi(s,\hat{X})|^2 = \sum_{i=1}^{n} \psi_i^2(t,\hat{X})$)

(III) $E[\rho(t)] = 1$, $t \geqq 0$

このとき、μ_X と $\mu_{\hat{X}}$ は互いに絶対連続 ($\mu_X \sim \mu_{\hat{X}}$) であり、特に μ_X を $\mathcal{B}_t$ に制限した $\mu_X|\mathcal{B}_t$ の同じく $\mu_{\hat{X}}|\mathcal{B}_t$ に関する Radon-Nikodym微分 を $(d\mu_X/d\mu_{\hat{X}})(t,x)$ とするとき、

$$(d\mu_X/d\mu_{\hat{X}})(t,\hat{X}) = \rho(t)$$

であり、$\rho(t)$ は方程式

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \rho(s)\psi(s,\hat{X})\cdot dW(s) \qquad (2.4)$$

の非負連続な解になっている。

このとき、特に関数 $f : [0,\infty)\times\mathbb{C} \ni (t,x) \longrightarrow f(t,x) \in \mathbb{R}$ を各 t で $\mathcal{B}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測かつ $Ef(t,X) < \infty$ なるものとすれば、

$$E[f(t,X)|\xi] = E[f(t,\hat{X})\rho(t)|\xi] \qquad (2.5)$$

という等式が成立する。ただし $E[\cdot|\xi]$ は初期値 ξ についての条件付期待値である。

したがって、この定理を基礎にすれば、確率微分方程式(2·1)が与えられたとき、その解Xに関するいろいろな量を、別のdrift項をもつ確率微分方程式(2·2)の解$\hat{X}$に関する量で書き表わすことが可能になる。 そこで、定理の条件を満たす範囲でなるべく扱いやすい$\hat{\alpha}$をさがすことが応用上重要となる。しかしながら、単に簡単な$\hat{\alpha}$をというのであれば、$\hat{\alpha}\equiv 0$ととれればそれ[4]が最もよいが、このとき$\hat{X}(t)=\xi+W(t)$となり、この$\hat{X}$自体をXの近似とするのは多少無理がある。 そこで、$\hat{X}$自体としてもある程度Xの近似としての意味をもち、しかも扱いやすい$\hat{\alpha}$をさがすという立場から、次節以下では特に$\hat{\alpha}(t,x)=a(t,x(0))+b(t,x(0))x(t)$という形を考えることにする。

§3 予備的な考察

あらためて確率微分方程式

$$dX(t)=\alpha(t,X)dt+dW(t), \quad X(0)=\xi \tag{3·1}$$

を考え、次の条件が満たされているとする。

(I) (3·1)は一意的な強い解をもち、その解$X=\{X(t);t\in[0,\infty)\}$に対して$E[\sup_{0\leq s\leq t}|\alpha(s,X)|^4]<\infty$が各$t\geqq 0$で成立している。

このとき、(3·1)より

$$|X(t)|^4\leqq 27\{|\xi|^4+|\int_0^t\alpha(s,X)ds|^4+|W(t)|^4\}$$

となるので、martingale不等式[2)] $E[\sup_{0\le s\le t}|W(s)|^4]\leqq C_n t^2$, $C_n=3\cdot(\frac{4}{3})^4 n^2$,
を用いれば、

$$E[\sup_{0\le s\le t}|X(s)|^4]\leqq 27\{E|\xi|^4+t^4E[\sup_{0\le s\le t}|\alpha(s,X)|^4]+C_nt^2\}<\infty$$

を得る。 従って、さらにSchwarzの不等式等を用いれば、

$$E[\sup_{0\le s\le t}|X(s)|^p]<\infty,\quad E[\sup_{0\le s\le t}|\alpha(s,X)|^p]<\infty\quad (p=1,2,3,4)$$

$$E[\sup_{0\le s\le t}|\alpha_i(s,X)X_j(s)|^q]<\infty\quad (q=1,2),\ i,j=1,2,\cdots,n \tag{3.2}$$

が各 $t\geqq 0$ で成立することが示される。 このことから、

$$m_i(t,\xi)=E[X_i(t)|\xi],\quad r_i(t,\xi)=E[\alpha_i(t,X)|\xi] \tag{3.3}$$

$$V_{ij}(t,\xi)=E[X_i(t)X_j(t)|\xi]-E[X_i(t)|\xi]E[X_j(t)|\xi] \tag{3.4}$$

$$C_{ij}(t,\xi)=E[\alpha_i(t,X)X_j(t)|\xi]-E[\alpha_i(t,X)|\xi]E[X_j(t)|\xi] \tag{3.5}$$

$$R_{ij}(t,\xi)=E[\alpha_i(t,X)\alpha_j(t,X)|\xi]-E[\alpha_i(t,X)|\xi]E[\alpha_j(t,X)|\xi] \tag{3.6}$$

等は t に関して確率1で(同時に L^1 の意味でも)各有限区間 $[0,T]$ 上で一様連続になっていることがわかる。

ここで、さらに次のことを仮定しよう。

(II) 確率1で、$V(t,\xi)$ は各 $t>0$ で正則な行列であり、極限

$$b_0(\xi)=\lim_{t\downarrow 0}C(t,\xi)V^{-1}(t,\xi) \tag{3.7}$$

が存在する。

この仮定のもとで、方程式

$$a(t)+b(t)m(t,\xi)=r(t,\xi),\quad b(t)V(t,\xi)=C(t,\xi) \tag{3.8}$$

は $t\geqq 0$ で確率1で連続な一意解

$$a(t,\xi)=(a_1(t,\xi),\cdots,a_n(t,\xi)),\quad b(t,\xi)=(b_{ij}(t,\xi),\ i,j=1,\cdots,n)$$

をもつ。そこで、この a, b に対して確率微分方程式

$$d\hat{X}(t)=[a(t,\hat{X}(0))+b(t,\hat{X}(0))\hat{X}(t)]dt+dW(t),\ \hat{X}(0)=\xi \qquad (3\cdot9)$$

を考えると、この方程式は

(Ⅲ) $E\int_0^t |a(s,\xi)|^2 ds<\infty$, $\int_0^t |b(s,\xi)|ds \leq K(t)<\infty$ (a.s.)

ただし $K(t)$ はある連続関数であり、$|b|^2=\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2$ である。

という条件のもとで一意的な強い解をもち、それは

$$\hat{X}(t)=\Phi(t,\xi)[\xi+\int_0^t \Phi^{-1}(s,\xi)a(s,\xi)ds+\int_0^t \Phi^{-1}(s,\xi)dW(s)] \qquad (3\cdot10)$$

で与えられる。ここで、行列 $\Phi(t,\xi)$ は方程式

$$\Phi(t,\xi)=I+\int_0^t b(s,\xi)\Phi(s,\xi)ds \text{，} I \text{は単位行列} \qquad (3\cdot11)$$

の解で、確率1で t に関して連続かつ正則行列となっている。

この解 $\hat{X}=\{\hat{X}(t);\ t\in[0,\infty)\}$ に対して

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|\hat{X}(s)|^2]<\infty \qquad (3\cdot12)$$

が成り立つことが示される。実際、まず(3・11)から、

$$|\Phi(t,\xi)| \leqq n+\int_0^t |b(s,\xi)||\Phi(s,\xi)|ds$$

を得る。故に、この式と仮定(Ⅲ)より

$$|\Phi(t,\xi)| \leqq n\exp\{\int_0^t |b(s,\xi)|ds\} \leqq ne^{K(t)} \qquad (3\cdot13)$$

一方、

$$\Phi^{-1}(t,\xi)=I-\int_0^t \Phi^{-1}(s,\xi)b(s,\xi)ds$$

より同様にして、

$$|\Phi^{-1}(t,\xi)| \leqq ne^{K(t)} \qquad (3\cdot14)$$

を得る。故に、

$$E\int_0^t|\Phi^{-1}(s,\xi)|^2ds \leqq n^2\int_0^t e^{2K(s)}ds<\infty$$

となって、$\int_0^t\Phi^{-1}(s,\xi)dW(s)$ は L^2-martingale になるので、

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|\int_0^s\Phi^{-1}(u,\xi)dW(u)|^2]\leqq 4n\,E\int_0^t|\Phi^{-1}(s,\xi)|^2ds<\infty \tag{3.15}$$

なる評価が得られる。　ところで、(3.10), (3.13), (3.14) より、

$$|\hat{x}(t)|^2\leqq 3n^2e^{2K(t)}\{|\xi|^2+n^2\int_0^t e^{2K(s)}ds\cdot\int_0^t|a(s,\xi)|^2ds+|\int_0^t\Phi^{-1}(s,\xi)dW(s)|^2\}$$

であるから、$E|\xi|^2<\infty$, 仮定(III), (3.15) より、

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|\hat{x}(s)|^2]\leqq 3n^2\{\sup_{0\leq s\leq t}e^{2K(s)}\}\{E|\xi|^2+$$
$$+n^2\{\int_0^t e^{2K(s)}ds\}\{E\int_0^t|a(s,\xi)|^2ds\}+4n^3\int_0^t e^{2K(s)}ds\}<\infty$$

となり、(3.12) が得られた。　このことから、

$$\hat{m}(t,\xi)=E[\hat{x}(t)|\xi]=\Phi(t,\xi)[\xi+\int_0^t\Phi^{-1}(s,\xi)a(s,\xi)ds] \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\hat{V}(t,\xi)&=E[\hat{x}(t)\hat{x}(t)^*|\xi]-E[\hat{x}(t)|\xi]\,E[\hat{x}(t)|\xi]^*\\&=\Phi(t,\xi)\int_0^t\Phi^{-1}(s,\xi)\Phi^{-1}(s,\xi)^*ds\,\Phi(t,\xi)^*\end{aligned} \tag{3.17}$$

等は確率1でtに関して連続となる。　ここで $\hat{x}\hat{x}^*=\{\hat{x}_i\hat{x}_j\,;\,i,j=1,\cdots,n\}$ であり、Φ^* は Φ の転置行列である。

さて、ここで、2つの確率微分方程式 (3.1), (3.9) に対して前節の定理を適用することを考えることにする。　定理の仮定が満たされるためには、この節での(I)(II)(III)の仮定のほかにさらに次のことを仮定すれば十分である。　即ち、$\psi(t,x)=\alpha(t,x)-a(t,x(0))-b(t,x(0))x(t)$ とおくとき、$\psi(t,\hat{x})$ と (2.3) で定義された $\rho(t)$ に対して、各 $t\geqq 0$ で、

(IV) $E\int_0^t|\psi(s,\hat{x})|^2ds<\infty$, $E[\rho(t)]=1$, $E[\rho(t)^2]<\infty$

が成り立っているとする。以上の仮定のもとで、定理により $\mu_X \sim \mu_{\hat{X}}$ であり、$(d\mu_X/d\mu_{\hat{X}})(t,\hat{X}) = \rho(t)$ となるので、

$$E[X(t)|\xi] = E[\hat{X}(t)\rho(t)|\xi] \;,\; E[X(t)X(t)^*|\xi] = E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)\rho(t)|\xi]$$

という等式が得られるが、実はこのときさらに、

$$E[X(t)|\xi] = E[\hat{X}(t)|\xi] \;,\; E[X(t)X(t)^*|\xi] = E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)^*|\xi] \tag{3.18}$$

が成り立っていることが示される。即ち、まず、(3.8)より

$$E[\psi(t,X)|\xi] = E[\psi(t,\hat{X})\rho(t)|\xi] = 0 \tag{3.19}$$

$$E[\psi(t,X)X(t)^*|\xi] = E[\psi(t,\hat{X})\hat{X}(t)^*\rho(t)|\xi] = 0 \tag{3.20}$$

であることに注意する。次に、$\rho(t)$ が方程式

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \rho(s)\psi(s,\hat{X})\cdot dW(s)$$

を満たしていることを用いれば、

$$\begin{aligned} E[X(t)|\xi] - E[\hat{X}(t)|\xi] &= E[\hat{X}(t)\int_0^t \rho(s)\psi(s,\hat{X})\cdot dW(s)|\xi] \\ &= \Phi(t,\xi)\int_0^t \Phi^{-1}(s,\xi)E[\psi(s,\hat{X})\rho(s)|\xi]ds \end{aligned}$$

となり、(3.19) より右辺は 0 である。ただし、この計算の途中で、$E[\rho(t)^2]<\infty$ より $E\int_0^t \rho(s)^2|\psi(s,\hat{X})|^2 ds < \infty$ が得られることおよびFubiniの定理を用いた。同じように、(3.20) より

$$\begin{aligned} &E[X(t)X(t)^*|\xi] - E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)^*|\xi] \\ &= [\, E[\hat{X}(t)|\xi]\{\Phi(t,\xi)\int_0^t \Phi^{-1}(s,\xi)E[\psi(s,\hat{X})\rho(s)|\xi]\,ds\}^* \\ &\quad + \Phi(t,\xi)\int_0^t \Phi^{-1}(s,\xi)\{E[\psi(s,\hat{X})\hat{X}(s)^*\rho(s)|\xi] - E[\psi(s,\hat{X})\rho(s)|\xi]E[\hat{X}(u)|\xi]^*\}\Phi^{-1}(s,\xi)^*ds\,\Phi(t,\xi)^*\,] \\ &\quad + [\quad \text{〃} \quad]^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

ただし、この計算の途中ではさらに(3.14)より

$$E\int_0^t \left|\int_0^s \Phi^{-1}(u,\xi)\,dW(u)\right|^2 |\Phi^{-1}(s,\xi)|^2 ds \leq n^4 \int_0^t \left\{\int_0^s e^{2K(u)} ds\right\} e^{2K(s)} ds < \infty$$

となり、$\int_0^t \left\{\int_0^s \Phi^{-1}(u,\xi)\,dW(u)\right\} \Phi^{-1}(s,\xi)\,dW(s)$ が L^2-martingale になることを用いた。

以上のことを要約しておくと、ξ, W, α が与えられたとき、(I)〜(IV)の条件が満たされていれば、確率微分方程式

$$dX(t) = \alpha(t,X)\,dt + dW(t), \quad X(0) = \xi$$

の解 X に対して、線形な確率微分方程式

$$d\hat{X}(t) = [a(t,\xi) + b(t,\xi)\hat{X}(t)]\,dt + dW(t), \quad \hat{X}(0) = \xi$$

で、a, b が(3.8)で与えられるものの解 $\hat{X}$ を考えると

$$E[X(t)|\xi] = E[\hat{X}(t)|\xi], \quad E[X(t)X(t)^*|\xi] = E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)^*|\xi]$$

が成立することがわかった。

§4 統計的線形化法

前節の条件(I)〜(IV)を満たす α がどの程度たくさん存在するかという問題はあるが、ここではとにかく前節の結果を確率微分方程式の非定常解の一つの近似的なとり扱い法として応用することを考えてみる。

即ち、ある drift 項 α をもつ確率微分方程式が与えられたとき、これに対して次の様な drift 項だけを線形なものでおきかえた確率微分方程式

$$d\hat{X}(t) = [a(t,\xi) + b(t,\xi)\hat{X}(t)]dt + dW(t), \quad \hat{X}(0) = \xi \tag{4·1}$$

と、係数 a, b に対する方程式

$$a(t,\xi) + b(t,\xi)E[\hat{X}(t)\rho(t)|\xi] = E[\alpha(t,\hat{X})\rho(t)|\xi] \tag{4·2}$$

$$b(t,\xi)\{E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)^*\rho(t)|\xi] - E[\hat{X}(t)\rho(t)|\xi]E[\hat{X}(t)\rho(t)|\xi]^*\}$$
$$= E[\alpha(t,\hat{X})\hat{X}(t)^*\rho(t)|\xi] - E[\alpha(t,\hat{X})\rho(t)|\xi]E[\hat{X}(t)\rho(t)|\xi]^* \tag{4·3}$$

を連立方程式として解くことを考えるのである。ただし、

$$\rho(t) = \exp\{\int_0^t \psi(s,\hat{X})\cdot dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(s,\hat{X})|^2 ds\} \tag{4·4}$$

$$\psi(t,\hat{X}) = \alpha(t,\hat{X}) - a(t,\xi) - b(t,\xi)\hat{X}(t) \tag{4·5}$$

である。もし、与えられた α に対して前節の結果が成立するならば、この様にして得られた解 $\hat{X}$ はもとの方程式の解 X に対して $\mu_X \sim \mu_{\hat{X}}$, $(d\mu_X/d\mu_{\hat{X}})(t,\hat{X}) = \rho(t)$ であるばかりでなく、X と $\hat{X}$ は(初期値に関する条件付の)平均ベクトル、分散行列が等しいことになる。この意味で、(4·1)〜(4·5)を解くこと自体が一つの self-consistent な近似法となっている。そして、この、非線形な方程式を線形な方程式でおきかえるという手続きは、ちょうど非定常過程に対する統計的線形化法というべきものになっている。

そこで、このような近似法をもう少し別の角度からみてみることにする。そのために、まず2つの分布 μ_X, $\mu_{\hat{X}}$ を比較する量的な規準として、統計的推定の問題等でよく用いられるKullback−Leibler情報量というものを導入しよう。

それは、$\mu_X \sim \mu_{\hat{X}}$という条件のもとでは各$T>0$に対して

$$I_T(X|\hat{X}) = \int_{\mathbb{C}} \left\{ \log \frac{d\mu_X}{d\mu_{\hat{X}}}(T,x) \right\} d\mu_X \tag{4.6}$$

で与えられる。 ところで、$(d\mu_X/d\mu_{\hat{X}})(T,\hat{X}) = \rho(T)$ であり、§3の条件(IV)より

$$E\int_0^t \rho(s)|\psi(s,\hat{X})|^2 ds \leqq \left\{E\int_0^t \rho(s)^2 |\psi(s,\hat{X})|^2 ds\right\}^{1/2} \left\{E\int_0^t |\psi(s,\hat{X})|^2 ds\right\}^{1/2} < \infty$$

であるから、Fubiniの定理を用いれば、

$$\int_0^t E|\psi(s,X)|^2 ds = E\int_0^t \rho(s)|\psi(s,\hat{X})|^2 ds < \infty$$

となる。 従って、K－L情報量$I_T(X|\hat{X})$はさらに、

$$I_T(X|\hat{X}) = E[\rho(T)\log\rho(T)] = \frac{1}{2}\int_0^T E|\psi(s,X)|^2 ds \tag{4.7}$$

と書くことができる。

さて、$I_T(X|\hat{X}) \geqq 0$であるが、さらに、

$$I_T(X|\hat{X}) = 0 \iff \mu_X|\mathcal{B}_T = \mu_{\hat{X}}|\mathcal{B}_T$$

であることが示される。 実際、$I_T(X|\hat{X}) = 0$とすれば

$$\int_{\mathbb{C}} \left\{ \int_0^T |\psi(t,x)|^2 dt \right\} d\mu_X = \int_0^T E|\psi(t,X)|^2 dt = 0$$

であり、$\mu_X|\mathcal{B}_T \sim \mu_{\hat{X}}|\mathcal{B}_T$に注意すれば

$$(\mu_{\hat{X}}|\mathcal{B}_T)\{x\,;\psi(t,x)=0,\ t\in[0,T]\} = (\mu_X|\mathcal{B}_T)\{x\,;\psi(t,x)=0,\ t\in[0,T]\} = 1$$

となる。 故に、$(\mu_{\hat{X}}|\mathcal{B}_T)\{x;\ \frac{d\mu_X}{d\mu_{\hat{X}}}(T,x)=1\} = 1$となるので、$\mu_X|\mathcal{B}_T = \mu_{\hat{X}}|\mathcal{B}_T$ を得る。 逆にこの結論から出発すれば、$(d\mu_X/d\mu_{\hat{X}})(T,\hat{X}) = 1$ したがって $\int_0^T \psi(s,\hat{X})\cdot dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\psi(s,\hat{X})|^2 ds = 0$ したがって $\int_0^T |\psi(s,\hat{X})|^2 ds = 0$ が確率1で成りたつので、$I_T(X|\hat{X}) = \frac{1}{2}E[\rho(T)\int_0^T |\psi(s,\hat{X})|^2 ds] = 0$ となる。

そこで、この $I_T(X|\hat{X})$ の小ささで $\mu_{\hat{X}}$ の μ_X への近さ、すなわち近似の良さをはかることにする。 今 §3 の条件(I)〜(IV)のもとで、2つの確率微分方程式 (3·1), (3·9)を考える。ただし、$a_i(t,\xi)$, $b_{ij}(t,\xi)$, $i,j=1,\cdots,n$ は (3.8)で与えられるとは限らずに、一般の t に関して連続な ξ の Borel 関数で条件(III)を満たものであるとしておく。 このとき、このような a, b の中で $I_T(X|\hat{X})$ を最小にするのはどのようなものであるかを考えてみよう。 まず、(3·3)〜(3·6) の定義を用いて

$$
\begin{aligned}
E[|\psi(t,X)|^2|\xi] &= E[|a(t,\xi)+b(t,\xi)X(t)-\alpha(t,X)|^2|\xi] \\
&= |a(t,\xi)+b(t,\xi)m(t,\xi)-\gamma(t,\xi)|^2 \\
&\quad + tr\{b(t,\xi)-C(t,\xi)V^{-1}(t,\xi)\}V(t,\xi)\{b(t,\xi)-C(t,\xi)V^{-1}(t,\xi)\} \\
&\quad + E[|\delta\alpha(t)-C(t,\xi)V^{-1}(t,\xi)\delta X(t)|^2|\xi]
\end{aligned}
$$

と書ける。 ただし、$\delta\alpha(t)=\alpha(t,X)-\gamma(t,\xi)$, $\delta X(t)=X(t)-m(t,\xi)$ とおいた。 故に、$V(t,\xi)$ が非負定値であることより、

$$
E[|\psi(t,X)|^2|\xi] \geqq E[|\delta\alpha(t)-C(t,\xi)V^{-1}(t,\xi)\delta X(t)|^2|\xi]
$$

となる。 したがって、

$$
I_T(X|\hat{X}) \geqq \frac{1}{2}\int_0^T E|\delta\alpha(t)-C(t,\xi)V^{-1}(t,\xi)\delta X(t)|^2 dt
$$

となり、結局 $I_T(X|\hat{X})$ を最小にする a, b は

$$
a(t,\xi)+b(t,\xi)m(t,\xi)-\gamma(t,\xi)=0 \quad , \quad b(t,\xi)-C(t,\xi)V^{-1}(t,\xi)=0
$$

となるもの、即ち (3.8)を満たすものであることがわかる。この様な意味で、初期値 ξ に関する条件付で、平均ベクトル

及び分散行列が等しくなるようにすることとdrift項を最小二乗法の意味で最も良く近似すること、さらに$I_T(X|\tilde{X})$を最小にすること等は同じ内容であるといえる。一方、§3以下の議論は全てL^2-過程（i.e. $E|X(t)|^2<\infty$）の枠内であり、最小二乗法がL^2-確率変数のつくるHilbert空間における直交射影と結びついていることを考えあわせれば、Hilbert空間における射影演算子を用いる方法と統計的線形化法との関係[5]も容易に理解される。

§5. 小さなパラメータを含む確率微分方程式

さて、統計的線形化によって得られる方程式系(4·1)〜(4·3)はもとの確率微分方程式に比べるとかなり簡単にはなっているが、それでもまだ厳密な取り扱いがむずかしい場合が多い。そこで、例えば与えられた確率微分方程式が小さなパラメータを含む場合に、方程式系(4·1)〜(4·3)に対してさらにそのパラメータに関する漸近理論を適用すること考えてみることは意味があると思われる。以下では、おおまかな議論ではあるが、そのような漸近法のいくつかの可能性についてみてみることにする。

前節までの議論では、履歴をもった一般の確率微分方程式を考えてきたが、ここでは特に次のようなMarkov型のものを

考えることにする。

$$dX(t)=[h(t)+L(t)X(t)+gN(t,X(t))]dt+\epsilon dW(t),\ X(0)=\xi \tag{5·1}$$

$h(t)$, $L(t)$, $N(t,X)$ 等は t に関して連続であり、非線形項 $N(t,X)$ は X に関して十分滑らかであると仮定する。 g, ϵ は正の定数である。

まず、非線形項が小さい場合、即ち $g\ll 1$, $\epsilon=1$ の場合を考えてみよう。このとき、統計的線形化によって得られる方程式系は次のようになる。

$$d\hat{X}(t)=[h(t)+L(t)\hat{X}(t)+g\{a(t)+b(t)\hat{X}(t)\}]dt+dW(t),\ \hat{X}(0)=\xi \tag{5·2}$$

$$a(t)+b(t)E[\hat{X}(t)\rho_g(t)|\xi]=E[N(t,\hat{X}(t))\rho_g(t)|\xi] \tag{5·3}$$

$$a(t)E[\hat{X}(t)\rho_g(t)|\xi]+b(t)E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)^*\rho_g(t)|\xi]=E[N(t,\hat{X}(t))\hat{X}(t)^*\rho_g(t)|\xi] \tag{5·4}$$

ただし、

$$\rho_g(t)=\exp\{g\int_0^t\varphi(s,\hat{X}(s))\cdot dW(s)-\frac{g^2}{2}\int_0^t|\varphi(s,\hat{X}(s))|^2ds\} \tag{5·5}$$

$$\varphi(s,\hat{X}(s))=N(s,\hat{X}(s))-a(s)-b(s)\hat{X}(s) \tag{5·6}$$

であり、$\rho_g(t)$ は関係式

$$\rho_g(t)=1+g\int_0^t\rho_g(s)\varphi(s,\hat{X}(s))\cdot dW(s) \tag{5·7}$$

を満たす。 $g\ll 1$ であることと上式より、まず(5·3), (5·4)で $\rho_g(t)$ を1とおいてしまう方法が考えられる。この時、$\hat{X}(t)$ が $E[\cdot|\xi]$ に関して Gaussian となることから、(5.3), (5.4) より $a(t)$, $b(t)$ を $\hat{m}(t,\xi)=E[\hat{X}(t)|\xi]$, $\hat{V}(t,\xi)=E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)^*|\xi]-\hat{m}(t,\xi)\hat{m}(t,\xi)^*$ で書きあらわすのはむずかしくはない。 一方、§3と同

様の計算をくり返すことによって、この場合等式(3·18)のかわりに次の様な式が得られる。

$E[X(t)|\xi]-E[\hat{X}(t)|\xi]=g^2\Delta^{(1)}(t,\xi,g)$, $E[X(t)X(t)^*|\xi]-E[\hat{X}(t)\hat{X}(t)^*|\xi]=g^2\Delta^{(2)}(t,\xi,g)$

従って、例えば $T(g)=\inf\{t\geq 0;\ \max\{E|\Delta^{(1)}|,E|\Delta^{(2)}|\}>g^{-1}\}$ とおけば、上のような方法は $0\leq t\leq T(g)$ では十分よい近似値を与えることが期待される。 ところで、容易にわかるように、上に述べた方法で得られる結果は、方程式(5·1)が与えられたとき、その非線形項 $N(t,X(t))$ を

$$E[N(t,X(t))|\xi]+\{E[N(t,X(t))X(t)^*|\xi]-E[N(t,X(t))|\xi]m(t,\xi)^*\}V^{-1}(t,\xi)\{X(t)-m(t,\xi)\}$$

でおきかえ、このときあらわれる高次の条件付モーメントを X が $E[\cdot|\xi]$ について平均 $m(t,\xi)$, 分散 $V(t,\xi)$ の Gaussian であると思って decoupling を行なうという手続きによって得られる結果と同じである。

次に、$g=1$, $\epsilon\ll 1$ の場合を考えてみる。 今、$y(t,\xi)$, $z^0(t)$ をそれぞれ方程式

$$dy(t)=[h(t)+L(t)y(t)+N(t,y(t))]dt\ ,\quad y(0)=\xi$$

$$dz(t)=[L(t)+DN(t,y(t))]z(t)dt+dW(t),\quad z(0)=0$$

の解であるとする。 ここで、$DN(t,y)=\{\frac{\partial}{\partial y_j}N_i(t,y);\ i,j=1,\cdots,n\}$ である。 このとき、適当な条件のもとで方程式(5·1)の解 X^ϵ に対して、各 $T>0$ で

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\sup_{0\leq t\leq T}E\left|\frac{1}{\epsilon}\{X^\epsilon(t)-y(t,\xi)\}-z^0(t)\right|^2=0$$

となることが知られている。[6] この様な場合、$X^{\epsilon}(t)$ の $y(t,\xi)$ からのずれを

$$\epsilon Z^{\epsilon}(t) = X^{\epsilon}(t) - y(t,\xi)$$

という形で導入する[7),8)]ことができるので、この $Z^{\epsilon}(t)$ に対する確率微分方程式に移れば、

$$dZ^{\epsilon}(t) = [\{L(t) + DN(t, y(t))\}Z^{\epsilon}(t) + \epsilon M^{\epsilon}(t, y(t), Z^{\epsilon}(t))]dt + dW(t)$$

$$Z^{\epsilon}(0) = 0 \,,\ M_i^{\epsilon}(t, y, z) = \sum_{j,k=1}^{n} \left\{ \int_0^1 d\theta \int_0^{\theta} d\theta' \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} N_i(t, y + \theta' \epsilon z) \right\} z_j z_k$$

となって、これは再び非線形項が小さい場合に帰着するので、前と同様の方法を適用することができる。

以上、2つのパラメータ g, ϵ について独立にそれぞれ一方が小さい場合を考えたが、問題によってはそれらを互いに関連させた形での漸近理論を考える必要があるであろう。[9] また、$t \to \infty$ の漸近的なふるまいも含めて良い近似を得るためには上述の方法をさらに改良してゆけばよいが、特に、$\lim_{t\to\infty} \lim_{\epsilon\downarrow 0} X^{\epsilon}(t) \neq \lim_{\epsilon\downarrow 0} \lim_{t\to\infty} X^{\epsilon}(t)$ となるような場合には、そのような $0 \le t < \infty$ での一様な近似を得ることはむずかしい問題であると思われる。最後に、ここで考えた様に一度統計的線形化を行なってから小さなパラメータ ϵ についての漸近法を用いるという方法と、最初から ϵ についてのベキ級数展開を行なう（$X^{\epsilon}(t) = X^{(0)}(t) + \epsilon X^{(1)}(t) + \epsilon^2 X^{(2)}(t) + \cdots$ のように）方法との関係についてふれておくと、前者は、結果的に単純な ϵ 展

開における展開項のうち、部分的にではあるが、ϵについて全ての次数の項をひろいあつめる一つの系統的な方針を与えているということができる[5]。

参考文献

1) A. B. Budgor, J. Stat. Phys. 15 (1976), 355

A. B. Budgor, K. Lindenberg and K. E. Shuler, J. Stat. Phys. 15 (1976), 375

2) 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書 (1975)

3) R. S. Liptser and A. N. Shiryayev, Statistics of Random Process I General Theory, (English transl.) Springer (1977)

4) A. K. Zvonkin, Math. USSR Sbornik 22 (1974), 129

5) B. J. West, K. Lindenberg and K. E. Shuler, J. Stat. Phys. 18 (1978), 217

6) I. I. Gihman and A. V. Skorohod, Stochastic Differential Equations, (English transl.) Springer (1972), Part I, Chap. 2. §7.

7) N. G. van Kampen, Can. J. Phys. 39 (1961), 551

8) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. 9 (1973), 51

9) M. Suzuki, Phys. Lett. 67A (1978), 339 ; 講究録 367 (1979), 114