

非線型の模型におけるオーダーパラミタの非線型緩和

東北大, 工, 原子核研究センター - ユーリッヒ, 物性研

山崎義武, R. Bausch, H. K. Janssen

§1. 序 等方的 n 成分スピン系のオーダーパラミタの緩和を低温領域で調べる。この系は絶対零点 ($T=0$) での Goldstone モードと臨界温度 ($T=T_c$) での臨界揺動の出現によって特長づけられる。共存線 (磁場 $H=0$) に沿ったこの系のオーダーパラミタの垂直帯磁率は非指数関数的な減衰を示す。我々は低温領域 ($T < T_c$) で、はじめ外部磁場 H で一様に磁化してから、時刻 $t=0$ でこの磁場を switch off した後、この系のオーダーパラミタの非線型緩和過程を調べる。その際、非線型のモデルの立場で、低温展開と $2+\epsilon$ 展開のクリコミ群の方法を用いて零温度と臨界温度で現われる二つのモードの寄与がふしく考慮出来るように工夫する。更に、単純に $2+\epsilon$ 展開のクリコミ群の方法を用いただけでは、共存線に沿った垂直帯磁率の表式が得られないので、帯磁率に対するクリコミ群の式を用いて所望の非線型緩和の表式を導出する。

§2. 緩和型非線型 σ 模型 等方的 n 成分スピン $S (\equiv \{S_\alpha\}, \alpha = 1, 2, \dots, n)$ が非保存のオクターパラミタである場合を考える。その最も簡単な動的模型として, Langevin 力 $\zeta (\equiv \{\zeta_\alpha\}, \alpha = 1, 2, \dots, n)$ を受けた次のモデルで考える:

$$\dot{S} = \alpha_t S + \lambda \delta H / \delta S \quad (2.1); \quad H\{S\} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\nabla S)^2 - h \cdot S \right\}. \quad (2.2)$$

α_t は時間微分 $\partial/\partial t$ を, λ は Onsager 係数を, H は時間的に変化する外部磁場 h が印加された系のハミルトニアンを意味する。 h としては単位スピノール $u_\alpha (u^2=1)$ を用いて $h_\alpha(t) = h(t) u_\alpha$ で表わせる場合を考える。 n 成分スピン系では, 各格子点のスピンは $S^2 = \sum_{\alpha=1}^n S_\alpha^2 = 1$ の関係をみたすので, この静的拘束条件を時間微分した $S \cdot \alpha_t S = 0$ が動的拘束条件として働く。Langevin 力は Gaussian white noise であると仮定する。この ζ についてのガウス分布は ζ について二次形式になっていて取り扱い難いので, 補助的な場 (\hat{S} では, 応答場と呼ぶ) \hat{S} を導入して恒等的に線型変換すると次の weight functional が得られる:

$$P\{\hat{S}, S\} = \prod_t [\delta(S^2(xt) - 1) \delta(\hat{S}(xt) \cdot S(xt))] \exp[-J\{\hat{S}, S\}], \quad (2.3)$$

$$J\{\hat{S}, S\} = \frac{1}{T} \int dx dt \left\{ \lambda \hat{S}^2 + i \hat{S} \cdot [\alpha_t S + \lambda \frac{\delta H}{\delta S}] \right\}. \quad (2.4)$$

二つの δ -関数は静的動的拘束条件である。 $P\{\hat{S}, S\}$ は $S_\alpha \rightarrow \sum_\beta (\delta_{\alpha\beta} - S_\alpha S_\beta) S_\beta$ の置換に対して不変なので, Langevin 力は垂直方向にのみ働く。

以下では t'Hooft & Veltman の dimensional regularization の方法を用いて次元 $d = 2 + \epsilon$ での発散を取り除く。スピンの縦成分 $\sigma = S \cdot u$ と $\hat{\sigma} = \hat{S} \cdot u$

を、その横成分 $\pi_\mu, \hat{\pi}_\mu$ ($\mu=1,2,\dots,n-1$) を用いて $\sigma=\sqrt{1-\pi^2}$, $\hat{\sigma}=-\hat{\pi}\cdot\pi/\sqrt{1-\pi^2}$ のように置換して $J\{\hat{s},s\}$ の主要項を取ら出す:

$$K\{\hat{\pi},\pi\} = \frac{1}{T} \int dx dt \left\{ \lambda \hat{\pi}^2 + i \hat{\pi} \cdot (\partial_t - \lambda \Delta) \pi + \lambda \frac{(\hat{\pi} \cdot \pi)^2}{1-\pi^2} + \frac{i}{2} \frac{\hat{\pi} \cdot \pi}{1-\pi^2} \left[(\partial_t - \lambda \Delta) \pi^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{(\nabla \pi^2)^2}{1-\pi^2} + 2\lambda \rho \sqrt{1-\pi^2} \right] \right\}. \quad (2.5)$$

この K がすべての $\pi, \hat{\pi}$ 場のキミューラント関数とウーテックス関数を定める。例えば、系の運動方程式は Ward identities から

$$\rho(t) = \int dt' \chi_1^{-1}(t,t') M(t') \quad (2.6)$$

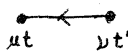
として得られる。ここに、 M は $M \equiv \langle S \rangle$ で、 χ_1^{-1} は一般的な動的帯磁率の逆数 $\chi_{\alpha\beta}^{-1}(t,t') \equiv \delta \rho_\alpha(t) / \delta M_\beta(t')$ の垂直成分である。この表式の静的極限は状態方程式を与える。

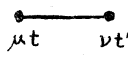
§3. 低温展開 (2.5) 式で π と $\hat{\pi}$ を微小量として展開して、低温展開(これは loop 展開に対応する)に便利なように次のようにそれらのべきで整理する:

$$K_0\{\hat{\pi},\pi\} = \frac{1}{T} \int dx dt \left\{ \lambda \hat{\pi}^2 + i \hat{\pi} \cdot [\partial_t + \lambda (\rho(t) - \Delta)] \pi \right\},$$

$$K_1\{\hat{\pi},\pi\} = \frac{1}{T} \int dx dt \left\{ \lambda (\hat{\pi} \cdot \pi)^2 + \frac{i}{2} (\hat{\pi} \cdot \pi) [\partial_t + \lambda (\rho(t) - \Delta)] \pi^2 \right\}, \quad \text{等}. \quad (3.1)$$

K_0 は非摂動項で、 K_1 以上の項は摂動項である。 K_0 項から応答プロパゲータ $G_q(t,t')$ と相関プロパゲータ $C_q(t,t')$ が導かれる:

$$\int dx e^{-iqx} \langle \pi_\mu(xt) i \hat{\pi}_\nu(0t') \rangle_0 = \delta_{\mu\nu} \theta(t-t') T e^{-\lambda^2 q^2 (t-t')} e^{-\lambda \int_t^{t'} dt'' \rho(t'')} \equiv \delta_{\mu\nu} G_q(t,t'),$$


$$\int dx e^{-iqx} \langle \pi_\mu(xt) \pi_\nu(0t') \rangle_0 = \delta_{\mu\nu} \frac{2\lambda}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' G_q(t,t'') G_{-q}(t'',t') \equiv \delta_{\mu\nu} C_q(t,t').$$


これらに右のグラフを対応づける。相互作用 K_1 の第 1 項と第 2 項に対して次のようなウーテックスでえがく:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\lambda}{T} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \\
 & -\frac{i}{T} \{ \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} [\partial_t^{(p\sigma)} + \lambda (q_\rho + q_\sigma)^2 + h(t)] + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} [\nu, \sigma] + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} [\nu, \rho] \} = \begin{array}{c} \mu \quad \sigma \\ \swarrow \quad \searrow \\ \nu \quad \rho \end{array} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

$\partial_t^{(p\sigma)}$ は添字 ρ と σ をもつプロパゲータの同じ時刻に作用する。

これらの方法でダイアグラム展開すれば、原理的には任意の次数の loop 展開が可能であるが、ここでは one-loop 展開に限る。 χ_1' に対し

$$\chi_1'(t, t') = \delta(t-t') \frac{1}{\lambda} D_t, \quad (3.3)$$

$$D_t = \partial_t + \lambda h(t) + iT \int_{\substack{\circ \\ \leftarrow \\ q=0}} \circ; \quad \circ \equiv -i2\lambda \int_{-\infty}^t dt' [8\pi\lambda(t-t')]^{-d/2} e^{-2\lambda \int_t^{t'} h(t'') dt''} \left[\partial_t - \frac{n-1}{2} \left(\frac{d}{2} \frac{1}{t-t'} + \lambda h(t) \right) \right]$$

最後の表式は $d=2$ で対数的な特異性をもつ。

§4. くろこみ 前節で現われた発散を取り除くために、く

ろこみ理論を用いる。 Z の set で表わされるくろこみ定数を導入する:

$$\hat{\pi} = Z^{1/2} \pi, \quad \hat{\pi} = \hat{Z} Z^{-1/2} \hat{\pi}, \quad \hat{T} = \frac{(4\pi)^{d/2}}{2\Gamma(d/2)} Z_T T \mu^{-\epsilon},$$

$$\hat{h} = Z_T Z^{-1/2} h \mu^2, \quad \hat{\lambda} = Z \hat{Z}^{-1} \lambda. \quad (4.1)$$

ここでは bare な量に \circ をつけた。 T と h を無次元量にするため

に長さの逆数のスケール μ を導入した。 h と λ に対するく

ろこみ定数は独立に定まるのではなくて、それぞれ、Ward identity

と揺動散逸定理から $Z_h = Z_T Z^{-1/2}$, $Z_\lambda = Z \hat{Z}^{-1}$ のように一義的に定ま

ることが分る。くろこみの過程が、先ず、 T -展開を、次に、 ϵ -展開を

通してなされることは静的な場合と全く同じである。(4.1)を

(3.3) に代入し、くろこみ定数を考慮すると

$$\begin{aligned}
 D_t = & \partial_t + \lambda \mu^2 h(t) - \frac{T}{2} h \lambda(t) \left[\partial_t + \frac{n-1}{2} \lambda \mu^2 h(t) \right] + \lambda T \mu^{-\epsilon} \int_{-\infty}^t dt' [2\lambda(t-t')]^{-d/2} \\
 & \cdot \left[e^{-2\lambda \mu^2 \int_t^{t'} dt' h(t')} - e^{-2\lambda \mu^2 h(t)(t-t')} \right] \left[\partial_t - \frac{n-1}{2} \left\{ \frac{d}{2} \frac{1}{t-t'} + \lambda \mu^2 h(t) \right\} \right] \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

が得られる。この表式では $d=2$ での発散が除かれたが、共存線附近 $k(t) \rightarrow 0$ で対数的発散が現われる。

この発散を取り除くために、 D_t のくりこみ群の \bar{D}_t を求める。

bare な \bar{D}_t は μ に依存しないので、次の表式が得られる：

$$\begin{aligned} & \left[\mu \partial_\mu + W(T) \partial_T + V(T) \lambda \partial_\lambda + \left\{ \frac{W(T)}{T} + \frac{1}{2} \zeta(T) - d \right\} \int dt k(t) \frac{\delta}{\delta k(t)} + \epsilon - \frac{W(T)}{T} - \hat{\zeta}(T) \right] D_t = 0, \\ & W(T) = \mu (\partial_\mu T)_0 = T [\epsilon - \mu (\partial_\mu \ln Z_T)_0], \quad V(T) = \frac{\mu}{\lambda} (\partial_\mu \lambda)_0 = \hat{\zeta}(T) - \zeta(T), \\ & \zeta(T) = \mu (\partial_\mu \ln Z)_0, \quad \hat{\zeta}(T) = \mu (\partial_\mu \ln \hat{Z})_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

添字ゼロは bare なパラミタの値を固定して微分することを示す。 $W(T^*)=0$ の条件から二つの固定点 ($T^*=0$ と $T^*=T_c$) が得られる。

one-loop 展開の範囲で次の表式が導出される：

$$\frac{1}{W(T)} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{T} + \nu \frac{1}{T_c - T}, \quad \zeta(T) = \frac{2\beta}{\nu} \frac{T}{T_c}, \quad V(T) = (z-2) \left(\frac{T}{T_c} \right)^2. \quad (4.4)$$

ここで重要なことは、臨界指数の ϵ の 1 次のオーダーの値の代りにすべてのオーダーの寄与を含んだ ν, β, z で置きかえている点である。(4.3) 式を解いて (4.4) 式を代入するとくりこみ群の

をみるパラメトリック解

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}}{\mu} &= \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\nu\epsilon} \left(\frac{T_c - T}{T_c - T} \right)^\nu, & \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} &= \left(\frac{T_c - T}{T_c - T} \right)^{\nu(z-2)}, \\ \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon} &= \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-2\epsilon} \left(\frac{T_c - T}{T_c - T} \right)^{\beta-\nu d}, & \frac{\bar{D}_t}{D_t} &= \left(\frac{T_c - T}{T_c - T} \right)^{2\beta + \nu(z-d)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

が見い出される。bar のついた一つのパラミタを任意に選べる自由度が残っていることを利用して (4.2) 式の発散を次節で取り除く。

§5. オーダパラミタの緩和 時間的に変化する外部磁場

として

$$h(t) = H\theta(t) + h_0\theta(t), \quad \theta(t): \text{階段関数} \quad (5.1)$$

を選び。ここで、 H は外部磁場を switch offする前に系を一様に磁化するために加えられた磁場であり、 h_0 は無限小磁場で最終の計算段階で $h \rightarrow 0$ の極限を考える。(4.5)式の一つのパラミタを決める条件としては、勿論、(4.2)式の発散が取り除かれるように、

$$\bar{h} = 1 \quad \text{即ち} \quad \bar{H} = \frac{H}{h} \quad (5.2)$$

を選ばねばならない。 $\sigma(T, h) \equiv \left(\frac{T_c - T}{T_c - T}\right)^\beta$ と略記すると、(4.5)式は

$$\frac{\bar{T}}{T} = h^{\epsilon/2} \sigma^{(\beta-d\nu)/2\beta}, \quad \frac{\bar{\mu}}{\mu} = h^{1/2} \sigma^{(\beta-\epsilon\nu)/2\beta}, \quad \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \sigma^{\nu(z-2)/\beta}, \quad \frac{\bar{D}_c}{D_c} = \sigma^{2+\nu(z-d)/\beta} \quad (5.3)$$

の形に表わされる。熱平衡状態におけるオータパラミタ σ を用いて、系の緩和過程を記述する運動方程式は次のように求められる：

$$\lambda \mu^2 h = \sigma^{-2-\nu(z-d)/\beta} \left[\partial_t + \sigma^{1+\nu(z-d)/\beta} \lambda \mu^2 h - \sigma^{-\nu z \epsilon/2\beta} \frac{T}{2} \int \frac{ds}{2\lambda \mu^2 t} \left[\exp\left\{-\sigma^{1+\nu(z-d)/\beta} h s\right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \exp\left\{-\sigma^{1+\nu(z-d)/\beta} [H(s-2\lambda \mu^2 t) + h 2\lambda \mu^2 t]\right\} \right] \left[\partial_t - \frac{n-1}{2} \sigma^{1+\nu(z-d)/\beta} \lambda \mu^2 h - \frac{n-1}{2} d \lambda \mu^2 \frac{1}{s} \right] \right] M(t)$$

にすぎ、 $t > 0$ 。系の "memory effect" は積分項に含まれている。もし、 $t \gg (\lambda \mu^2 h)^{-1}$ が満たされるときにはこの効果は現われない。 $h \rightarrow 0$ で、かつ、この条件が満たされる時刻、即ち、長時間後の系の磁化の振舞は

$$\partial_t M(t) = -\sigma^{1+\nu(z-d)/\beta} \lambda \mu^2 h [M(t) - \sigma] \quad (5.5)$$

で表わされる。即ち、磁化は熱平衡値 σ に向かって指数関数的に減衰する。

memory effect の現われる領域では, (5.5) 式の最後の [] 内の項は T について高次の寄与を与えるので無視出来る。系の自発磁化の値 $\sigma_0 = \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^\beta$ を用いて系の磁化の運動が次のように表わされる:

$$\partial_t \ln M(t) = -\frac{n-1}{4} T \sigma_0^{-\nu z \epsilon / 2\beta} \sigma_0^{1+\nu(z-d)/\beta} H 2\lambda \mu^2 \int_0^\infty ds \frac{\exp - \sigma_0^{1+\nu(z-d)/\beta} H s}{(s + 2\lambda \mu^2 t)^{d/2}} \quad (5.6)$$

この式で時間 t についての ∞ まで積分すると, 磁場を switch off する以前に存在した熱平衡系から, それ以後の無限の時間後に到達するであろう熱平衡系における磁化の比は

$$\frac{M(\infty)}{M(0)} = \left[1 + \frac{T}{T_c} \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^\beta H^{\epsilon/2} \right]^{-\beta} \quad (5.7)$$

で与えられる。これは期待される表式 $M(T, H) = \left[\frac{T_c - T}{T_c} + \frac{T}{T_c} H^{\epsilon/2} \right]^\beta$ と一致する。同様に, 長時間後の磁化の振舞は

$$M(t) = \left[\frac{T_c - T}{T_c} + \frac{T}{T_c} (2\lambda \mu^2 t)^{-\epsilon/2} \right]^\beta \quad (5.8)$$

で表わされる。即ち, 系の磁化は, $T < T_c$ では $-\frac{\epsilon}{2}$ のべきで, $T = T_c$ では $-\beta\epsilon/2$ のべきで時間とともに減衰する。

two-loop までの範囲で計算を進めれば, パラメトリック解 (4.5) のパラミタを決める段階で量子計算機の数値解析に頼らざるを得なくなってしまう。

(詳しくは, Z. Phys. とそれに続く文献に)