

一次元カオスについて

東大 教養 高橋陽一郎

0. 一次元力学系に対する変分原理とカオス

格子系の古典統計力学における平衡状態 μ は、次の変分原理によって、"熱力学的"に、特徴づけられる。

$$(1) \quad S(\mu) - \langle \beta U \rangle_{\mu} \rightarrow \max = P(\beta U)$$

ここで、 $S(\mu)$, $\langle \beta U \rangle_{\mu}$ は、state μ の下での、site 当りの平均エントロピーと平均エネルギー、 $\beta > 0$ は温度の逆数である。熱力学的極限 $P(\beta U)$ は、一次元格子 \mathbb{Z} の場合、Artin-Mazur-Ruelle のゼータ関数

$$(2) \quad \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n \right\}, \quad Z_n = \sum_{\omega: \sigma^n \omega = \omega} e^{-\sum_{i=0}^{n-1} \beta U(\sigma^i \omega)}$$

の収束半径 R によって、 $P(\beta U) = -\log R$ として与えられる。ただし、 σ は、 \mathbb{Z} 上の configuration $\omega = (\omega_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ の下で、

$$(\sigma \omega)_t = \omega_{t+1} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

一次元力学系 (J, f) に対するカオスの問題は、以下に述べるように未だ不完全ではあるが、上と同様の、次のような変分原理による定式化が可能である。ただし、 J としては、主として、区間、又は、円周、変換 $f: J \rightarrow J$ は必要十分な滑らかさを仮定する。 $h_\mu(f)$ は、測度論的エントロピーとして、

$$(3) \quad h_\mu(f) - \beta \int_J \log |f'(\omega)| \mu(dx) \rightarrow \max. \quad \left(\begin{array}{l} \mu \text{ は } f\text{-不変な} \\ \text{確率測度} \\ \beta \geq 0 \end{array} \right)$$

この右辺の \max を与えるものとして、(2)と同類のもの、ただし、その逆数、を導入する：

$$(4) \quad D_f(z) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} Q_n \right\}, \quad Q_n = \sum_{x: f^n x = x} \frac{1}{\left| \frac{d(f^n)}{dx}(\omega) \right|^\beta}$$

この中級数 $D_f(z)$ の最小の正の零点を $e^{-P_\beta(f)}$ と書く。もし、 $P_\beta(f)$ が (3) の \max と一致すれば、変分原理が成立する と呼ぶことになる。なお、ここで考えるのは、 $\beta=0, 1$ の場合で、 $\beta=0$ の時には、 $z^0 \equiv 1$ と約束する。

この報告では詳しくは述べない $\beta=0$ の場合の結果に最初に触れておこう。この時、(3), (4) は、 f' に、言い換えれば、力学系 (J, f) の微分構造と無関係に、位相的タシベルの性質を記述している： $P_0(f)$ は、位相的エントロピー $\text{ent}(J, f)$ と一致し、さらに、(3) の \max と一致する。即ち、変分原理が成立する。 $\beta=0$ の時には、次の定理が知られている。

定理 0. 次の4条件は互に同値である.

- (i) $\text{ent}(J, f) > 0$
- (ii) 同期 $n \in \{2^m; m \geq 0\}$ の同期点 $x \in J$ が存在する.
- (iii) (J, f) は, 位相的カオスである, i.e., ある n に対して, f^n で不変な部分集合 $J_0 \subset J$ を選べば, (J_0, f^n) はマルコフ型のずらし (shift) と同型である. (この時, Li-Yorke の意味のカオスでもある)
- (iv) ある f -不変測度 μ に関して, 軌道 $x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_{2^m} = f(x_m), \dots$ は, (多重) マルコフ連鎖となる.

Remark $P_0(f) = \text{ent}(J, f) \geq 0$ は自明であるから, この定理は, 熱力学的極限に相当する量 $P_0(f)$ の値によって, 位相的カオスの存在を判定されることを示している. なお, $P_0(f) = 0$ の場合には, ある自然数 n に対して, f は, 2^k 同期, $0 \leq k \leq n$ の同期軌道をもつ, 他の同期軌道をもたない場合と, すべての n に対して, 2^n 同期の軌道をもつ場合に分かれる. 前者の場合, 最高次の同期 2^n の軌道が安定であり, カオスということとは程遠い. しかし, 後の場合, 概同期運動をもつ部分があり, Li-Yorke の意味ではカオスである. この時, (J, f) は混合的でないので, 位相的カオス (Y. Oono は formal chaos と呼んでいる) の方が適切な概念と思われよう.

1. 観測可能なカオス: 主定理

この報告で述べるのは, $\beta=1$ の場合である. この時, (3) (4) は, (J, f) の微分構造に陽に依存している. 実際, この場合は, 次のような問題を考えるのに適切である:

(5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ほとんどすべての出発点 } x_0 \in J \text{ に対して,} \\ \text{軌道 } x_0, x_1=f(x_0), \dots \text{ は混合的か} \end{array} \right.$

ここで, 「ほとんどすべて」は, 通常のルベーグ測度 dx に関して考える. それは, (J, f) を物理系と考えて実験 (= 数値実験) した場合には, 観測にかかる種類の現象がどうか, という意味で, その典型的な場合は, f -不変な不変密度函数 $\varphi(x)$ が存在して, $(J, f, \varphi(x)dx)$ が混合的になる場合である. 一般的に次のように定式化する.

定義. カオス系 (J, f) が observable chaos とは, 混合的な, (J, f) の漸近測度の存在することである. ただし, μ が漸近測度 (asymptotic measure) とは, ほとんどすべての $x \in J$ に対し,

$$\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i x) = \int_J \varphi(y) \mu(dy) \quad (\forall \varphi: \text{連続函数})$$

が成立することである. (より一般的には, この等式の成立する x の集合のルベーグ測度が正であることの2を要求する)

絶対連続な不変測度は, ほとんど, 漸近測度である.

定理 1. $P_1(f) > 0 \iff$ 安定な周期軌道の存在

定理 2. 絶対連続な不変測度の存在^{*} $\implies P_1(f) = 0$.

定理 3. f が区分的に C^1 級で, $\log |f'(x)|$ が有界であるならば, つねに, $P_1(f) \geq 0$ で, 平衡測度^{**}が存在する.

定理 4. 上の定理 1-3 の仮定の下で, つねに, 変分原理が成立する.

変分原理の成立しない例, $P_1(f) < 0$ なる例は後で述べる. ここで, (3) の左辺の中 2 項の意味を確かめよう. 今, $\mu \in$ エルゴード的 な不変測度とすれば, Birkhoff の定理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i(x))| = \int \log |f'(x)| \mu(dx), \mu\text{-a.e. } x$$

従って, これは, $\frac{1}{n} \log \left| \frac{d(f^n)}{dx^n}(x) \right|$ の極限に等しく, 点 x での $n \rightarrow \infty$ での f^n の平均拡大率を与える. これは, Liapunov の特異指数の特別の場合である. とくに, すべての周期軌道が不安定で, 絶対連続な不変測度 μ が存在する時には, これは平衡測度となり, その測度論的エントロピー $h_\mu(f)$ は, 定理 2 より,

$$h_\mu(f) = \int \log |f'(x)| \mu(dx)$$

と計算される.

* 安定な周期軌道がない場合

** (3) の max を与える測度 $\mu \in (J, f)$ の平衡測度と呼ぶ.

2. 作用素 \mathcal{I}_f の Fredholm 行列式

前節に述べた定理の成立する背景には、以下の重要な事実がある。まず、古典統計力学で transfer matrix と呼ばれている \mathcal{I} と対応する作用素 \mathcal{I}_f を導入しよう。

$$(\mathcal{I}_f \varphi)(x) = \sum_{y \in \mathcal{I}(x)} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|} \quad (\varphi \in L^1 \equiv L^1(\mathcal{I}, dx))$$

この時、次の性質は成り立つであろう。

- 1) 測度 $\varphi(x)dx$ の f による像は、測度 $(\mathcal{I}_f \varphi)(x)dx$ である。
- 2) L^1 上の作用素 \mathcal{I}_f は非負で、そのノルムは 1 である。
- 3) 絶対連続な不変測度 μ の存在 ($\mu(dx) = \varphi(x)dx$) と、 $\mathcal{I}_f \varphi = \varphi$ なる φ の存在、言いかえれば、 \mathcal{I}_f が固有値 1 を持つこととは同値である。

次節で例を挙げるが、一般に作用素 \mathcal{I}_f は compact operator とはならない。compact に至る例としては、Hölder 連続な導函数 f' を持つマルコフ型の変換の場合がある。ただし、

定義 有界区間 $J = [a, b]$ の連続な変換 f が単純マルコフ型であるとは、次のような分割 $C_0 = a < C_1 < \dots < C_n = b$ の存在することという。

- (i) 各部分区間 $[C_{i-1}, C_i]$ 上で、 f は単調。
 - (ii) 分点 C_i の f による像は再び分点 i.e. $f(C_{i-1}) < f(C_i)$
- f がマルコフ型とは、ある $p \geq 1$ に対して、 f^p が単純マルコフ

型であることをいう。(より詳しくは, p 重マルコフ型)

単純マルコフ型変換 f が分点 τ を結ぶ折線 Γ で定義されてい
れば, 条件

$$\mathcal{L}_f \left(\sum_i \alpha_i 1_{(c_{i-1}, c_i)} \right) = \sum_j \left(\sum_i L(f)_{ij} \alpha_j \right) 1_{(c_{i-1}, c_i)}$$

によって, 行列 $L(f) = (L(f)_{ij})$ を定義できる. ただし, \mathcal{L}_A は
集合 A の定義関数とする. この時, 次の性質は見易い.

$$4^{\circ}. (1) \quad D_f(z) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{Tr} L(f)^n \right\} = \det (I - zL(f))$$

ただし, 0 節 (4) の Q_n の定義において, 集合 $\{x; f^n x = x\}$
が無限集合となる場合は, その各連結成分を一点と見なして
和をとることとする.

(2). \mathcal{L}_f は compact 作用素で, 純点スペクトルをもち, その
固有値は, 0 及び $L(f)$ の固有値である. 従って, $D_f(z)$ は
作用素 \mathcal{L}_f の Fredholm 行列式 $\prod_{\lambda: \mathcal{L}_f \text{ の固有値}} (1 - z\lambda)$ と一致する.

p 重マルコフ型折線変換の場合も (1), (2) が成立する. こ
の事と, 次の自明な命題によって, 一般の f に対して $D_f(z)$
は \mathcal{L}_f の Fredholm 行列式 (に相当するもの) と考えらる.

命題. $f \in C^2$ 級の区分的変換, $f_n \in C^2$ 級のマルコフ型折線変
換とする. f_n が f に一様収束し, f'_n が f' に各点収束してい
れば, $D_{f_n}(z)$ は形式的中級数として, $D_f(z)$ に収束する.

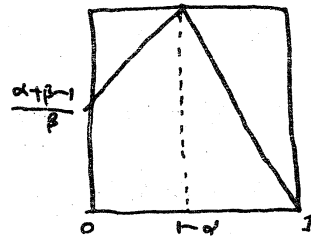
この命題によって, \mathcal{L}_f が固有値 1 をもつことと,

$D_f(1) = 0$ と, $P_f(1) = 0$ とが, ほぼ同値となることを予想される.

3. 単峰折線変換の場合.

$0 < \alpha < 1, \beta > 0, \alpha + \beta \geq 1$ として,

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \beta(x + \alpha + \beta - 1) & (0 \leq x \leq 1 - \alpha) \\ \alpha(1 - x) & (1 - \alpha \leq x \leq 1) \end{cases}$$



の形の写像 f , 単峰折線 (Unimodal Linear) 変換とす。これは [ITN] と詳しく研究され, 次のような性質をもつ. (cf. [T7])

UML 1 ([ITN])

(a) 絶対連続な不変測度の存在しないパラメタ (α, β) の範囲は, 次の集合 W_k の和集合である. ($k=1, 2, 3, \dots$)

$$W_1: \beta > 1, \quad W_2: \beta < 1, \alpha\beta > 1, \quad W_3: \alpha\beta^2 > 1, \alpha\beta(\alpha+\beta) > 1 \text{ etc.}$$

この時, $(\alpha, \beta) \in W_k$ とすれば, 安定な同期 k の同期軌道 \mathcal{C} が唯一存在し, a.e. x から出発した軌道は \mathcal{C} に近づく.

(b) 絶対連続な不変測度 $\mu_{\alpha, \beta}$ が存在するときは, その不変密度は, $\varphi_{\alpha, \beta}(x) \vee 0$ を規格化したものである. ただし,

$$\varphi_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^{p_n} \beta^{n-p_n} \mathbf{1}(x > f_{\alpha, \beta}^n 0)$$

$$p_n = \#\{0 \leq t < n; f_{\alpha, \beta}^t 0 > 1 - \alpha\}$$

(c) (α, β) が, W_k と隣接する領域 I_k ($k=3, 4, \dots$) に属している時, $\mu_{\alpha, \beta}$ の台は $[0, 1]$ 全体で, $([0, 1], f_{\alpha, \beta}, \mu_{\alpha, \beta})$ は混合的.

(d). $(\alpha, \beta) \in I_k, k \geq 3$ の時, $\mu_{\alpha, \beta}$ の台は k 個の区間 J_1, \dots, J_k に含まれる. $t \in \mathbb{Z}, J_i \cap J_j = \emptyset (i \neq j)$. $(\alpha, \beta) \in I_2$ の時には, $k=2^m (m \geq 1)$ の区間 J_1, \dots, J_{2^m} に含まれる. いづれの場合も, 各 $(J_i, f_{\alpha, \beta}|_{J_i}, \mu_{\alpha, \beta}|_{J_i})$ は混合的だが, $(\mathbb{I}, \mathbb{I}, f_{\alpha, \beta}, \mu_{\alpha, \beta})$ は単にエルゴード的である.

Remark. $(\alpha, \beta) \in W_k$ の場合 (a) は, R. May が窓 window を呼んだ現象の生じている場合である. (d) は $\mu_{\alpha, \beta}$ の台の様子から窓と呼ばれている現象である. 残る (c) は observable chaos.

UML 2 $D_{\alpha, \beta}(z) = D_{f_{\alpha, \beta}}(z)$ は以下の性質を持つ.

(i). $D_{\alpha, \beta}(z) = 1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \beta^{n-p_n} z^{n+1}$

(ii) $D_{\alpha, \beta}(\lambda) = 0$ なる λ は,

$$\gamma_k(\alpha) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \beta^{n-p_n} \lambda^n \mathbb{1}(z > f_{\alpha, \beta}^n 0) = \lambda \mathcal{I}_{f_{\alpha, \beta}} \gamma_k(\alpha)$$

(iii) $(\alpha, \beta) \in W_k$ の時, $P_i(f_{\alpha, \beta}) = -\frac{1}{k} \log \alpha \beta^{k-1} > 0 (k \geq 1)$.

そうでない時, $P_i(f_{\alpha, \beta}) = 0$.

(iv). $(\alpha, \beta) \in I_k$ の時, $\#\{z; |z|=1, D_{\alpha, \beta}(z)=0\} = \begin{cases} k & (k \geq 3) \\ 2^m & (k=2) \end{cases}$

また, $(\alpha, \beta) \notin \cup W_k \cup \cup I_k$ の時,

$$D_{\alpha, \beta}(z) = 0, z \neq 1 \Rightarrow |z| > 1.$$

(v). $f_{\alpha, \beta}$ がマルコフ型 $\iff D_{\alpha, \beta}(z)$ が有理函数

(vi) $f_{\alpha, \beta}$ がマルコフ型でない $\iff D_{\alpha, \beta}(z)$ は自然境界を持つ中級数.

証明は, (ii), (iii), (iv) は直接計算による. マルコフ型の時の主張 (v), (i) はよきから. (vi) は Hadamard の meromorphic radius の計算による. 残りの中で本質的部分は, マルコフ型の時による近似の方法である.

この結果は, 冒頭に述べた, $P_1(f)$ あるいは, $D_f(z)$ の性質によって, 単峰折線変換のカオスに関連する問題が, 不変密度の存在のみならず台の数もこめて, 見事に分類されることを示している.

なお, (vi) は, (ii) と合わせれば, 作用素 $\mathcal{I}_{f,\beta}$ の固有値が, 0 でない集積点をもつことを意味している. 従って, とくに, \mathcal{I}_f は compact operator ではない.

最後に, 位相的レベルの結果 ($P_0(f) \geq 0$) と比較すれば, 次元の変換の場合でも, observable chaos の問題は複雑な様相をもっていることに注意しておく. さらに, [ITN] によれば, 各 W_k 内にパラメタの取るとき, $\text{ent}(f_{k,0})$ は一定値をとることが知られている ($k \geq 3$) 逆に言えば, 島, 窓のような, $D(f)$ のことばで言えば普通 (2 の 1/4 1 の固有値) でない現象は, $\text{ent}(f)$ が flat な領域のみで生じている. これは, 一般のカオス系に対して予想できよう. この予想を象徴的に書けば,

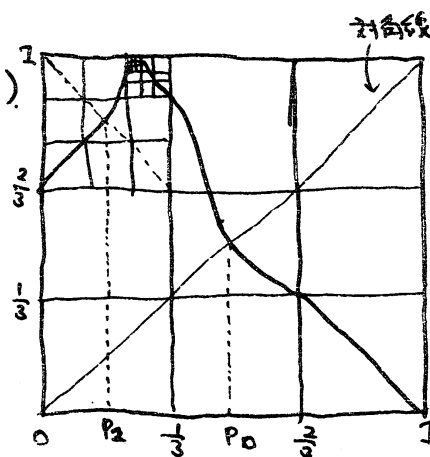
$$\delta[\text{ent}(f)] \neq 0 \Rightarrow P_1(f) = 0.$$

4. 不変な Cantor set

以下の例は、少くとも筆者には、 C^2 級の区間の変換に対して、実際に成立しているかどうかはあまりかではない。(少くとも、連続で、一点を除いて C^0 級となる例はあるが。)しかし、一つには、少くとも、滑らかな変換族の極限として、臨界的な現象の起る場合に相当すること、他方、高次元の変換から、例えば、Poincaré 写像、Lorenz plot 等の手法その他によって、一次元に帰着させた変換は、ほとんどのものが滑らかでなくとも、区分的な滑らかさしか保証できないことから、考察の対象に含めざるを得ない。

例 1. (2 中周期をすべて持つ例)

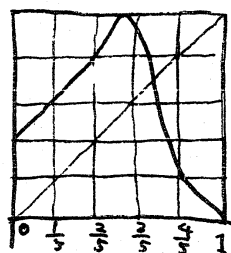
右図のように、区間 $J = [0, 1]$ を三等分し、 $[\frac{2}{3}, 1]$ では逆対角線と一致させ、 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ では、 $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{7}$ として滑らかな曲線で結ぶ。 $[0, \frac{1}{3}]$ は、さらに三等分して、同様の手法



でグラフを定め、これを無限回くり返してグラフ f を作る。この時、 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ 上の曲線が適当な条件を満たせば、この中に唯一つの不動点 P_0 をもち、 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ 以外の任意の点の軌道は、いつか、 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ の外に出て、再び戻らないようにできる。さらに、この時、 $f'(P_0) < -1$ は任意に選べる。次に、 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ 内

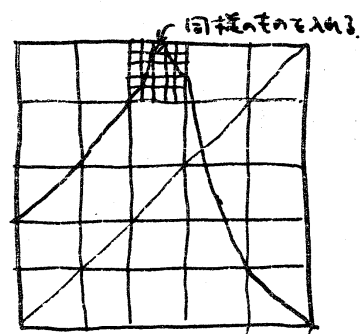
に、同期2の同期点 p_2 が唯一つ入るようにとし、 $f(p_2) > 1$ は任意に選べ、 $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $x \neq p_2$ から出発する軌道は、ある時刻以後、再び $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ に戻るといえる。これをくり返せば、各 $m=0, 1, 2, \dots$ に対して、唯一つの同期2^mの軌道 $\{p_m\}$ をもち、これらの同期軌道に属さない点の軌道は、古典的な Cantor 集合 $C = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}; a_n = 0 \text{ 又は } 2\}$ に以下近づくことができる。さらに、 $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$, $[0, \frac{1}{3}]$ etc. とづらうのが傾き増えたとことから、 C 上の一様測度 μ は、この変換 f の漸近測度である。ゆえに、observable chaos の観点から、この系の性質は、 μ のみによって定まる。一方、 $f(p_m)$ は任意性があった ($m \geq 0$) から、 $D_f(x)$ は、任意性をやほりませ、とくに、 $P_i(f)$ は、任意の値 ≤ 0 をとることができる。一方で、 f を C 上に制限して、不変測度 μ をユミにして得らぬ系 (C, f, μ) は、エルゴード的で、弱混合でなく、エントロピーが0である。ゆえに、変分原理が成立しない場合がある。また、 $P_i(f)$ は、漸近測度 μ の情報を全く与えていない。この意味では、冒頭に述べた approach の反例として致命的である。ただし、 f の有界性を仮定すれば、 $P_i(f) = 0$ となり、我々の枠組みからは許されていないものと考えてよい。

例2. (無限重の島) 次頁の左側の図は島が3つ生じてい



3例である。(島は, $[0, \frac{1}{5}]$, $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$, $[\frac{4}{5}, 1]$)
 $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{4}{5}$ かつ $f(x) \leq \frac{4}{5}$ の時, $|f'(x)| \geq c > 1$ なら
 ば, $[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}] \cup [\frac{2}{5}, \frac{4}{5}]$ から出発したほとん
 どすべての軌道が, この2つの区間の和が

5 以下であることはきろかである。
 5×5 の小正方形の中の中央上部のキ
 のに(左右逆の)同様のグラフをほめ
 こんでいくと, 右図のようになるグラフが
 できる。このとき, 3つの島それぞれ
 の中に3つの島が無限に入っている。この場合現れる Cantor
 集合は, $C = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n}; a_n = 0, 2, 4\}$ であり, この上の一
 様測度 μ は漸近測度となる。再び C の外の同期軌道 ^{$D(x)$ の}の密着に
 任意性がなるので, 前例と同様の状況が生じうる。この場合
 も, f' の有界性を仮定すれば, $P_1(f) = 0$ となる。



5. 主定理について.

証明については, [T1] に(間接的に証明されている場
 合もあるが)述べてあるので省略. 定理4は不十分なキなので
 f が2級という仮定で十分なキのと予想される. 定理2は,
 同じ仮定の下で, 「 $P_1(f) = 0$ ならば漸近測度が存在する, ...」
 とまった形に強いらぬ可能性を残している. 定理3も同様

に不十分であるが、変分原理が (3) の $\sup = P(f)$ の形) 成立して平衡測度 (\sup を与える μ) の存在しない例は構成できる。また, Cantor set が不変集合 (さらに強く, attractor) になる場合に対応して,

$$P(f) < 0 \Rightarrow \text{Cantor attractor の存在}$$

は予想される。

文献 (直接引用したもののみ)

[ITN]. On Unimodal Linear Transformations and Chaos I, II.
(Sh. Ito-S. Tanaka-H. Nakada) Tokyo J. Math. vol. 2. (1979) pp 221-

[T7]. カオス, 同期点, エントロピー — 一次元力学系のエルゴード理論, 日本物理学会誌 vol. 35 no. 2 (1980). p149-

[T1]. 区間力学系のカオスと同期点, 都立大学数学教室セミナー報告.

Y. Oono-Y. Takahashi, Chaos, External Noise, and Fredholm Theory
to appear.

最後に, この報告は, 大野克嗣氏(九大) との共同研究をもとに進展したものであることを書きとめておく。森肇先生(九大) から多くの助言と encouragement を頂いた。深く感謝している。また, 江沢・長谷川両先生をはじめとする物理の方々の接触の機会を organize された方々に感謝している。