数理解析研究所講究録
第405巻 1980年 215-232

Hopf-Cole変換の拡張と一般化されたランダム・ウォーク

東北大 工　原 啓明

従来のHopf-Cole変換をさらに拡張修正することによって,"制御過程"の入った一般化されたランダム・ウォーク(Generalized random walks=GRW)を,通常のランダム・ウォークの形に変換出来ることを示す。又GRWの非線型漸化式を連続化して得られた非線型微分方程式が,線形に変換出来ることも示す。

§7 まとめ

文献

§1 序

近年,非線型非平衡の統計力学は我々に,いろいろな分野におけるプロセスを一般的な見方でとらえる一つの枠組は,確率過程論であると云う事を教えている。[1] なかでも,ランダム・ウォークの理論はこれまで,種々の分野で使われて来た事は周知である。[2] 又その数学的基礎づけも行われている。[3] この理論の利点の一つは,その漸化式におけるパラメータや関数の役割を適当にプロセスに応じて変えれば,そのプロセスの時間発展が記述可能となることである。事実,物理の問題に限っても,高分子の問題,格子グリーン関数等に良く使われている。しかし,これまでの理論では Montroll達[4] の,各ステップの時間間隔を $t_1, t_2, \cdots, t_n \cdots$ と適当な分布でとり入れる方法以外は,ランダムと云う言葉が表わす様にマルコフ過程として取扱われていて,各ステップ間の"記憶"は明確な形でとり入れられていない。

本稿では,まずプロセスに"記憶"や"制御"の概念を導入し,このプロセスを,物理以外の種々な系ではむしろ離散的に取扱われていることを考えて,連続化しないで議論する。次に§2では,本

稿で使う,ランダム・ウォークの拡張したものを紹介する。この拡張した"一般化されたランダム・ウォーク"を以下ではGRWと略記する。§3ではGRWのプロセスを表わす非線型漸化式を直接変換して,通常のランダム・ウォークにするHopf-Cole変換を差分型に修正した形を与える。§4では§3のランダム・ウォークの漸化式の形式解を積分形で求める方法を述べる。§5ではGRWの漸化式を連続化して,非線型Fokker-Planck方程式の拡張を行う。§6では,Hopf-Cole変換を拡張した関数で§5の非線型方程式を線型にする。最後に,以上の議論のまとめを行う。

§2 一般化されたランダム・ウォーク(GRW)

拡張される概念を明確にするために,まず通常のランダム・ウォークの漸化式を考える。Nステップ後に位置mに来る確率を$W(m,N)$とすると,このプロセスは

$$W(m,N) = pW(m-1,N-1)+qW(m+1,N-1) \tag{2.1}$$

で記述される。p, qは前のステップで位置$m\mp1$からmへジャンプする確率である。p, q, m及びWを3次元に拡張し,p, qを格子間のジャンプに限定すれば格子グリーン関数が議論出来る[4)]。

以下では(2.1)を非線型非平衡の系に適用する目的で,次の点で拡張する。

(I) プロセスに"記憶"を入れて非線型にする。[5]

(II) ウォーカーの"モード"を通じて環境との結合を取入れる。[6]

本稿では以下の変換で考えるプロセスは(I)の記憶の代りに"制御"が取入れられた場合に限る。(I)(II)はA-B合金系等の二要素以上から成る系へのモデルとなる複数ウォーカーの場合にも拡張出来る。

2.1 記憶過程

考える過程は(I)の意味で拡張した次式で記述されるプロセスである。

$$W(m,N)=\tilde{P}^{+}_{N-1}(m|m-1)\,W(m-1,N-1)+\tilde{P}^{-}_{N-1}(m|m+1)\,W(m+1,N-1)+\tilde{R}_{N-1}(m)\,W(m,N-1) \tag{2.2}$$

ここで、$\tilde{P}^{\pm}_{N-1}$ は (2.1) の P, q に相当する量，$\tilde{R}_{N-1}$ は m に止っている確率であり、次の規格化条件を満足する。

$$\tilde{P}^{+}_{N-1}(m+1|m)+\tilde{P}^{-}_{N-1}(m-1|m)+\tilde{R}_{N-1}(m)=1 . \tag{2.3}$$

(2.3)から (2.2)の m 和，$\Sigma_m W(m,N)$，は保存されることが分かる。ところで，プロセスに記憶を導入する方法として上記の $\tilde{P}^{\pm}_{N-1}$，$\tilde{R}_{N-1}$ を通じて行う。[5] 即ち記憶は一般には

$$\tilde{P}^{\pm}_{N-1}(m\pm1|m)=g_{\pm}(\tilde{P}^{\pm}_{N-2},\tilde{R}_{N-2},\cdots\ \tilde{P}^{\pm}_{1},\tilde{R}_{1}) \tag{2.4a}$$

$$\tilde{R}_{N-1}(m) = g_R(\tilde{P}^{\pm}_{N-2}, \tilde{R}_{N-2}, \cdots \tilde{P}^{\pm}_1, \tilde{R}_1) \tag{2.4b}$$

なる関数 $g_{\pm}$, g_R によって特徴づけられる。 この g_{α} ($\alpha = \pm, R$) は図1に示す様な経路の依存性を表わすものとして理解される。

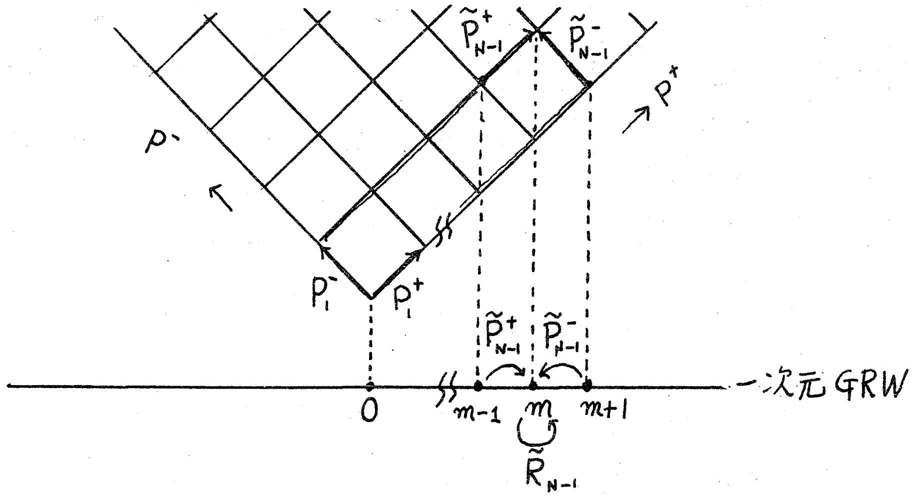

図1 経路依存性を持つGRW

g_{α}のモデルとして

$$\tilde{P}^{\pm}_{N-1}(m|m\mp1) = P^{\pm}_0 \pm \frac{b}{2} W(m\mp1, N-2) \tag{2.5}$$
$$\tilde{R}_{N-1}(m) = R_0$$

とおけば右辺の第二項を通じてプロセスに"記憶"が入って来る。(2.5)を(2.2)に代入した漸化式を連続化するとこの式は一次元乱流のBurgers方程式[7]と同形になる。 この時の"記憶"の効果は、この方程式の特性曲線で調べることが出来る。[5] 又この式はHopf-

Cole変換によって,線型のFokker-Planck (FP)方程式になる。

2.2　制御過程

ある系では,時間発展を考える場合,これからジャンプする位置の状態によって,$\tilde{P}_N^{\pm}$, $\tilde{R}_N$が左右されるプロセスが重要となることがある。たとえば,酵素反応においてMichaelis-Mentenの表式からの"ずれ"の一部は,この種の効果によって説明出来る。この制御過程は,一般に

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{N-1}^{\pm}(m\pm 1|m) &= h_{\pm}\left(\tilde{P}_{N-1}^{\pm}(m|m\pm 1),\ \tilde{R}_{N-1}(m\pm 1)\right),\\ \tilde{R}_{N-1}(m) &= h_R\left(\tilde{P}_{N-1}^{\pm}(m|m\mp 1),\ \tilde{R}_{N-1}(m\pm 1)\right),\end{aligned} \tag{2.6}$$

と書ける。(2.5)に対応する制御のモデルとして

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{N-1}^{\pm}(m\pm 1|m) &= P_0^{\pm} \pm \frac{f}{2} W(m\pm 1, N-1),\\ \tilde{R}_{N-1}(m) &= R_0 - \frac{f}{2}\left[W(m+1, N-1) - W(m-1, N-1)\right]\end{aligned} \tag{2.7}$$

を考えることにする。各右辺の第一項は定数で,第二項,第三項に制御の効果が入っている。fはこの効果の大きさを表わすパラメーターである。(2.7)を模式的に描くと図2の様になる。

以上の記憶過程と制御過程では着目するウォーカーは一人であったが,図3に示す様に複数のウォーカーを考え,お互に相関を持つプロセスも考えることが出来る。[6] この場合,(2.2)は,さらに添

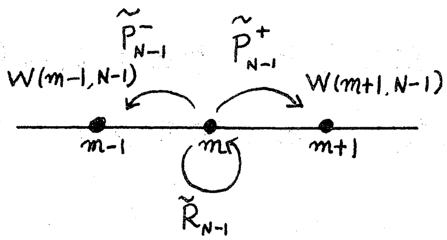

図2. W(m±1,N-1)で制御されたジャンプ

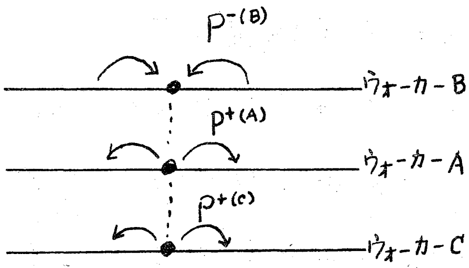

図3. 複数ウォーカー

字をつけた漸化式になり,その時の記憶と制御はジャンプする確率によって次表の様に区別出来る。又,この時の添字は一人のウォーカーの"モード"としても解釈出来る。

表 1

記憶過程	$\tilde{P}^{\pm(i)}_{N-1}(m\mid m\mp1) = P^{\pm(i)}_0 \pm \frac{1}{2}\sum_j B^{(i,j)}_{N-1} W^{(j)}(m\mp1, N-2)$ $\tilde{R}^{(i)}_{N-1}(m) = R^{(i)}_0$
制御過程	$\tilde{P}^{\pm(i)}_{N-1}(m\mid m\mp1) = P^{\pm(i)}_0 \pm \frac{1}{2}\sum_j F^{(i,j)}_{N-1} W^{(j)}(m, N-1)$ $\tilde{R}^{(i)}_{N-1}(m) = R^{(i)}_0 - \frac{1}{2}\sum_j F^{(i,j)}_{N-1} W^{(j)}(m+1, N-1) + \frac{1}{2}\sum_j F^{(i,j)}_{N-1} W^{(j)}(m-1, N-1)$

§3 Hopf-Cole変換の拡張

一次元乱流を記述するBurgers方程式[7]がHopf-Cole変換[8]

によって線型の拡散方程式になることは良く知られている。ここではこのHopf-Cole変換の関数形を少し修正して，前節2.2のGRWの特別なものが線型漸化式で表わされた通常のランダム・ウォークになることを示す。

出発するGRWの漸化式は，(2.7)を(2.2)に代入した式

$$W(m,N)=\left(P_0+fW(m,N-1)\right)W(m-1,N-1)$$
$$+\left(P_0-fW(m,N-1)\right)W(m+1,N-1)+R_0W(m,N-1). \quad (3.1)$$

である。$P_0=P_0^{\pm}$で，このときの規格化条件(2.3)は，$2P_0+R_0=1$となる。(3.1)を書きかえるために次の差分演算子を導入する。

$$\Delta_N^- W(m,N)=W(m,N)-W(m,N-1)$$
$$\begin{pmatrix}\Delta_m^+\\ \Delta_m^-\end{pmatrix}W(m,N)=\begin{pmatrix}W(m+1,N)-W(m,N)\\ W(m,N)-W(m-1,N)\end{pmatrix} \quad (3.2)$$

この差分演算子を使って書きかえた(3.1)は，Hopf-Cole変換を拡張修正した

$$\tilde{W}(m,N)=e^{\frac{\beta m}{2P_0}}\,e^{-\frac{f}{P_0}\sum_{k}^{m-1}W(k,N)} \quad (3.3)$$

（βは小さいパラメーターでβ^2は無視する）

によって

$$\Delta_N^+ \tilde{W}(m,N) + \frac{\beta}{2}(\Delta_m^+ + \Delta_m^-)\tilde{W}(m,N) - P_0 \Delta_m^+ \Delta_m^- \tilde{W}(m,N) = 0 \qquad (3.4)$$

さらに,$N \to N-1$と置きかへて漸化式の形にもどすと

$$\tilde{W}^*(m,N) = (P_0 + \frac{\beta}{2})\tilde{W}^*(m-1,N-1) + (P_0 - \frac{\beta}{2})\tilde{W}^*(m+1,N-1)$$
$$+ R_0 \tilde{W}^*(m,N-1) \qquad (R_0 = 1-2P_0) \qquad (3.5)$$

となる。ここで

$$\tilde{W}^*(m,N) = \tilde{W}(m,N)/e^M, \quad (M:\text{定数})$$
$$e^M \equiv \sum_m e^{\frac{\beta m}{2P_0}} e^{-\frac{f}{P_0}\sum_k^{m-1} W(k,N)} \qquad (3.6)$$

である。従って,$P_0 \pm \frac{\beta}{2} = P^{\pm}(m|m\mp1)$, $R_0 = R(m)$とおけば,(3.6)は通常のランダム・ウォークの漸化式となる。

以上の変換は複数ウォーカーの場合に対しても適用することが出来る。その時の変換式は

$$\tilde{W}^{(i)}(m,N) = e^{\frac{\beta^{(i)} m}{2P_0^{(i)}} - \frac{1}{2P_0^{(i)}}\sum_j F^{(i,j)} \sum_k^{m-1} W^{(j)}(k,N)} \qquad (3.7)$$

である。ここでi,jはi,j番目のウォーカーを表わす。$F^{(i,j)}$はi番目とj番目のウォーカーの相関を表わすパラメーターである。

§4 ランダム・ウォークの形式解

前節の変換によって，あるGRWは通常のランダム・ウォークに変形出来る事が分った。ここでは，この時の形式解を得る方法を述べる。そのため(3.1)よりもう少し一般化した次の漸化式から出発する。

$$\widetilde{W}^*(m,N)=P^+_{N-1}(m|m-1)\widetilde{W}^*(m-1,N-1)+P^-_{N-1}(m|m+1)\widetilde{W}^*(m+1,N-1)$$
$$+R_{N-1}(m)\widetilde{W}^*(m,N-1). \qquad (4.1)$$

初期条件，境界条件として次の場合を考えることにする。

$$\widetilde{W}^*(z_0,0)=1,\quad \widetilde{W}^*(m,0)=0,\ (m\neq z_0)$$
$$\widetilde{W}^*(\pm L,N)=0, \qquad (4.2)$$

(4.1)の形式解を

$$\widetilde{W}^*(m,N)=\int_{-\infty}^{\infty}G_N(m,z)\,V_N(z)\,dz\ ,\quad (N\neq 0) \qquad (4.3)$$

$$G_N(m,z)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\alpha\pi N}}\ e^{-\frac{1}{\alpha N}(m-z)^2}, & (N\neq 0,\ |m|<L),\\[2ex] 0, & (N\neq 0,\ |m|=L),\end{cases} \qquad (4.4)$$

とおくと，未知関数 $V_N(z)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty}V_N(z)\,dz=1 \qquad (4.5)$$

と規格化され，Nはパラメーターである。(4.3)を(4.1)に代入して，Nが大きいとしてG_{N-1}を展開すると，次式を得る。

$$\int G_N(m, z)\left[V_N(z) - \left\{(S^+ + S^- + S^0) + \frac{\partial}{\partial z}(S^+ - S^-) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(S^+ + S^-)\right\}V_{N-1}(z)\right]dz \tag{4.6}$$

ここで

$$\begin{aligned} S^{\pm} &= P^{\pm}_{N-1}(m|m\mp 1)\, e^{-\frac{1}{\alpha N^2}(m\mp 1 - z)^2}\, e^{\frac{1}{2N}+\frac{1}{4N^2}}, \\ S^0 &= R_{N-1}(m)\, e^{-\frac{1}{\alpha N^2}(m-z)^2}\, e^{\frac{1}{2N}+\frac{1}{4N^2}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

である。結局，未知関数$V_N(z)$は部分積分によって得られた

$$\Delta^+_N V_{N-1}(z) + \left\{(1-(S^+ + S^- + S^0)) + \frac{\partial}{\partial z}(S^+ - S^-) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(S^+ + S^-)\right\}V_{N-1}(z) = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\left(V_0(z) = \delta(z - z_0)\,, \quad V_{N-1}(\pm\infty) = 0 \right)$$

によって決まる。$\Delta^+_N V_{N-1}$を$\partial V_{N-1}(z)/\partial N$，$P^{\pm}$，$R$をそれぞれ定数$P^{\pm}_0$，$R_0$で近似すると，(4.8)は

$$\frac{\partial V_{N-1}(z)}{\partial N} + (P^+_0 - P^-_0)\frac{\partial}{\partial z}V_{N-1}(z) - \frac{1}{2}(P^+_0 + P^-_0)\frac{\partial^2}{\partial z^2}V_{N-1}(z) = 0, \tag{4.9}$$

となり，この時の$V_N(z)$は

$$V_N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi BN}}\, e^{-\frac{(z+AN-z_0)^2}{2BN}}, \tag{4.10}$$

$$(A = P^+_0 - P^-_0\,, \quad B = P^+_0 + P^-_0)$$

と求まり, 結局(4.1)の解は

$$\tilde{W}^*(m,N) = \sqrt{\frac{1}{N(\alpha+2B)\pi}}\, e^{-\frac{1}{(\alpha+2B)N}[m-(z_0-AN)]^2} \quad (4.11)$$

となる。

§5 一般化されたランダム・ウォークの連続化

前節まではGRWを漸化式のままいわば離散値のままで考えたがここでは連続変数を導入して(2.2)におけるW, $\tilde{P}^\pm$, $\tilde{R}$に対する連続関数を対応させた次式から出発する。

$$w(x,t) = \tilde{P}^+(x-a,t-t_0)w(x-a,t-t_0) + \tilde{P}^-(x+a,t-t_0)w(x+a,t-t_0)$$
$$+\tilde{r}(x,t-t_0)w(x,t-t_0) \quad (5.1)$$

ここで記憶過程(2.5)の場合, $\tilde{P}^\pm$, $\tilde{r}$は

$$\tilde{P}^\pm(x\mp a,t-t_0) = P^\pm(x\mp a,t-t_0) \pm \frac{b}{2}w(x\mp a,t-t_0)$$
$$\tilde{r}(x,t-t_0) = r(x,t-t_0) \quad (5.2)$$

である。同様に,制御過程(2.7)の場合も対応する式を書き下せる。以下では記憶過程のみを考える。連続変数x, tは次式で定義されたものである。

$$x = am, \quad t = t_0N, \quad (a:\text{単位歩巾}, \ t_0:\text{単位時間}), \quad (5.3)$$

(5.1)で $a, t_0 \to 0$ として, t_0^2, $a^2 b$, $t_0 b$ を無視してTaylar展開すると

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(K_1 + bw)w + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_2 w) - \frac{a^2}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}(K_1 w)$$

$$+ t_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(K_1 w)$$

$$\equiv \hat{L}_{GRW}(K_1, K_2, b, a, t_0) w \qquad (5.4)$$

$$K_n = \frac{a^n}{t_0}(p^+ + (-1)^n p^-), \qquad (5.5)$$

となる。(5.4)の右辺の第二項までとったものは非線型のFokker-Planck方程式と見なせる。そしてこの場合はHopf-Cole変換によって線型のFokker-Planck方程式になる。[5] (5.4)で注意すべきことは,(5.5)の $p^\pm$,或いは r, 即ち K_1, K_2 に“ある関係式”を設定しなければ(5.4)ではプロセスを指定したことにはならないと云う事である。

以上の議論では,$\tilde{p}^\pm, \tilde{r}$ として(5.2)の場合を考えたが(2.7)に対応する制御過程に対しても,同様の連続化が行なわれる。又(5.4)で記述されるプロセスは従来の拡散過程よりも,詳細なプロセスを議論したい場合に有効であろう。

§6 変換による線型化

本節では,(5.4)が線型のFokker-Planck方程式に変換出来る

場合の条件を，$P^{\pm}$，即ちモーメントによって調べる。

このために，(5.4)と係数因子を別にすれば類似の項から成る次の非線型微分方程式を考えよう。

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[M_1^0 + \alpha M_2^0 w\right] w + M_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_\alpha^0 M_2^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

$$+ K_\alpha^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$$

$$\equiv \hat{L}_{M^0}(M_1^0, M_2^0, \alpha, \beta)\, w\,, \quad \left(K_\alpha^0 = \frac{\beta}{\alpha}\right). \qquad (6.1)$$

ただし M_1^0 は $O(\varepsilon)$, α は $O(\varepsilon)$, M_2^0 は $O(1)$, そして β は $O(\varepsilon^2)$ の定数とする。

(6.1) は Hopf-Cole 変換を拡張した

$$\tilde{w}(x,t) = e^{-\alpha \int^{x} w(x',t)dx'}\, e^{\beta w(x,t)} \qquad (6.2)$$

$$(\alpha, \beta > 0)$$

によって $O(\varepsilon^2)$ を無視すれば次の線型 Fokker-Planck 方程式の形になる。

$$\frac{\partial \tilde{w}(x,t)}{\partial t} = -M_1^0 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + M_2^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \qquad (6.3)$$

(6.1)の $w(x,t)$ と (6.3)の $\tilde{w}(x,t)$ との関係は (6.2)より

$$-\alpha w(x,t) + \beta \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln \tilde{w}(x,t) \qquad (6.4)$$

即ち，

$$w(x,t) = e^{\frac{\alpha}{\beta}x}\left\{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial \ln \tilde{w}(x',t)}{\partial x'}\right)e^{-\frac{\alpha}{\beta}x'}dx' + w(x_0,t)\right\} \quad (6.5)$$

と求まる。又(6.1)の解 $w(x,t)$ の正値性[9]は，(6.5)の右辺は $\beta\to 0$ で大きな値になることに注意して，被積分関数のオ一項，$\partial \ln\tilde{w}/\partial x'$，オ二項，$w(x_0,t)$ を $\beta\to 0$ の極限値でおきかえると

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \ln \tilde{w}}{\partial x} = w(x,t) \quad , \quad (\beta\to 0) \qquad (6.6)$$

となり，w と $\tilde{w}$ との関係は従来の Burgers 方程式と Hopf-Cole 変換の関係で正値性は保障される。[10] 従って(6.5)の右辺は近似的に正値性が示せる。

次に(6.1)における M_n^0, $(n=1,2)$ が x の関数になった場合を考える。[ただし，$M_1(x)\sim \varepsilon x$，$\beta(x)$ は $O(\varepsilon^2)$ の関数，$M_2(x)$ はゆっくり変る $O(1)$ の関数，α は $O(1)$ の定数とする。] その非線型微分方程式は

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[M_1 + \lambda M_2 w\right]w + \frac{\partial^2}{\partial x^2}M_2 w - \frac{\partial}{\partial x}\left[M_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_\alpha w\right]$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}K_\alpha w$$

$$\equiv \hat{L}_M(M_1,M_2,\alpha,\beta)\,w \quad , \quad (K_\alpha = \beta(x)/\alpha) \qquad (6.7)$$

である。この式は次の変換

$$\tilde{w}(x,t) = e^{-\alpha\int w(x',t)dx' + \beta(x)w(x,t)} \qquad (6.8)$$

によって

$$\frac{\partial \tilde{W}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(M_1\tilde{W}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(M_2\tilde{W}) \tag{6.9}$$

となる。$\tilde{w}$ と w との関係は(6.8)より

$$w(x,t) = e^{\alpha\int^{x}\frac{1}{\beta}dx'}\left\{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial \ln\tilde{w}}{\partial x'}\right)e^{-\alpha\int^{x'}\frac{1}{\beta}dx''} + w(x_0,t)\right\} \tag{6.10}$$

と求まる。

(6.1)の場合と同様近似的に上式の $w(x,t)$ の正値性が示せる。

以上の準備をして(5.4)がどんな条件で線型に変換出来るかを,(6.7)と(5.4)を比較することによって調べる。

GRWのプロセスから導かれた(5.4)において,$\tilde{P}^{\pm}$,a,t_0 で決まるモーメント K_1,K_2 及び b が次の条件を満す場合,即ち,

(I) $K_1 = M_1$, $K_2 = 2M_2$,

(II) $b = \alpha M_2$, $\frac{a^2}{3!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_1 w) = M_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_\alpha w)$, $t_0 K_1 = K_\alpha$

が満されるときは(5.4)は,(6.7)と同等になり,変換(6.8)によって(6.9)の形になる。

条件(I)は(6.7)の M_n を(5.4)における $P^{\pm}$ で決まったモーメントと見なすことを意味する。条件(II)の第一の関係は記憶を表わす因子 b は,二次のモーメントとの間に"ある関係"があることを示し,第二の関係と(I)の $K_2 = 2M_2$ によって K_α は,一次と二次のモーメントの関係を規定していることが分る。この様に(II)はGRW

に対する"一種の散逸揺動定理"とも考えることが出来よう。

§7 まとめ

以上，Hopf-Cole変換を拡張修正した式 (3.3)，(6.2) 及び (6.8) を使って，非線型から線型へ変換出来る一般化されたランダム・ウォークのプロセスを議論した。この変換が可能となるためには，プロセスにおいてジャンプを表わす確率，$\tilde{P}^{\pm}$，$\tilde{r}$ の間には，"ある種の関係"が必要であることを，離散値の場合と連続値の場合について調べた。離散値の場合は，§2 で一般論を述べ，§3では，非線型漸化式を，Hopf-Cole 変換を拡張した離散関数によって線型漸化式に変換した。§4ではこの通常のランダム・ウォークを表わす線型漸化式の解法を述べた。§5，§6 では一般化されたランダム・ウォークを連続化して得られる従来の非線型 Fokker-Planck方程式を更に高次の項まで考える場合に必要となる，Hopf-Cole 変換の拡張と，変換出来るための条件を調べた。しかし，この時の解の正値性は，近似的に示した。

文献

1) 久保亮五：数理科学講究録，<u>367</u> (1979)，50

2) S. Chandrasekhar : Proc. Phys. Soc. <u>58</u> (1946)，321

3) F. Spitzer : Principle of Random Walk, Springer (1976)

4) E. W. Montroll and G. H. Weiss : J. Math. Phys. 6 (1965), 167

5) H. Hara : Phys. Rev. B20 (1979), 4096

H. Hara : Z. Physik B36 (1980), 369. [この論文の (2.3), (3.3), $\tilde{P}^{+}_{\{N-1\}}(m|m-1)+\tilde{P}^{-}_{\{N-1\}}(m|m+1)=1$ は $\tilde{P}^{+}_{\{N-1\}}(m+1|m)+\tilde{P}^{-}_{\{N-1\}}(m-1|m)=1$ が正しい。]

6) H. Hara and S. Fujita : Z. Physik B32 (1978), 99

H. Hara : Z. Physik B32 (1979), 409

7) J. M. Burgers : Proc. Acad. Soc. Amsterdam 53 (1950) 247

細川　巌 : 数理科学講究録 367 (1979), 232

8) E. Hopf : Commun. Pure. Appl. Math. 3 (1950), 201

J. D. Cole : Appl. Math. 9 (1951), 225.

9) この正値性に関する注意は講演の際上野正先生にご指示をいただいた。

10) Ref. 8) 又は亀高惟倫 : 非線型偏微分方程式, 産業図書 (1977).