数理解析研究所講究録
第 405 巻 1980 年 172-193

Stochastic Integral for L^1 *)
(マルチンゲール変換と確率積分の研究)

苫小牧工専　新谷俊忠
(T. SHINTANI)

§1. 序　確率積分はItô [19, 1944年]に依って発見され、種々の拡張・発展・応用を持ち多くの優れた研究がある。此所で報告する結果はマルチンゲール理論の立場から確率積分の発見時から1979年迄の殆ど全ての研究を概観して得られた。

此の小論の目的は主に(i) pathsの連続性と見本関数への有界変動性に着目しマルチンゲール変換や確率積分のRiemann-Stieltjes和としての収束のmechanismを明白にすること；(ii) L^2マルチンゲールに対しRiemann-Stieltjes式に積分の存在を構成的に示すこと(これに依って国田-渡辺積分, Millarの積分等も完全になる)；(iii) L^1マルチンゲールに対する積分の存在を確立すること(即ち「自乗可積分」という仮定を落すこと)等であるが、平均近似定理等得られた副産物も多い。実関数論的にL^1の立場からItô, Burkholder, Kunita-Watanabe [29, 30, 55], Millar [36], Doob-Meyer, Friedman 等を始めごく最近までの結果を用いてこれらのことが実現される。Itô積分

*) この報告は [47], [6], [48], [49] 等をもとにしているが、別の論文である。1974年に研究を開始以後 1979年10月迄に著者が得た結果である。(主な結果は既に1979年10月の日本数学会(実函数論, 於京都大学等で報告している。)

はこの研究の源泉である。 此の研究の背景を一言で述べれば、任意の連続関数$f(x)$に対し有界閉区間$[a,b]$でCauchy-Riemann積分$\int_a^b f(x)dx$は(無条件に)常に収束して存在することにある。実際,確率積分$\int_a^b f(x)dg(x)$は殆ど全ての$\omega\in\Omega$に対し$[a,b]$上で$g(x)$が常にxの連続関数となっている場合である。同一区間$[a,b]$上で$f(x)$が正値連続,$g(x)$が単調増加な連続関数なら$\int_a^b f(x)dg(x)$(=級数)の収束は自然なことである。此の研究はここに着目した。結局,確率積分$\int_a^b f(x)dg(x)$の収束のmechanismはCauchy-Riemann積分$\int_a^b f(x)dx$のそれと同じことであるから,Stochastic Calculasが通常の微分積分学と類似に展開されるのは自然である。Brown運動の解析にBrown運動を用いた(Itô積分)のは正に深い卓見であると思われる。Itô Calculasは滑らかな世界から滑らかでない世界への掛け橋と云えよう。これは滑らかな世界からこの橋を渡って行こうとして考察されたものである。(詳しくは伊藤清先生の著書[21,22,23]参照。)

§2. 離散径数の場合「マルチンゲール変換(Burkholder変換)の基本収束定理」

確率空間(Ω, A, P)上に増大する(Aの)部分σ-代数の族$A_1\subset A_2\subset\cdots$が与えられているとし、この族に適合したマルチンゲールを考える。EでΩ上のPに関するルベーグ積分(expectation),$E[f/\mathcal{A}]$でfのσ-代数$\mathcal{A}(\subset A)$に関する条件付平均(conditional expectation)を表わす。L^1はルベーグ可積分関数$f:\Omega\to R$の全体,$\|f\|_1=E[|f|]$は

その上のnormとする。M^1 は $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ に関する L^1 有界martingale $f=(f_1, f_2, \ldots)$, $\|f\|_1 := \sup_n \|f_n\|_1 < \infty$, 全体とする。$M^1$ を $M^1(A_n)$ とも書く。M^1 は norm $\|f\|_1$ で Banach 空間。martingale f, $f_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$, $(d_k = f_{k+1} - f_k,\ d_0 = f_0)$, $n \geqq 1$, が有界変動とは $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| < \infty$ a.e. のときである。これは $E[|\sum_n d_n|] \leqq \sum_n \|d_n\|_1$ 故, f が L^1 有界変動 $\sum_{n=1}^{\infty} \|d_n\|_1 < \infty$ よりずっと弱い。一般に L^1 有界martingaleは有界変動でない[3, p.1495の例]。$|\sum_{k=0}^{n} d_k| \leqq \sum_{k=0}^{n} |d_k|$ 故, f が有界変動なら $\sum_{k=0}^{n} d_k(\omega)\ (= f_n(\omega))$ は $n \to \infty$ のとき殆ど全ての ω に対し絶対収束故, f は概収束する。$BV := \{f \in M^1;\ f:$ 有界変動$\}$, $AE := \{f \in M^1;\ f:$ 概収束$\}$, $\overline{BV}$ は M^1 での BV の L^1-norm 閉包とする。$M^1 = AE$ (Doob-Chatterji 先生) であるが、[6, p.166, 定理1] 即ち、

定理1.([6])　$M^1 = \overline{BV}$, 即ち, $f \in M^1$ と $\varepsilon > 0$ に対し $\|f - f^{(\varepsilon)}\|_1 < \varepsilon$ となる $f^{(\varepsilon)} \in BV$ がある。

この証明は省略するが、一様可積分性に着目し $f^{(\varepsilon)}$ は大体次の様にして作る。f_∞ を f の概極限とする。$f = g + h$, $g_n := E[f_\infty / A_n]$, $n \geqq 1$, と書ける。$H_n := \sup_{k \geqq n} E[|h_k| / A_n]$ とすると、$\liminf_{n \to \infty} H_n = 0$ a.e.. 整数 $j = j(\varepsilon) > 0$ を $2^{-j} < \varepsilon/4$ 且 $\|g_n - f_\infty\|_1 < \varepsilon/8$ $(\forall n \geqq j)$ と取り、$\tau(\omega) \overset{\text{def.}}{=} \inf\{n;\ \text{exactly } j \text{ of } H_1(\omega), \ldots, H_n(\omega) \leqq 2^{-j}\}$. $f^{(\varepsilon)} := (f_{\tau \wedge n})_{n \geqq 1}$ とすると $f^{(\varepsilon)} \in BV$ で $\|f - f^{(\varepsilon)}\|_1 < \varepsilon$.」

$AE = \overline{BV}$ 故、この定理は $f^{(\varepsilon)}$ の有界変動性が f に遺伝していることを示している。この定理は f が連続時間径数のマルチンゲールのときは paths の連続性から一般に成立しない[6, p.168, 定理3]が、連続なときも離散的なときがもとになっている。これを(Burkholder先生と)

発見した動機は1974年の冬北大談話会で伊藤清先生がBrown運動の見本過程はWeierstrass型の関数故大変取扱いが難しいと話されたのを聴き、当時、Weierstrassの関数は閉区間上で定義されたC^∞-classの関数の列の極限として作られていることとKolmogorovのC-regularization theorem「$\exists \alpha, \beta, \gamma > 0$ 且 $E[|X_t - X_s|^\alpha] \leqq \gamma \cdot |t-s|^{\beta+1}$ なら、a.e.一意にX_tの連続変形$\tilde{X}_t = X_t$ a.e. がある」で$\alpha = 1$とし$p = \beta + 1$とおくと、$p \downarrow 1$として得られるxは有界変動であることに気づいたことにあった。即ち、L^1過程をL^2過程で近似出来れば都合が良い(後述定理3参照)。(報告者は当時安藤毅先生とL^1での最良近似問題[45]を研究していた。) 例えば、2次変分$S_n(f) = \left[\sum_{K=1}^n d_K^2\right]^{\frac{1}{2}}$は$L^1$マルチンゲールを$L^2$マルチンゲールに帰着させて考えようとする。$f$が$L^2$有界$L^2$マルチンゲールなら$d_n, n \geqq 0$, は$L^2(\Omega)$の中で直交しているから$E[|\sum_{n=1}^\infty d_n|^2] \leqq E[\Sigma |d_n|^2] \leqq \sup_n E[|f_n|^2] < \infty$となり$S(f)$は概収束する。ルベーグの収束定理からnorm収束がおる。一方fがL^1マルチンゲールならL^1有界のとき$S(f)$は概収束する[1]。実際、gを$f \in M^1$の変換列$(0, f_1, f_2, \cdots)$に関するマルチンゲール変換とすると「$S_n(f)^2 = f_n^2 - 2g_n, n \geqq 1$,」となる(Doob [3, p.1497])。ここでgの収束をnorm収束でおきかえることは出来ない。即ち、gの概極限g_∞は変換列vが$|v| \leqq 1$でも$\|g_\infty\|_1 = \infty$となる例[3, p.1495]がありg_∞は必しも可積分でない。

<u>Burkholderの weak L^1 不等式</u> ([4, p.858; 3, p.1499, 定理6; 36, p.155])

$g_n = \sum_{K=1}^n v_K \cdot d_K$, $v = (v_1, v_2, \cdots)$ は predictable, 即ち $v_K : \Omega \to R$

は A_K 可測, $K \geqq 1$, $g^*(\omega) := \sup_n |g_n(\omega)|$ とする。 $v^*(\omega) := \sup_n |v_n(\omega)| \leqq c$ (一様有界)なら

$$\lambda \cdot P(g^* > \lambda) \leqslant C \cdot \|f\|_1, \quad \forall \lambda > 0$$

となる f に無関係な定数 $C > 0$ がある。

これから, interpolation と duality を用いて,

$$\| g_n \|_p \leqslant C_p \cdot \| \sum_{K=1}^{n} d_K \|_p \quad , \quad 1 < p < \infty$$

となる定数 $C_p > 0$ がある [3, p.1502].

定理1を用いて次の「基本収束定理」の<u>別証明</u>略を与えよう。これは深い定理である。(マルチンゲール変換 g は「Burkholder 変換」と呼ばれている。g は離散径数の広義 Riemann 和である。)

<u>定理2</u>.([48])(即ちマルチンゲール変換の基本収束定理[3, p.1496, 定理1])
$f \in M^1$ とし, v は predictable とする。 $v^* < \infty$ a.e. なら
マルチンゲール変換 g, $g_n = \sum_{K=1}^{n} v_K \cdot d_K$, は概収束する。

(証明) f, $\varepsilon > 0$ に対し $\|f - f^{(\varepsilon)}\|_1 < \varepsilon^2$ となる $f^{(\varepsilon)} \in BV$ がある。
$g_n^{(\varepsilon)} := \sum_{K=1}^{n} v_K \cdot d_K^{(\varepsilon)}$, $d_K^{(\varepsilon)} := f_{K+1}^{(\varepsilon)} - f_K^{(\varepsilon)}$, $K \geqslant 1$. 殆ど全ての $\omega \in \Omega$ に対して,

$$| g_n^{(\varepsilon)}(\omega) | \leqslant \sup_n |v_n(\omega)| \cdot \sum_{K=1}^{\infty} |d_K^{(\varepsilon)}(\omega)| < \infty$$ より $\{ g_n^{(\varepsilon)}(\omega), n \geqslant 1 \}$

は絶対収束するから, $P\left(\limsup_{m, n \to \infty} | g_m^{(\varepsilon)} - g_n^{(\varepsilon)} | > \varepsilon \right) = 0$. このとき,

$$
\begin{aligned}
& P\left(\limsup_{m, n \to \infty} | g_m - g_n | > 3\varepsilon \right) \\
& \leqslant 2 \cdot P\left(\inf_{m \geqslant 1} \left(\sup_{m \leqslant n} | g_n - g_n^{(\varepsilon)} | \right) > \varepsilon \right) + P\left(\limsup_{m, n \to \infty} | g_m^{(\varepsilon)} - g_n^{(\varepsilon)} | > \varepsilon \right) \\
& \leqslant 2 \cdot P\left(\sup_n | g_n - g_n^{(\varepsilon)} | > \varepsilon \right) + 0 \\
& \leqslant 2C \cdot \varepsilon^{-1} \|f - f^{(\varepsilon)}\|_1 < 2C \cdot \varepsilon \quad \textit{for } \underline{\textit{all}} \ \varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

即ち、$\{g_n(\omega), n\geq 1\}$は殆ど全ての $\omega\in\Omega$ に対し Cauchy 列故 state space R (= Banach空間) の完備性から, $\lim_{n\to\infty} g_n(\omega)$ はどの $c>0$ に対しても $\{V^*\leqq c\}$上で存在する。 $\lim_{c\to\infty} \mathbb{P}(V^*\leqq c) = \mathbb{P}(V^*<\infty)=1$ 故, $V^*<\infty$ a.e. ならば gは概収束する。」(この証明には[3, p.1497]と最近の結果[4]を用いた。)

§3. 連続時間径数の場合「L^2 マルチンゲールに対する確率積分の存在」

確率空間(Ω, A, $\mathbb{P}$) 上に右連続な、増大する部分 σ-代数の族 A_t, $0\leq t<\infty$, が与えられているとする。 $f\in M^1(A_t)$とする。各 $T>0$ に対し有界閉区間$[0,T]$ が考えられ $f=\{f(t): 0\leq t\leq T\}$ は compact support を持つ。Doob の D-regularization theorem から「f の paths $f(t)$はいつも a.e.連続としてよい」から, fは$[0,T]$上で有界連続関数 (Weierstrass の定理) となる。故に、以後 fは(右)連続とする。 fは有界変動でないが、区間$[0,T]$の任意の分割を $\Delta:=\{t_k: 0<t_1<\cdots<t_n\uparrow T\}$ とすると、増分 $d(t_k):=f(t_{k+1})-f(t_k)$, $k\geq 0$, は $L^2(\Omega)$ の中で直交しているから,全ての Δ に対し、 $E\left[\left|\sum_{n=0}^{\infty} d(t_n)\right|^2\right]\leqq E\left[\sum_{n=0}^{\infty}|d(t_n)|^2\right] = E\left[|f(T)|^2\right]=$ 一定。 即ち、 fは$[0,T]$ で L^2有界変動である。 M^∞を L^∞有界L^∞ マルチンゲール全体,とし、$\bar{S}$で Sの M^1における norm $\|f\|_1:=\sup_t\|f(t)\|_1$ に依る閉包を表わす。 このとき, 各$T>0$に対し区間$[0,T]$で,

<u>定理3.</u>([49]) $M^1=\overline{M^\infty}$, 即ち、 $f\in M^1$ と $\varepsilon>0$ に対し $\|f-f^{(\varepsilon)}\|_1<\varepsilon$ となる $f^{(\varepsilon)}\in M^\infty$がある。

このことは「$f\ (\in M^1)$ に $f^{(\varepsilon)}\ (\in M^\infty)$ が L^1-norm でdense に埋め込まれること」である。これを <u>f は L^∞ support $f^{(\varepsilon)}$ を持つ</u>と云うことにする。(この考えは L. Gross 先生の抽象Wiener空間に関係している[6,31])。この support $f^{(\varepsilon)}$ はもとの f に L^∞ マルチンゲールの良い性質を遺伝させる。定理の証明に次の補題を用いる。

<u>補題</u>([49]). 正値劣マルチンゲール $\{f(t);\ 0 \leq t \leq T\}$ は一様可積分である。従って, $\lim_{t \to T} E(f(t)) = E(f(T-))$.

一般に, L^1 有界正値劣マルチンゲールは paths が連続でも $[0,\infty)$ で一様可積分でない。例えば $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ を 1 次元実標準 Brown 運動として $\tau \overset{\text{def.}}{=} \inf\{t : 1 + B_t < 0\}$, $f(t) \overset{\text{def.}}{=} 1 + B_{\tau \wedge t}$ のとき,

$\lim_{t \to \infty} E(f(t)) = 1 \neq 0 > E(f(\infty))$ 故, f は一様可積分でない。また, Brown 運動は L^1 有界でないし, $f(\infty)$ は情報としてよく分らないから, f に L^1 有界を仮定し $E[f(\infty)/A_t]$ を用いるのは適当でない。しかし, $[0,T]$ では $\int_{\{|f(t)|>a\}} |f(t)|\, dP \leq \| f(t) \|_1\ (\forall a > 0)$, 又, $P(|f(t)| > a) \leq a^{-1} \| f(t) \|_1\ (\forall a > 0)$ より $\sup_{0 \leq t \leq T} P(|f(t)| > a) \leq a^{-1} \cdot \| f(t) \|_1 \to 0\ (a \to \infty)$. 故に, f は一様可積分。」また各 $T > 0$ に対し $[0,T]$ で f は L^1 有界となり, $f(T)$ は情報としてよく分る。

定理を証明しよう。$\varepsilon > 0$ に対し, $f^{(\varepsilon)}(t) := E[j \wedge (-j \vee f(T-))/A_t]$, $j > 0$ は整数, とすると $f^{(\varepsilon)} \in M^\infty$. $\{|f(t) - f^{(\varepsilon)}(t)|,\ 0 \leq t \leq T\}$ は L^1 有界正値劣マルチンゲール故補題に依り closable 故, $\forall t \in [0,T]$ に対し,

$E[|f(T-) - f^{(\varepsilon)}(T-)|/A_t] \geq |f(t) - f^{(\varepsilon)}(t)|$. 故に,

$\| f(t) - f^{(\varepsilon)}(t) \|_1 \leq \| f(T-) - f^{(\varepsilon)}(T-) \|_1 = \| f(T-) - [j \wedge (-j \vee f(T-))] \|_1\ (\forall t \geq 0)$.

故にルベーグの収束定理に依って $\varepsilon>0$ に対し $\xi=\xi(\varepsilon)>0$ を $\xi(\varepsilon)\uparrow\infty$ as $\varepsilon\downarrow 0$ 且 $\|f(T-)-f^{(\varepsilon)}(T-)\|_1<\varepsilon$ となる様に定めると、この $f^{(\varepsilon)}\in M^{\infty}$。」

定理3を「マルチンゲール表現定理」に応用してみよう。$B=\{B_t, 0\leq t\leq 1\}$ は実標準Brown運動, $\mathcal{B}_t$ は全ての $s\leq t$ に対し B_s を可測とする最小の σ-代数, $M^1(\mathcal{B}_t)$ は L^1 有界 L^1 マルチンゲール全体とする。一般に、確率過程 $\varphi(t)$ が σ-代数 A_t に関して nonanticipating 関数とは $\varphi(t)$ が可分, $\varphi:[0,\infty)\times\Omega\mapsto \mathbf{R}$ が可測, $\varphi(t)$ は各 t に対し A_t 適合であることである。

<u>定理4.</u>([49]) $X\in M^1(\mathcal{B}_t)$, $\varepsilon>0$ に対し $\|X_1-X_1^{(\varepsilon)}\|_1<\varepsilon$ となる $X^{(\varepsilon)}\in M^{\infty}(\mathcal{B}_t)$ が存在して $X_1^{(\varepsilon)}=\int_0^1\varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dB_t$ (Itô積分)と一意に表わされ、$\varepsilon\downarrow 0$ として $X_1=\int_0^1\varphi(t)\,dB_t$ と一意に表わされる。

ここで、$\varphi^{(\varepsilon)}$, φ は nonanticipating functionals, 即ち、例えば $\varphi:[0,\infty)\to R$ は $P\left(\int_0^t\varphi(s)^2ds<\infty,\ t\geq 0\right)=1$, $\varphi^{(\varepsilon)}$ も同様, である。

(証明) $X\in M^1(\mathcal{B}_t)$ とすると $\|X-X^{(n)}\|_1<\frac{1}{n}$ となる $X^{(n)}\in M^{\infty}(\mathcal{B}_t)$ がある。$X^{(n)}$ は Itô 積分で一意に表現され[20,33], $X_1^{(n)}=\int_0^1\varphi^{(n)}(t)\,dB_t$ ($\exists_1\varphi^{(n)}$ は nonanticipating)。一般に、φ が nonanticipating のとき, $\|\varphi\|_1\overset{\mathrm{def}}{=}E\left|\int_0^1\varphi(t)dB_t\right|$.
$\|\varphi^{(n)}-\varphi^{(m)}\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$ 故, この norm で $\varphi^{(n)}\to\tilde{\varphi}$ $(n\to\infty)$ となる $\tilde{\varphi}$ がある。
$|||\varphi|||\overset{\mathrm{def}}{=}E^{1/2}\left[\int_0^1\varphi(t)^2dt\right]$ とすると、$\|\varphi\|\leq|||\varphi|||$ であるが、ルベーグの収束定理から $\|\varphi^{(n)}-\varphi^{(m)}\|\leq|||\varphi^{(n)}-\varphi^{(m)}|||\to 0$ $(n,m\to\infty)$ 故, $\varphi^{(n)}$ はこの norm $|||\cdot|||$ でも $\tilde{\varphi}$ に収束している。故に、$X_1=\int_0^1\tilde{\varphi}(t)\,dB_t$. 即ち Itô [20] の表現定理から最近の Dudley [10] の表現定理が出る。」

確率積分は Itô [19] に依って発見された。この Itô 積分は

Wiener過程の性質 $E[(B_t - B_s)^2] = t - s$ $(t>s)$ 即ち $(dB)^2 = dt$ に着目している。これは深い考察である。後にKunita-Watanabe [29]に依り確率積分をマルチンゲールに対し考察する際Doob-Meyer分解が用いられた。Doob-Meyer分解は $(dB)^2 = dt$ を一般化して、L^2マルチンゲール $f=(f_t)$ に対し $E[(f_t - f_s)^2/A_s] = E[\langle f\rangle_t - \langle f\rangle_s/A_s]$ $(t>s)$ となるpredictable(又は自然)な増加過程 $\langle f\rangle_t$ が(唯一つ)あることである。Kunita-Watanabe積分[29,30,55]は此所に着目している。又、Millarの積分[36]はweak L^1不等式(又は2次変分)を用いている。　実関数論でよく知られている様に「有限区間$[0,T]$上の任意の連続関数 $v(t)$ に対して$f(t)$に関する、Riemann-Stieltjes積分 $\int_0^T v(t)\,df(t)$ が存在する為の必要条件は$f(t)$が$[0,T]$上で有界変動なことである。」"確率積分の収束もこのことに基づいている"ことを以下に示す。[Riemann積分はRiemann-Stieltjes積分 $\int_0^T v(t)\,df(t)$ で $f(t)=t$ (tの連続関数!)とした場合である。今の場合は $\int_0^T v(t)\,df(t)$ で v も f も連続の場合がもとになっていることに注意しよう。]

まず、可測過程 v と L^2マルチンゲール f に対して、vを連続な可測過程で近似し、この近似を用いて v の f に関するRiemann和が区間$[0,T]$の任意の分割 $\Delta_m := \{t_{m,k} : 0 \leq t_{m,0} < t_{m,1} < \cdots < t_{m,k} < \cdots < t_{m,s} \uparrow T\}$ に依存せず $m \to \infty$ として分点を増し細分して分割のノルム $|\Delta_m| := \max_k (t_{m,k+1} - t_{m,k}) \to 0$ とする(これを$|\Delta|\to 0$と略記)とき、L^2

収束することを示す。即ち、"V の f に関する確率積分は Riemann-Stieltjes式に Riemann和の L^2 極限として定義される" ことを示す。(実際, Itô 積分の存在証明[渡辺信三先生の著書55, p.23, 脚註]は考える積分が分割に依らないことを示唆している。) [30,55] は L^2 に対するマルチンゲール積分を確立した良書である。

この積分は従来の確率積分(国田-渡辺[29,30,55], Millar[36], 等)を皆含んでいて収束も一致し、それらを完全にする。即ち、Kunita-Watanabe 積分[29,30,55]は特別な分点の場合, Millar の積分[36, p.147. 補題 2.2; p.148、定理 2.3]は V に強い条件が付いていて f に L^1 有界を仮定している。また、この証明から Stratonovich式積分の存在も自然に出る。次に、Δ_m を(必しも細分の列でない)区間 $[0,T]$ の任意の分割の列とするとき、$m \to \infty$ とすると、マルチンゲール変換の列 $Y^{(m)}$ (即ち Riemann和の列)は L^1 の弱位相で相対 compact であることを示す。以後, $V = \{v(t), t \geq 0\}$ は可測過程(勿論, 実可分で各 t に対し A_t 可測)とする。「$V^* < \infty$ a.e. とする。」$\lim_{c \to \infty} P(V^* < c) = P(V^* < \infty) = 1$ 故, 「或る $c > 0$ に対して $V^* < c$」としてよい。これは $P\left(\int_0^t v(t)^2 dt < \infty, t \geq 0\right) = 1$ 或いは $E\left[\int_0^t v(t)^2 dt, t \geq 0\right] < \infty$ と同じことである。V は nonanticipating な L^2 過程である。$L^2(A_t)$:= 各 A_t に適合した実可測過程 $g = \{g(t), t \geq 0\}$ で各 $T > 0$ に対し $E\left[\int_0^T g(t)^2 dt\right] < \infty$ となるもの全体, [55, p.19, 定義 1.1]。(右)連続な L^2 マルチンゲール f_t に対し f_t^2 は正値劣マルチンゲール故 Doob-Meyer分解を持ち predictable (又は自然) (右) 連続増加過程 $\langle f \rangle_t$ で $f_t^2 - \langle f \rangle_t$ がマルチンゲールとなるものが唯一つ存在する。

$\mathbb{L}^2(\langle f \rangle)$:= predictable実過程 g で各 $T>0$ に対し $E\left[\int_0^T g(t)^2 d\langle f\rangle_t\right] < \infty$ となるもの全体.（[ ] 内は Riemann-Stieltjes式積分）[30, p.138].

ここで $\mathbb{L}^2(A_t)$ と $\mathbb{L}^2(\langle f \rangle)$ との関係を注意しておく。「t も $\langle f\rangle_t(\omega)$ も共に同一区間 $[0,T]$ 上で定義された（t の）有界連続単調増加関数である。」このことから、$f \in \mathbb{L}^2(A_t)$ に対する結果は $f \in \mathbb{L}^2(\langle f \rangle)$ に対しても同様に成り立つ。特に、$[0,T]$ で $E(\langle f\rangle_t) \leqq E(\langle f\rangle_T)$（＝一定）.

次の定理を、[54, p.161, 定理V.30] に倣い、確率過程に対する「平均近似定理」と名付ける。

定理5.（平均近似定理） (i) nonanticipating な V に対して、

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T |V(t) - \tilde{V}_n(t)|^2 dt\right] = 0 \qquad (\forall T>0)$$

となる連続で nonanticipating な $\tilde{V}_n$ がある。

(ii) 更に、f が $\mathbb{L}^2$ マルチンゲールなら、(i) の各 $\tilde{V}_n$ は predictable で、

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T |V(t) - \tilde{V}_n(t)|^2 d\langle f\rangle_t\right] = 0 \quad (\forall T>0)$$

としてよい。

（証明） (i). Friedman [12, p.56、補題1.1, p.58 補題1.2], 渡辺 [55, p.21、補題1.1の証明]から分る。§6 で Friedman の結果を用いて explicit に $\tilde{V}_n$ を与える。 (ii). $V \in \mathbb{L}^2(A_t)$ 故, predictableな $V' \in \mathbb{L}^2(A_t)$ で $V = V'$ となるものがある。$V'(t,\omega) = \overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} V(s,\omega)\,ds$ とすればよい。故に V は predictable としてよい [55, p.20, 注意1.1]。

[55, p.10, 定義3.2] の predictable と [30, p.124, 定義の(v)] の predictable とは [30, p.125, 上から5行目] の注意に依り一致しているから、

$v \in L^2(\langle f\rangle)$。ここで predictable σ-代数は連続な A_t 適合過程全体を可測にする最小の σ-代数であることに注意する。故に有界連続な A_t 適合過程全体は $L^2(\langle f\rangle)$ で dense である。(#) 即ち (ii) を得る。[(#) [30], p.138, 補題 6.1 の証明では、このことに触れているが、近似を陽に与えていない。] §6 でこの様な近似 $\tilde{v}_n$ を explicit に与える。」次は[29]と[31]を併せて得られる。

定理 6. ([49]) $\sup_t |V(t)| < \infty$ a.e. とする。$m \to \infty$ として $|\Delta_m| \to 0$ とするとき、マルチンゲール変換 $Y_m = \sum_{K=0}^{\infty} V(t_{m,K}) \cdot d(t_{m,K})$ は L^2 収束する。(paths が連続なら条件なしに常に収束して存在する。)

この極限を V の f に関する確率積分と云い $\int_0^T v(t)\, df(t)$ と書く。即ち、

$$\int_0^T v(t)\, df(t) := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_K v(t_{m,K}) \cdot d(t_{m,K}), \quad \int_0^\infty v(t)\, df(t) := \lim_{T\to\infty} \int_0^T v(t)\, df(t)$$

(証明) $\varepsilon > 0$ に対して定理5の (ii) に依り V の nonanticipating な連続近似 $V^{(\varepsilon)}$ が存在して、$E\left[\int_0^T |v - v^{(\varepsilon)}|^2 d\langle f\rangle_t\right] < \varepsilon^2$.

$Y_m^{(\varepsilon)} := \sum_K^\infty V^{(\varepsilon)}(t_{m,K}) \cdot d(t_{m,K})$ とする。ここで $[0,T]$ 上で $V^{(\varepsilon)}$, f の paths は共に連続となっていることに注意する。まず $\lim_{m,n\to\infty} E^{1/2}\left[|Y_m^{(\varepsilon)} - Y_n^{(\varepsilon)}|^2\right] = 0$ を示す。$V^{(\varepsilon)}(t)^2$ は、殆ど全ての $\omega \in \Omega$ に対して、区間 $[0,T]$ で連続な正値可測過程, $\langle f\rangle_t$ は $[0,T]$ で有界な単調増加過程故 $[0,T]$ で有界変動である。ここで $\langle f\rangle_t$ は(右)連続としてよい。$\langle f\rangle_0 = 0$ とする。

$$\tilde{Y}_m^{(\varepsilon)} := \sum_K V^{(\varepsilon)}(t_{m,K})^2 \cdot [\langle f\rangle_{t_{m,K+1}} - \langle f\rangle_{t_{m,K}}] \in L^1, \qquad |V^{(\varepsilon)}| \leq c.$$

$$(0 \leq)\ \sum V^{(\varepsilon)}(t_{m,K})^2 \cdot [\langle f\rangle_{t_{m,K+1}} - \langle f\rangle_{t_{m,K}}] \leq \sup_K |V^{(\varepsilon)}(t_{m,K})|^2 \cdot \sum_K [\langle f\rangle_{t_{m,K+1}} - \langle f\rangle_{t_{m,K}}]$$

$$\leq c^2 \cdot \langle f\rangle_T \leq {}^{\exists}K. \quad (\text{故に、}\{\tilde{Y}_m^{(\varepsilon)}, m \geq 0\}\text{ は一様可積分.})$$

又、$m \to \infty$ のとき、殆ど全ての ω に対して、

$\sum_K V^{(\varepsilon)}(t_{m,K})^2 \cdot [\langle f\rangle_{t_{m,K+1}} - \langle f\rangle_{t_{m,K}}] \longrightarrow \int_0^T V^{(\varepsilon)}(t)^2 d\langle f\rangle_t$ (= Riemann-Stieltjes 積分として存在 [30, p.125, p.139. 補題 6.2]).$^{(*)}$ ルベーグの有界収束定理から

$$\lim_{m\to\infty} E[|Y_m^{(\varepsilon)}|^2] = E\left[\lim_{m\to\infty}\left|\sum_K V^{(\varepsilon)}(t_{m,K})^2 \cdot [\langle f\rangle_{t_{m,K+1}} - \langle f\rangle_{t_{m,K}}]\right|\right]$$

$$= E\left[\int_0^T V^{(\varepsilon)}(t)^2 d\langle f\rangle_t\right]$$

[(*) $\tilde{Y}_m^{(\varepsilon)}(=|\tilde{Y}_m^{(\varepsilon)}|)$ は Δ_m が細分の列でなくても ([30, p11, 例11]により) 一様可積分で且スティルチェス積分として概収束故, $E(\lim_{|\Delta|\to 0}|\tilde{Y}_m^{(\varepsilon)}|)$
$=E(\lim_{m\to\infty}|\tilde{Y}_m^{(\varepsilon)}|)=\lim_{m\to\infty}E(|\tilde{Y}_m^{(\varepsilon)}|)=\lim_{m\to\infty}E(|Y_m^{(\varepsilon)}|^2)=\lim_{|\Delta|\to 0}E(|Y_m^{(\varepsilon)}|^2)$.

(この右辺の [ ] 内は Riemann-Stieltjes 積分として存在する。何故なら,

$S_m := \sum_K V^{(\varepsilon)}(t_{m,K})^2 \cdot \Delta\langle f\rangle_{t_{m,K}}$ は, paths が $[0,T]$ で連続故、$m\to\infty$ として $|\Delta|\to 0$ とすると

有界(正値)単調列の差として収束する。) 故に.(平均近似を用いて),
[30, p.125, 定義の次の記述参照]

$$\lim_{m,n\to\infty} E^{1/2}[|Y_m - Y_n|^2] \leqq 2\cdot\lim_{m\to\infty} E^{1/2}(|Y_m - Y_m^{(\varepsilon)}|^2) + \lim_{m,n\to\infty} E^{1/2}[|Y_m^{(\varepsilon)} - Y_n^{(\varepsilon)}|^2]$$

$$< 2\varepsilon + 0 = 2\varepsilon \quad \textit{for } \underline{\textit{all}} \quad \varepsilon > 0.$$

即ち. Y_n は或る Y に L^2 収束する。又,マルチンゲール不等式から,

$E[\sup_{s\le t}|Y_m(s) - Y_n(s)|^2] \leqslant 4\cdot E[|Y_m(t) - Y_n(t)|^2]$ 故, $Y_n(t)$ の部分列は)

或る $Y(t)$, $s\leqslant t$, に広義一様収束している. 故に. $Y(T)$ は右連続 L^2 マルチンゲール.

<u>系</u>　$\xi_{m,K}\in(t_{m,K}, t_{m,K+1}]$ $(K=0,1,2,\dots)$ とする。Riemann 和

$\sum_K V(\xi_{m,K})\cdot d(t_{m,K})$ は $|\Delta|\to 0$ のとき L^2 収束する。従って,

Stratonovich 式積分 [52, p.44, 定義 2.2] が存在する。
($\xi_{m,K}\in[t_{m,K}, t_{m,K+1})$ のときも同じ)

(証明) $\varepsilon>0$ に対し整数 $j=j(\varepsilon)>0$ を $\varepsilon^2 > 1/j$ として

おくとき、ε と A_t 可測な $V(t)$ に対し定理5の(ii)に依り

$$E\left[\int_0^T |V(t) - V^{(j)}(t)|^2 d\langle f\rangle_t\right] < 1/j$$

となる A_t 可測連続過程 $V^{(j)}(t)$ がある。

$\theta_m := \sum_K V(\xi_{m,K})\cdot d(t_{m,K})$, $\theta_m^{(j)} = \sum_K V^{(j)}(\xi_{m,K})\cdot d(t_{m,K})$.

$m\to\infty$ として分割のノルムを 0 に近づけると [36, p.148] の前半と同様な論法を用いて $\lim_{m,n\to\infty} E[|\theta_m^{(j)} - \theta_n^{(j)}|^2] = 0$.

又、$j \to \infty$ とすると、有界閉区間$[0,T]$で $V^{(j)} \to V$ a.e. 故
有界収束定理から $j_0 = j_0(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$E\left[|\theta_m - \theta_m^{(j)}|^2\right] < \varepsilon^2 \quad (\forall j \geqq j_0)$$

としてよい。故に、

$$\begin{aligned}\lim_{m,n\to\infty} E^{1/2}\left[|\theta_m - \theta_n|^2\right] &\leqq 2\cdot \lim_{m\to\infty} E^{1/2}\left[|\theta_m - \theta_m^{(j)}|^2\right] \\ &\qquad + \lim_{m,n\to\infty} E^{1/2}\left[|\theta_m^{(j)} - \theta_n^{(j)}|^2\right] \\ &< 2\varepsilon \quad \text{for all } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

即ち、Stratonovich式積分 $\lim_{m\to\infty} \theta_m$ が L^2 収束で存在する。」 「この証明はDoob-Meyer分解を用いていない。∴定理6も同様。」

Vのpathsは連続で無いが、一般に、

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_K V(\xi_{m,K})\cdot d(t_{m,K}) = \int_0^T V(t)\,df(t).$$

<u>定理 7.</u>　Δ_mは(必しも細分の列ではない)任意の分割の列とするとき、マルチンゲール変換の列 $Y^{(m)} := \sum_{K=0}^{\infty} V(t_{m,K})\cdot d(t_{m,K})$ は L^1 の弱位相で相対compactである。即ち全ての確率変数 $Z \in L^\infty$ に対して $\lim_{n\to\infty} E[Y^{(m_n)}\cdot Z] = E[Y\cdot Z]$ となる部分列 $Y^{(m_n)}$ と確率変数 $Y \in L^1$ がある。

何故なら、$E[|Y^{(m)}|^2] \leqq C\cdot\|f(T)\|_2^2$．又、weak L^1 不等式から $P(|Y^{(m)}|>a) \leqq P(\sup_K |Y^{(m)}|>a) \leqq a^{-1}\cdot C\|f(T)\|_1$ $(\forall a>0)$ より $a\to\infty$ とすると $\sup_m P(|Y^{(m)}|>a) \to 0$．故に、確率変数系 $\{Y^{(m)}\}_{m\geqq 0}$ は $[0,T]$ で一様可積分。」

§4. L^1 に対する確率積分の存在

V は可測過程，f は L^1 マルチンゲールとする。定理6と定理7で得られた L^2 マルチンゲールに対する確率積分可能な関数族(従って[29,36,30,5]も含む)を概収束の意味で完備化して L^1 に対する確率積分の存在を示す。

<u>定理 8.</u> ([49])　$\sup_t |V(t)| < \infty$ a.e. なら、全ての $T>0$ に対して，マルチンゲール変換の概収束の意味の極限として確率積分 $\int_0^T V(t)\,df(t)$ が存在する。即ち、

$$\int_0^T V(t)\,df(t) := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_K V(t_{m,K})\cdot d(t_{m,K}), \quad \int_0^\infty V(t)\,df(t) := \lim_{T\to\infty} \int_0^T V(t)\,df(t).$$

この積分は V, f に対し「考えられる限り一般」である。ここで、<u>pathsが連続なら全ての$T>0$</u> に対し $\sup_{0\leqq t\leqq T} |V| < \infty$ a.e. となるから、<u>この積分は条件なしに常に存在する。</u>

（証明）　$f \in M^1$, $\varepsilon > 0$ とする。定理3に依って全ての $t \in [0,T]$ に対して

$\|f(t) - f^{(\varepsilon)}(t)\|_1 < \varepsilon^2$ となる $f^{(\varepsilon)} \in M^\infty$ がある。 $d^{(\varepsilon)}$ を $f^{(\varepsilon)}$ に対する increment とし、

$$Y_m := \sum_{K=0}^{\infty} V(t_{m,K}) \cdot d(t_{m,K}), \quad Y_m^{(\varepsilon)} := \sum_{K=0}^{\infty} V(t_{m,K}) \cdot d^{(\varepsilon)}(t_{m,K}).$$

［ここで、全ての $T > 0$ に対して $f(T)$ はよく分る値である。($f(\infty)$ はよく分らない値。) $Y_m^{(\varepsilon)}$ はよく分るものから作られている。従って、Y_m もよく分る。］

このとき、どの $c > 0$ に対しても $\{V^* < c\}$ 上で、定理2の証明の様に、

$$
\begin{aligned}
P\Big(\limsup_{m,n\to\infty} |Y_m - Y_n| > 3\varepsilon\Big)
&\leq 2 \cdot P\Big(\sup_s \Big|\sum_{K=0}^{s} V(t_{m,K})\big[d(t_{m,K}) - d^{(\varepsilon)}(t_{m,K})\big]\Big| > \varepsilon\Big) \\
&\qquad + P\Big(\limsup_{m,n\to\infty} |Y_m^{(\varepsilon)} - Y_n^{(\varepsilon)}| > \varepsilon\Big) \\
&\leq 2 \cdot C \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \|f - f^{(\varepsilon)}\|_1 + 0 \qquad (\text{weak } L^1 \text{ 不等式と定理6に依る}) \\
&< 2C\varepsilon \quad \textit{for } \underline{\textit{all}}\ \varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

故に、Y_m は或る Y_T に概収束する。

§5. 局所マルチンゲールについて

$f = (f_t)_{t\geq 0}$ が $(\Omega, A, P; A_t)$ 上の局所 L^2 マルチンゲールとは、停止時間の増大列 $\sigma_n < \infty$ a.e. で $\sigma_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$ となるものが存在して $f_n(t) := f_{t\wedge\sigma_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, が L^2 マルチンゲールに在ることである [29, 30, 55]。一様可積分性が示している様に、最近、Pratelli [41, p.405, 定理2.1] はこの局所 L^2 マルチンゲール f が（即ち $f_n(t)$ が L^2 マルチンゲールとして）Doob-Mayer 分解を持てば f 自身 L^2 マルチンゲールになってしまうことを示している。従って、L^1 マルチンゲール f を局所 L^2 マルチンゲールとして Doob-Meyer 分解を用いても L^1 は L^2 理論に帰着されない。（即ち、f_t が局所 L^2 マルチンゲールなら [30, p.147, 命題6.12] で $\langle f\rangle_t \in L^1$ となる。）故に、定理3「即ち、$M^1 = \overline{M^\infty}$ と weak L^1 不等式」は重要である。（局所 L^2 理論の様に L^1 を L^2 に引張るのではなくて、L^2 をもとにして完備化して L^1 に行くのである。）　また、[55, p.38, 定理3.3] の証明では $n \to \infty$ のとき $f_{t\wedge\sigma_n} \to f_t$ a.e. となることから確率積分の列 $I_n(V_n)(t) := \int_0^t V_n(s)\, df_n(s)$ ［ここで、$f_n(t) := f_{t\wedge\sigma_n}$, $V_n(t,\omega) := I_{\{\sigma_n > t\}} V(t,\omega)$］が $n \to \infty$ のとき収束することが示されていない。$f \in L^1$ でないと（良い）収束は保証されない。 $M_{loc}^\infty := \{f = (f_1, f_2, \ldots)$ は L^1 マルチンゲールで全ての $n = 1, 2, \cdots$ に対し $f_n \in L^\infty\}$。このとき、$M^1 = \overline{M_{loc}^\infty}$ in M^1-norm，即ち、

<u>定理 9.</u>（[49]） L^1 マルチンゲール f と $\varepsilon > 0$ に対し $\|f - f^{(\varepsilon)}\|_1 < \varepsilon$ となる $f^{(\varepsilon)} \in M_{loc}^\infty$ がある。

実際，$L^1 = \overline{L^\infty}$（$L^1$ normで）故，$\varepsilon > 0$ に対し $g_n \uparrow \infty \ (n \to \infty)$ となる正整数 $g_n > 0$ を $\|f_n - g_n\|_1 < \varepsilon/3 \cdot 2^{n-1}$ となる様に定める。このとき，$f_n^{(\varepsilon)}$ を帰納的に $f_1^{(\varepsilon)} = g_1$，$f_{n+1}^{(\varepsilon)} = f_n^{(\varepsilon)} + \{ g_{n+1} - E(g_{n+1}/A_n)\}$ で定義すると，$f^{(\varepsilon)} \in M_{loc}^\infty$ で全ての n に対して

$\|f_{n+1} - f_{n+1}^{(\varepsilon)}\|_1 \leqq 2 \cdot \varepsilon/3 \cdot 2^n + \|f_n - f_n^{(\varepsilon)}\|_1$，$\|f_1 - f_1^{(\varepsilon)}\|_1 < \varepsilon/3$ 故，$\|f_n - f_n^{(\varepsilon)}\|_1 < \varepsilon$ となる（詳しくは [49] 参照）。 従って，[29, 30, 55] の局所 L^2 マルチンゲール理論は L^1 を cover していない。 また，Millar [36] では前述した様に V に強い制限を付けていて，更に，f に L^1 有界を仮定している。これらのことから [47, 49] 従って <u>§3で初めて L^1 に対する確率積分の存在が示されたことになる。</u>（従って，[29, 36, 30, 55] も完全になる。）尚，§3 の確率積分 Y_T は必ずしも paths が連続にならないが $f \in L^1$ 故 [30, 55] の様に Y を局所 L^2 マルチンゲールと見て paths が連続である様にすることが出来るので局所マルチンゲールは有用である。［即ち，$Y_T^{(n)} = Y_{T\wedge\sigma_n} = \int_0^T I_{\{\sigma_n > t\}} v(t)\, df_{t\wedge\sigma_n}$（$\sigma_n \overset{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : |f_t| > n\}$（$= \infty$，$\{\ \} = \phi$ のとき））とおく。 §4 の Y_T の存在は分割（即ち，近似）に依存しないから，各 n を固定してこの $Y_T^{(n)}$ は L^2 マルチンゲール故 paths が連続な変形 $\tilde{Y}_T^{(n)}$ が a.e. 一意に存在して $\tilde{Y}_T^{(n)} \underset{a.e.}{=} Y_{T\wedge\sigma_n} \to \exists_1 \tilde{Y}_T$ a.e. $(n \to \infty)$ であって，$n \to \infty$ のとき $Y_{T\wedge\sigma_n} \to Y_T \underset{a.e.}{=} \tilde{Y}_T$ a.e.］

§6. 平均近似定理

Doob [9, p.440] の影響と思われるが，以後の多くの研究は V を単関数列で近似している。しかし，Riemann-Stieltjes 式に考えれば V を連続関数列で近似する方が良い。定理 6 はこの様に考えて初めて得られた。 ここで定理 5 について補足する。即ち，V の平均近似 $\tilde{V}$ を explicit に与える。 定理 5 を書直して，

<u>定理10.</u> (I) V は nonanticipating とするとき，V に対し nonanticipating な連続関数の列 $\tilde{V}_n$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta |v(t) - \tilde{v}_n(t)|^2\, d\langle f\rangle_t = 0 \quad a.e.$$

（左辺の積分は Riemann-Stieltjes 積分）.

(II) $V \in L^2(\langle f\rangle)$ に対して

$$E\left[\int_\alpha^\beta |v(t) - \hat{v}_n(t)|^2\, d\langle f\rangle_t\right] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる nonanticipating な連続関数の列 $\hat{V}_n \in L^2(\langle f\rangle)$ がある。

(証　明)(I). Friedman の結果 [12] を修正し一般にする。A_t 可測な $V(t)$ に滑らかな関数を掛けて A_t 可測な滑らかな $\tilde{V}(t)$ を作ろう。$|V| \leqq c$ (一様有界) としてよい。$\rho(t) \overset{\text{def.}}{=} k \cdot \exp[1/t^2-1]$ ($|t| \leqq 1$ のとき), $\overset{\text{def.}}{=} 0$ ($|t|>1$ のとき)。ここに、定数 $k>0$ は $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1$ を満足する様に定める。$t<\alpha$ のとき, $V(t)=0$ とする。$\varepsilon>0$, $2\varepsilon<1$, と各 t に対し、

$$(J_\varepsilon V)(t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\cdot V(s)ds.$$

二つの不定積分の和として $(J_\varepsilon V)(t)$ は (t について) 連続。置換積分法に依り

$$(J_\varepsilon V)(t) = \varepsilon^{-1}\cdot\int_{1}^{-1} \rho(z)\cdot V(t-\varepsilon z-\varepsilon)(-\varepsilon)dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\rho(z)}\cdot\sqrt{\rho(z)}\, V(t-\varepsilon z-\varepsilon)dz.$$

故に Schwarz の不等式と Hölder の不等式に依り

(1). $$\int_\alpha^\beta (J_\varepsilon V)^2 d\langle f\rangle_t \leqq \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{-1}^{1}\rho(z)dz \cdot \int_{-1}^{1}\rho(z)\cdot V(t-\varepsilon z-\varepsilon)^2 dz\right\} d\langle f\rangle_t$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{ \varepsilon^{-1}\cdot \int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\cdot V(s)^2 ds\right\} d\langle f\rangle_t$$

$$\leqq K_\varepsilon \cdot \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{t-2\varepsilon}^{t} V(s)^2 ds\right\} d\langle f\rangle_t$$

($\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon > 0$ は微分として有限に存在。)

実関数論でよく知られている様に、ω を固定して $\int_\alpha^\beta V(t,\omega)^2 d\langle f\rangle_t < \infty$ とするとき、$\int_\alpha^\beta |u_n(t) - V(t,\omega)|^2 d\langle f\rangle_t \to 0$ ($n\to\infty$) となる連続関数 u_n がある。(**) $\sup_{t\in[\alpha,\beta]} |u_n(t)| < \infty$ a. e. 故 $|u_n(t,\omega)| \leqq c$ としてよい。Schwarz の不等式が成立する [55, p.37, (3.6)] から Minkowski の不等式を得て、J_ε が linear functional であることから、

(2) $$\left\{ \int_\alpha^\beta |(J_\varepsilon V)(t,\omega) - V(t,\omega)|^2 d\langle f\rangle_t \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \left\{ \int_\alpha^\beta |J_\varepsilon(v(\cdot,\omega) - u_n(\cdot))(t)|^2 d\langle f\rangle_t \right\}^{1/2}$$
$$+ \left\{ \int_\alpha^\beta |(J_\varepsilon u_n)(t) - u_n(t)|^2 d\langle f\rangle_t \right\}^{1/2}$$
$$+ \left\{ \int_\alpha^\beta | u_n(t) - V(t,\omega)|^2 d\langle f\rangle_t \right\}^{1/2}.$$

微分積分学の一定理により、一般に $[a,b]$ 上の一変数関数 $g(s)$ が $|g| \leqq c$, $[a,b]$ で可積分，なら、$\int_a^t g(s)\,ds$ は $[a,b]$ で t の連続関数である。
(高木貞治著「解析概論」(改訂第3版), p.100, 定理34.)
故に、$\varepsilon \to 0$ とすると、$\int_{t-2\varepsilon}^t |v(s,\omega) - u_n(s)|^2 ds \longrightarrow 0$ となるから,
(1) と有界収束定理とに依り、(2) の右辺第1項 $\longrightarrow 0$ $(\varepsilon \to 0)$.
また、u_n は有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ で連続故，$\varepsilon \to 0$ のとき $t \in [\alpha,\beta]$ について一様に $(J_\varepsilon u_n)(t) \to u_n(t)$.
故に、(2) で $\varepsilon \to 0$ としてから $n \to \infty$ とすると、

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}} \int_\alpha^\beta |(J_\varepsilon V)(t) - V(t)|^2 d\langle f\rangle_t = 0 \quad \text{a. e.}$$

従って, $\tilde{V}_n := J_{1/n} V$ とすれば、この $\tilde{V}_n$ は連続で A_t 可測故、nonanticipating。このことは、どの $c > 0$ に対しても成り立っているから、定理2, 定理8の証明の様に $c \to \infty$ として, 全ての $V^* < \infty$ a.e. に対して成立する。

定理5の(ii)の証明で注意した様に、結局は、$\langle f\rangle_t(\omega)$ は t と同様 ($[\alpha,\beta]$ 上で t について) 有界連続単調増加 (従って有界変動) であることがもとになっている。)

(**) 実際、簡単の為 $V(t,\omega)$ を $V(t)$, $\langle f\rangle_t(\omega)$ を $\langle f\rangle_t$ と書くとき、$V(t)$ に対し Lebesgue-Stieltjes 積分論から [54, p.149, p.154, p.284, 問2 とその解答]), $m \to \infty$ のとき、$\int_\alpha^\beta |V^{(m)}(t) - V(t)|^2 d\langle f\rangle_t \longrightarrow 0$ となる連続関数 $V^{(m)}(t)$ がある。$|V^{(m)}(t,\omega)| \leqq c$ 故、$V^{(m)}$ は確率変数である。($V^{(m)}$ は [9, 22, 26, 30, 53, 55, 56] 等々、沢山文献があり、それらから類似に得られる。) 一様 norm $\|g\| := \underset{t\in[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}} |g(t)|$ [53, p.86, 例12] で, $\|V^{(m)} - V^{(n)}\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$。$[\alpha,\beta]$ 上の連続関数の空間 $C([\alpha,\beta])$ は $\|\cdot\|$ で Banach 空間故、$V^{(\infty)}$ が存在して連続。即ち, $V^{(m)}(t)$ は $V^{(\infty)}(t)$ に $[\alpha,\beta]$ で一様収束する。$\underset{t\in[\alpha,\beta]}{\mathrm{ess.sup}} |V| = \underset{t\in[\alpha,\beta]}{\mathrm{ess.sup}} |V^{(\infty)}| = \|V^{(\infty)}\|$ 故、各 t に対し、$V^{(\infty)}(t) = V(t)$ a.e. in t. 即ち V の連続変形 $V^{(\infty)}$ がある。

(Ⅱ). (Ⅰ)に依り、Vに対して $\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta |V(t)-\tilde{V}_n(t)|^2 d\langle f\rangle_t = 0$ a.e. in ω

となる nonanticipating な連続過程 $\tilde{V}_n$ がある。閉区間 $[\alpha,\beta]$ で、

V, $\tilde{V}_n$ は一様有界としてよい故，有界収束定理に依り

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_\alpha^\beta |V(t)-\tilde{V}_n(t)|^2 d\langle f\rangle_t\right] = 0.$$

$\hat{V}_n := \tilde{V}_n$ とすればよい。┘

〈p.15、定理8の証明への補足〉 $\{Y_n^{(\varepsilon)}\}$ は、$n\to\infty$ のとき、定理6に依り L^2 収束故，確率収束する。$\{Y_n^{(\varepsilon)}\}$ が確率収束すれば概収束することを示そう。$\{Y_n^{(\varepsilon)}\}$ が確率収束するから、十分大きい n, m に対して一様に、$P(|Y_m^{(\varepsilon)}-Y_n^{(\varepsilon)}|>\varepsilon) < \frac{1}{2}$. $\{Y_n^{(\varepsilon)}\}_{n\geqq 1}$ は確率ベクトルの列故，Ottaviani の不等式〔K. Itô, 確率論Ⅱ, p.183 の例題4.1の(ii), 岩波講座、解析学(Ⅰ) vii, 1977〕に依り、$\varepsilon>0$ に対して n を十分大きく取れば全ての m に対し、$P\left(\max_{k=1}^{m}|Y_{n+k}^{(\varepsilon)}-Y_n^{(\varepsilon)}|>2\varepsilon\right) \leqq 2P(|Y_{n+m}^{(\varepsilon)}-Y_n^{(\varepsilon)}|>\varepsilon)$.

従って，

$$P\left(\max_{1\leqq k,l\leqq m}|Y_{n+k}^{(\varepsilon)}-Y_{n+l}^{(\varepsilon)}|>4\varepsilon\right) \leqq 4P(|Y_{n+m}^{(\varepsilon)}-Y_n^{(\varepsilon)}|>\varepsilon) \leqq 4\cdot\sup_m P(|Y_{n+m}^{(\varepsilon)}-Y_n^{(\varepsilon)}|>\varepsilon)$$

最左辺の ω 集合は m と共に増大して $\{\sup_{k,l}|Y_{n+k}^{(\varepsilon)}-Y_{n+l}^{(\varepsilon)}|>4\varepsilon\}$ に近づくから，

$$P\left(\sup_{k,l}|Y_{n+k}^{(\varepsilon)}-Y_{n+l}^{(\varepsilon)}|>4\varepsilon\right) \leqq 4\cdot\sup_m P(|Y_{n+m}^{(\varepsilon)}-Y_n^{(\varepsilon)}|>\varepsilon).$$

n が増大するとき、$\{\sup_{k,l}|Y_{n+k}^{(\varepsilon)}-Y_{n+l}^{(\varepsilon)}|>4\varepsilon\}$ は減少するから，

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{k,l}|Y_{n+k}^{(\varepsilon)}-Y_{n+l}^{(\varepsilon)}|>4\varepsilon\right) \leqq 4\cdot\sup_m P(|Y_{n+m}^{(\varepsilon)}-Y_n^{(\varepsilon)}|>\varepsilon),\ n=1,2,\cdots.$$

$n\to\infty$ のとき $\{Y_n^{(\varepsilon)}\}$ は確率収束するから、上の右辺 $\to 0$ となり、$\{Y_n^{(\varepsilon)}\}$ は概収束する。┘

〈p.14、上から3行目への補足〉 m は固定しておいてよい。

$$\begin{aligned} E[|\theta_m-\theta_m^{(j)}|^2] &= E\left[\left(\sum_k \{V(\xi_{m,k})-V^{(j)}(\xi_{m,k})\}\cdot d(t_{m,k})\right)^2\right] \\ &\leqq E\left[\sup_k |V(\xi_{m,k})-V^{(j)}(\xi_{m,k})|^2\cdot\left\{\sum_k d(t_{m,k})\right\}^2\right] \\ &\leqq E^{1/2}\left[\sup_k |V(\xi_{m,k})-V^{(j)}(\xi_{m,k})|^4\right]\cdot N \end{aligned}$$

（定理3に依り $f\in M^\infty$ としてよい）　（ N は定数）.

$j\to\infty$ のとき，$V^{(j)}\to V$ a.e. 故 有界収束定理に依り，

$$\lim_{j\to\infty} E[|\theta_m-\theta_m^{(j)}|^2] = 0.$$ ┘

以上、得た結果の一端を述べたにすぎないが、この小論が幾分かの意味を持つなら幸いであり、それは全く日頃御世話になっております善意の皆様の御蔭であり、瑕瑾は著者の責であります。 安藤毅先生, 北大応電研, 理学部数学教室, の諸先生・皆様に, 伊藤清先生, 京大数理研の諸先生・皆様, 渡辺信三先生, 理学部確率論講座の皆様に、又、外国では特にGross先生, Cornell大学(White Hall)の諸先生・皆様, Burkholder先生, Illinois大学の諸先生・皆様, Chatterji, Cairoli両先生, EPFL, ETHZ, Neveu先生, Yor氏, Paris大学, Schaefer先生, Tübingen大学, Garsia先生, UCSD, の各数学教室の諸先生・皆様, 他「大勢の皆様に」そして、苫小牧工専の皆様に、大変御世話になりました。 また、学会では、(10年以上もの間)特に、実函数論・関数解析学・統計数学(含確率論)の皆様に、そして、このシンポヂウムの世話人の皆様に、特に、お世話になりました。 深く感謝している次第です。

References

(殆ど全ての論文、文献を参照したが、本稿執筆に用いたもので参照が容易と思われるもののみ挙げる。積分論については参照したものの一部のみ挙げている。)

[1] D.G. Austin, A sample function property of martingales, Ann. Math. Stat., 37(1966), 1396-1397.

[2] D.L. Burkholder, Maximal Inequalities as Necessary Conditions for Almost Everywhere Convergence, Z. Wahr., 3(1964), 75-88.

[3] ______________, Martingale Transforms, Ann. Math. Stat., 37 (1966), 1494-1504.

[4] D. L. Burkholder, A Sharp Inequality for Martingale Transforms, Ann. Prob., 7(1979), 858-863.
[5] D. L. Burkholder and R. F. Gundy, Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math., 124(1970), 249-304.
[6] D. L. Burkholder and T. Shintani, Approximation of L^1-bounded Martingales by Martingales of Bounded Variation, Proc. Amer. Math. Soc., 72(1978), 166-169.
[7] S. D. Chatterji, Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, Math. Scand., 22(1968), 21-41.
[8] J. Diestel and J. J. Uhl, Vector measures, Math. Surveys,no.15, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.
[9] J. L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, New York, 1953.
[10] R. M. Dudley, Wiener Functionals as Itô Integrals, Ann. Prob., 5(1977), 140-141.
[11] N. Dunford and J. T. Schwarz, Linear Operators,I , New York, Interscience, 1958.
[12] A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, vol. 1, Prob. and Math. Stat. Vol. 28, Academic Press, 1975.
[13] M. Fukushima, A Decomposition of Additive Functionals of Finite Energy, Nagoya Math. J., 74(1979), 137-168.
[14] A. M. Garsia, Martingale Inequalities, Seminor Notes on Recent Progress, Benjamin, Massachusetts, 1973.
[15] I. I. Gihman and A. V. Skorohod, Stochastic Differential Equations, Springer, New York, 1972.
[16] L. Gross, Abstract Wiener spaces, Proc. 5 th Berkeley Symp. Math. Stat. & Prob., 2(1965), 31-42.
[17] H. Hahn and A. Rosental, Set Functions, University of New Mexico Press, New Mexico, 1948.
[18] T. Hida,ブラウン運動,岩波書店, 1975.
[19] K. Itô, Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20(1944), 519-524.
[20] ______, Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan, 3(1951), 157-167.
[21] ______, 確率論,現代数学14,岩波書店, 1953.
[22] ______, Lectures on stochastic processes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.
[23] ______, 確率論 III,岩波講座,解析学(I) , 1978.
[24] S. Ito,ルベーグ積分入門,裳華房 , 1963.
[25] S. Izumi,実函数論,宝文館 , 1957.
[26] S. Koshi,測度と積分 , 共立全書213, 1978.
[27] Y. Kubota,積分論,数学選書, 槇書店, 1977.
[28] H. Kudo,確率の計算 , 岩波全書 279, 1973.
[29] H. Kunita and S. Watanabe, On Square Integrable Martingales, Nagoya Math. J., 30(1967), 209-245.
[30] H. Kunita,確率過程の推定,数理解析とその周辺 14,産業図書 , 1976.
[31] H.-H. Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces, Lec. Notes in Math. 463, Springer, Berlin, 1975.
[32] H. Lebesgue, Measure and the Integral, Holden Day, London, 1966.
[33] H. P. McKean, Stochastic Integrals, Academic Press, New York, 1968.
[34] E. J. McShane, Stochastic Calculus and Stochastic Models, Prob. and Math. Stat., Academic Press, New York, 1974.
[35] P. A. Meyer, Integral stochastique, I-IV, Lec. Notes in Math., Springer, 39, Sém. de Prob., (1967), 72-162.
[36] P. W. Millar, Martingale Integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 133 (1968), 145-166.

[37] S. Nakanishi, 積分論，共立数学講座 25, 1973.
[38] J. Neveu, Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités, Deuxième ed., Masson et Cie, Paris, 1970.
[39] ________, Discrete-Parameter Martingales, North-Holland Math. Library vol. 10, New York, 1975.
[40] M. Nishio, 確率論，実教出版，1978.
[41] M. Pratelli, Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrables, Sém. de Prob. X, Lec. Notes in Math., 511(1976), 401-413.
[42] F. Riesz and SZ.-Nagy, Functional Analysis, Frederick Ungar Pub. Co., New York, 1972.
[43] S. Saks, Theory of the Integral, Warsaw, 1937.
[44] H. H. Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer, Berlin, 1974.
[45] T. Shintani and T. Ando, Best Approximants in L^1 Space, Z. Wahr., 33(1975), 33-39.
[46] T. Shintani, Stochastic Integrals in Banach spaces, Math. Note, EPF-Lausanne, 1977.
[47] ________, MARTINGALE TRANSFORM AND STOCHASTIC INTEGRAL 日本数学会昭和54年度秋季総合分科会，実函数論（1979年10月、京都大学）.
[48] ________, A Proof of Convergence Theorem for Martingale Transform, Proc. Amer. Math. Soc., to appear, 1979.
[49] ________, Martingale Transform and Stochastic Integral, Ibid., to appear, 1979.
[50] A. V. Skorokhod, Studies in the theory of random processes, Addison Wesley, 1965.
[51] W. F. Stout, Almost sure convergence, Prob. and Math. Stat., Academic Press, New York, 1974.
[52] R. L. Stratonovich, Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control, American Elsevier Pub. Co., New York, 1968.
[53] G. Sunouchi, 測度と積分，近代数学新書，至文堂，1967.
[54] M. Tsuji, 実函数論，槇書店，1962.
[55] S. Watanabe, 確率微分方程式，数理解析とその周辺9，産業図書，1975.
[56] A. C. Zaanen, Integration, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1967.
[57] A. Zygmund, Trigonometric Series, I, II, Cambridge, 1977.