

周期外力を受けた自励振動系の熱的揺動

京大 理 大同寛明

富田和久

§ 1 まえおき

自励振動系は周期的外力に対して多様な応答を示す。系の状態は外力の振幅 a と振動数 ω の値に応じて様々に移り変わるが、 a の比較的小さい場合に話を限ると、外力にひきこまれた状態（応答周期が外力の周期の整数倍）か、準周期状態の何れかがあらわれる。ここでは、この振幅 a が微小である場合に、系の熱的揺動が、ひきこまれた状態、準周期状態、およびそれらの移り変わりの点近傍で、どのような振舞いをするかを調べる。とりわけ、外力のない自励振動状態での熱的揺動についてはすでによく知られているので、それが微小外力を加える事によつてどのように変化するかという事、および、このような非自律系での熱的揺動のふるまいを記述するのに、自律系の場合と全く異なつた frame が必要なのかどうかという問題に重点をおく。これらの問題を通じて、周

期外力を受けた自励系の，典型的な非平衡開放系としての性格を明らかにする事を試みる。

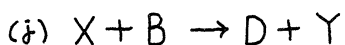
なお，外力によつてひきこまれた状態といつても種類があるが，どれも同様の方法で扱えるので，ここでは，最も簡単な基本ひきこみの状態（応答周期 = 外力の周期）に話を限る。また，概略のみを述べるにとどめるので，詳細は文献を参照していただきたい。¹⁾

§ 2 モデル

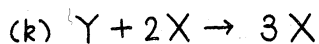
自励振動系といつても範囲が広いので，以下では非平衡化学反応系を例にとる。充分なかくはんで濃度が空間的に一様に保たれているとし，かつ，濃度変化がマルコフ的であるとして熱力学的極限をとると，マスター方程式の漸近的な解がえられる（ Ω 展開法²⁾）。いま，モデル反応系としてよく知られた PLN モデル³⁾：



$$w_i(X, Y; 1, 0) = A$$



$$w_j(X, Y; -1, 1) = BX$$



$$w_k(X, Y; 1, -1) = X^2Y$$



$$w_l(X, Y; -1, 0) = X$$

をとると，遷移確率 $w(X, Y; \Delta X, \Delta Y)$ は，右側のように与えられる。ここで各文字は，成分およびその濃度をあらわす。また，中間体 X, Y の濃度のみが変数である。周期外力として

, A の濃度を正弦的にゆさぶるものとし, 上述の Ω 展開法を適用すると

(i) 決定論的運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \bar{X} &= \bar{X}^2 \bar{Y} - \bar{X} - B \bar{X} + A + 2a \cos(\omega t) \\ \frac{d}{dt} \bar{Y} &= B \bar{X} - \bar{X}^2 \bar{Y}\end{aligned}\quad (1)$$

および,

(ii) linear Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\xi, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} K(t) \xi P(\xi, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} D(t) P(\xi, t) \quad (2)$$

を得る。ここで \bar{X} , \bar{Y} は決定論的運動を表わし, ξ はそれからのズレ (揺動) として (Ω は系のサイズ)

$$\begin{aligned}X &= \bar{X}(t) + \Omega^{\frac{1}{2}} X' \\ Y &= \bar{Y}(t) + \Omega^{\frac{1}{2}} Y'\end{aligned}\quad \xi \equiv \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \quad (3)$$

のように定義される。 $K(t)$ は退化行列, $D(t)$ は遷移の 2 次能率であり, どちらも, (i) の解のみで決まる。(2) の解は Gauss 分布となり, その分散 $\delta(t)$ は

$$\frac{d}{dt} \delta(t) = K(t) \delta(t) + {}^t(K(t) \delta(t)) + D(t) \quad (4)$$

に従って 時間発展をする。

さて, 外力のない ($a=0$) 場合の (1) の定常解 $\bar{X} = A$, $\bar{Y} = B/A$ は, $B = 1 + A^2 \equiv B_c$ で不安定化し, リミットサイクルが分岐することが知られている。この分岐点の近く

では、このリミットサイクル（固有振動）の振幅は微小であって、調和振動に近く、解析的取り扱いが容易である。そこで、以下では、

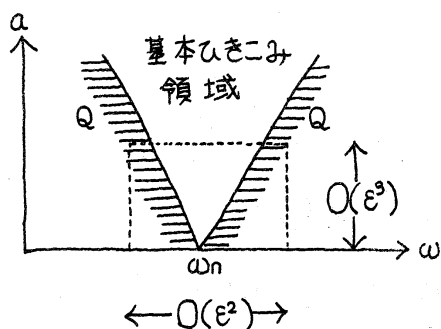
$$0 < (B - B_c) / B_c \equiv \varepsilon^2 \ll 1$$

であるとする。

§3 基本ひきこみの状態における揺動

3-1 Reductive Perturbation Approach

(4)式からわかるように、揺動の分散 $\delta(t)$ は、決定論的運動 $\bar{X}(t)$, $\bar{Y}(t)$ が知れば計算できる。そこでまず基本ひきこみ領域およびその近傍での決定論的運動を、Reductive Perturbation 法⁴⁾を用いて調べる。いま、



$$\omega - \omega_n = O(\varepsilon^2)$$

$$a = O(\varepsilon^3)$$

ω_n : 固有振動数

Q : 準周期領域

のように ε でスケールされる領域を考えると、 \bar{X} , \bar{Y} が、次の形で与えられる。

$$\bar{X} - A = \varepsilon W e^{i\omega t} + \varepsilon W^* e^{-i\omega t} + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

$$\bar{Y} - (B/A) = \varepsilon \left(-1 + \frac{l}{A}\right) W e^{i\omega t} + \varepsilon \left(-1 - \frac{l}{A}\right) W^* e^{-i\omega t} + O(\varepsilon^2)$$

ここで W は、次の TDGL 型の方程式に従う。

$$\frac{d}{dT} W = \kappa W - \nu |W|^2 W + \gamma a \quad (T \equiv \varepsilon^2 t) \quad (6)$$

(5) の W に、(6) の安定定常解 W_0 を用いれば、基本ひきこみ状態（相平面で見ると 1 つのリミットサイクル）の軌道がえられる。この状態の安定性は、(6) を W_0 のまわりに線形化して得られる固有値（Floquet 指数）：

$$\lambda_{\pm} = (\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}) / 2$$

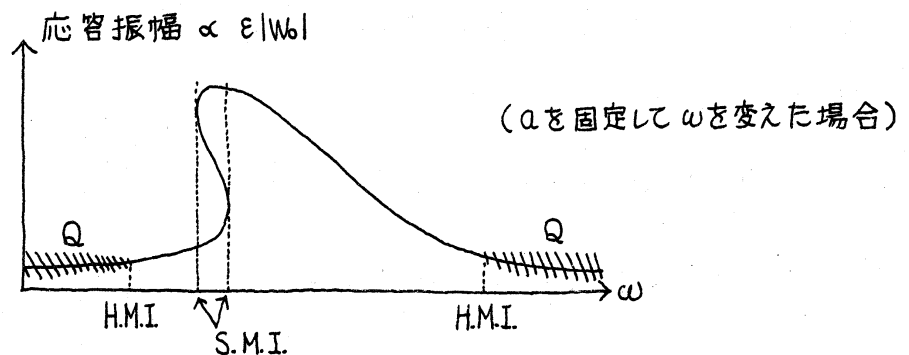
の実部の符号でさまる。ここで Γ は、(6) を W_0 のまわりに線形化して得られる係数行列の Trace、 Δ は、その Determinant を表わす。これから、基本ひきこみ状態には、次の 2 種の不安定があることがわかる。⁵⁾

$\Gamma < 0, \Delta \rightarrow +0$ (Soft Mode Instability)

--- ひきこまれたリミットサイクルの振幅のとき

$\Gamma \rightarrow -0, \Delta > 0$ (Hard Mode Instability)

--- ひきこみの限界



3-2 揺動のふるまい

上で得た結果を用いて分散を計算する。基本ひきこみの状態では、退化行列 K が時間の周期函数となるので、(4)のままでは積分は困難である。そこで、

$$\begin{aligned} X - A &= V + V^* \\ Y - (B/A) &= \left(-1 + \frac{\tilde{L}}{A}\right)V + \left(-1 - \frac{\tilde{L}}{A}\right)V^* \\ V &\equiv \rho e^{i\psi} \end{aligned} \quad (7)$$

なる、 X, Y 系から、 ρ, ψ 系への変数変換をする⁶⁾。 ρ, ψ 系においても、揺動を決定論的部分から分離して、

$$\rho = \bar{\rho}(t) + \Omega^{\frac{1}{2}} \cdot \rho', \quad \psi = \bar{\psi}(t) + \Omega^{\frac{1}{2}} \cdot \psi' \quad (8)$$

とおくことができる。(3), (7), (8)から、 X', Y' と ρ', ψ' の間の、線形の変換公式を導くことができる。(5)と(7)の比較から、 $O(\varepsilon^2)$ の項を無視する限り、 $\bar{\rho}(t), \bar{\psi}(t)$ は、(5), (6)における W の振幅、位相と同一視してよいことがわかる。すると、 ρ, ψ 系での退化行列は、基本ひきこみの状態では、時間的に一定となるので、分散の方程式は積分可能となり、

$$\overline{\langle \psi'(t) \psi'(t) \rangle} = \frac{a_{22}}{\Gamma} + \frac{b_{22}}{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}} + \frac{c_{22}}{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}$$

$$\overline{\langle \rho'(t) \rho'(t) \rangle}, \overline{\langle \rho'(t) \psi'(t) \rangle} \text{ も同様の式} \quad (9)$$

なる形の結果をうる。ここで、 $\langle \quad \rangle$ はアンサンブル平均、

—— は、外力の1周期にわたる平均を意味する。

ここで、比較のため、外力のない系の揺動について簡単に復習する⁷⁾。外力のない系の決定論的運動方程式は、任意の時間並進に対して不変であるため、リミットサイクルは位相方向には中立安定である。この性質を反映して、リミットサイクルの状態では、振幅の分散は有限であるのに対し、位相の分散が、時間にほぼ比例して増大するという現象 (phase diffusion あるいは ensemble dephasing とよばれる) が起こる。上で導入した ρ と ψ は、それぞれ、外力でひきこまれたリミットサイクルの振幅と位相とみなしてよいから、(9)式は、リミットサイクルを外力でひきこんでやると、振幅の分散のみならず、位相の分散まで有限にとどまることを示している。つまり、周期外力によつて、dephasing が抑えられた訳である。これは、“ひきこみ”の意味からいって、ごく自然な結果と考えられる。

(9)式はまた、基本ひきこみ状態の2種の不安定点近傍で、分散が異常増大することを示している。この点で、これらの不安定は、通常の、非平衡系における相転移類似現象と何ら異なる所はないといえる。

§4 準周期状態における揺動

与えられた外力の振幅 a の値に対して、振動数 ω を系の固

有振動数 ω_n からずらしていくと、ある点で、基本ひきこみ解が不安定化し (H.M.I.)、準周期状態があらわれる。この状態を相平面で見ると、もちろん、閉じた軌道というものはなく、位相点の軌跡は、ある有限のドーナツ型領域をエルゴード的にうめつくす。このような状態を、Reductive Perturbation 的に扱おうためには、2つの部分領域 — ひきこみの領域に近い部分 (Resonant Region) と、どのひきこみの領域にも近くない部分 (Nonresonant Region) — にわけなければならない。詳細は略すが、どの部分領域においても、固有振動成分の振幅 (complex) Z をオーダーパラメタとしてとることができ、これは次のTDGL型方程式に従おう。

$$\frac{d}{dT} Z = \kappa' Z - \nu' |Z|^2 Z \quad (T \equiv \varepsilon^2 t) \quad (10)$$

κ' , ν' は、 a , ω , A のみで定まる定数である。これは(6)とは異なり、外力のない場合のTDGL型方程式と同型である。ここで、§3におけると同様の方法を用いて分散の計算をすると、 $\langle \rho'(t) \rho'(t) \rangle$, $\langle \rho'(t) \psi'(t) \rangle$ については、前と同様、有限の値をうるが、 ψ' の分散については、充分大きな t の値に対して、

$$\langle \psi'(t) \psi'(t) \rangle \propto t \quad (11)$$

なる結果をうる。これは、ひきこみが破れて準周期状態とな

ると、再び1種の dephasing がおこることを示している。しかしながら、ここでは、上でも述べたように、 ψ を位相として持つような閉軌道がある訳でもなく、時間についての並進不変性も（外力項のため）存在しない。したがって、外力のない場合の ensemble dephasing とは異なっている。

なお、§3, §4とも、もとの X, Y 系での分散の式をうることは、 X', Y' と ρ, ψ の変換式を用いて容易に実行できるが、その必要がないので、 ρ, ψ 系での式のみを出すにとどめた。

§5 揺動のストロボ的記述

これまで揺動に関しては、分散のみを調べてきた。しかしながら、揺動の性質は分散のみにつきるものではない。例えば、基本むきこみの状態を考えると、そこには、S.M.I. と H.M.I. という2種類の instability があつたが、分散の見地からは、それらの点の近傍で異常増大があるのみで、両者の間に何らの差もないことになる。応答振幅のとび (S.M.I.) とむきこみの限界 (H.M.I.) という物理的性格の違いを明確に反映する、揺動についての何か基本的性質あるいはそのめやすとなる量が存在するのに違いはない。また、揺動に関して、基本むきこみの状態で起こる事態と準周期状態で起こる事態とを、みやすく統一的に記述する視点をさがすことも重要

である。これらの問題について以下で考える。

5-1 基本ひきこみの状態

Minorsky は、外力の1周期ごとに系をながめた時にあらわれる運動を記述する自律的微分方程式を構成し、それを用いて、ひきこみ解の安定性等を研究する方法を提出した。^{8),9)}ここでは、この方法を揺動の記述にまで拡張することを試みる。基本ひきこみの状態は外力と同じ周期 $T_0 = 2\pi/\omega$ を持つから、系を $t = 0, T_0, 2T_0, \dots, nT_0, \dots$ のみでながめるとくストロボ表示)、定常状態としてあらわれる。そこで、決定論的運動のみならず、相平面での確率の流れをもストロボ的にみる事を考える。

相平面での確率の流れの速度場 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ は

$$\vec{G}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)$$

で与えられる。ここで \vec{G} は確率の流れの密度であり、(2)から知れる。いま、この速度場につて流れる粒子の運動 $\vec{x}(t)$:

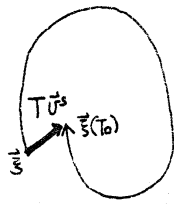
$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t), t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}$$

を考えると、ストロボの世界での確率の流れの速度場は、

$$\vec{v}^s(\vec{x}) \equiv (\vec{x}(T_0) - \vec{x}) / T_0$$

としてよい。計算によると、少なくとも、不安定点の近くで

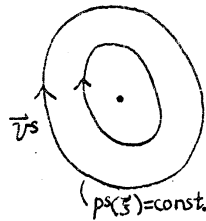
(S.M.I. でも H.M.I. でも)



$$\vec{v}^s(\xi) \cong -\tilde{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial \Phi^s}{\partial \xi} \quad (12)$$

$$\tilde{\alpha} \equiv \frac{1}{2T_0} \left. \frac{d}{dn} \left\{ \langle X(0)Y(nT_0) \rangle - \langle X(nT_0)Y(0) \rangle \right\} \right|_{n=0} \quad (13)$$

であることがわかる。ここで Φ^s は, $P(\xi, 0) \equiv P^s(\xi) \propto \exp(-\Phi^s(\xi))$ で定義され, ストロボの世界でのポテンシャルの役割をはたす量である。(12)は, ストロボの世界での確率が, 分布 (ストロボの世界での分布関数は, $P(\xi, t)$ が周期函数であるから, $P(\xi, nT_0) = P(\xi, 0) \equiv P^s(\xi)$ である。) の等高線に沿って循環していることを示している。この流れの生成子 $\tilde{\alpha}$ (揺動



のストロボ的循環とよぶ) は, ストロボの世界での揺動の平均角運動量に相当し, 計算によると $1/\Gamma$ に比例する。したがって (ストロボ的分散は $\delta(0) \equiv \delta_s$), 次の図式が成立

する。

S.M.I. (応答振幅のとび); $\delta_s = \infty$, $\tilde{\alpha} = \text{finite}$ H.M.I. (ひきこみの破れ); $\tilde{\alpha} = \infty$, $\delta_s = \infty$

ここで, H.M.I. を経てあらわれてくる準周期状態が, ストロボ的には, 1種のリミットサイクルにみえる事を考えると, 上の図式は, 定常状態の不安定の場合と全く同様のものであ

ることがわかる。つまり，基本ひきこみ状態では揺動のストロボ的循環が存在し，H.M.I.での発散をへて，それがマクロに，ストロボ的リミットサイクル（準周期状態）としてあらわれるのである。 α が定める量である事がわかる。（ふつうの非可逆的循環 α は，この場合，両不安定点で発散し，役に立たない。）

5-2 準周期状態

上に述べたように，準周期状態はストロボの世界ではリミットサイクルである。実はその位相は， $\psi(nT_0) \equiv \psi(n)$ に一致することが示されるので，この $\psi(n)$ につき，(II)から

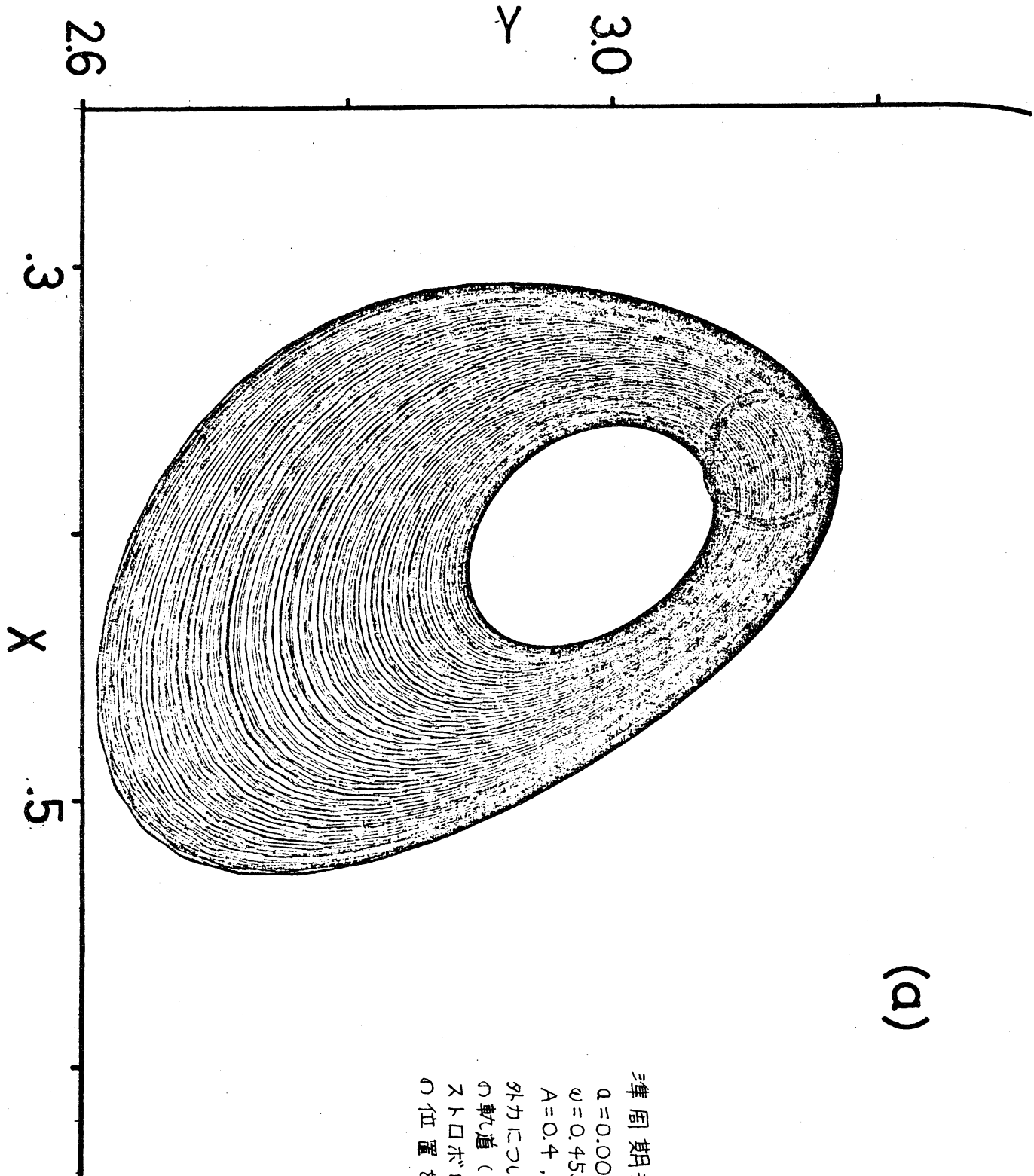
$$\langle \psi'(n)\psi'(n) \rangle \propto n$$

をうる。これは，ストロボ的リミットサイクルに関して ensemble dephasing が起こっている事を示している。つまり，準周期状態での dephasing は，ストロボの世界での ensemble dephasing として解釈できることがわかる。

以上をまとめて表にすると，次にあげるようなものとなる。つまり，周期外力を受けた系の揺動のふるまいは，ストロボ表示をとることによつて，外力のない系の場合の言葉を用いて，統一的に記述できるという事になる。

§ 6 結論

以上で，



(a)

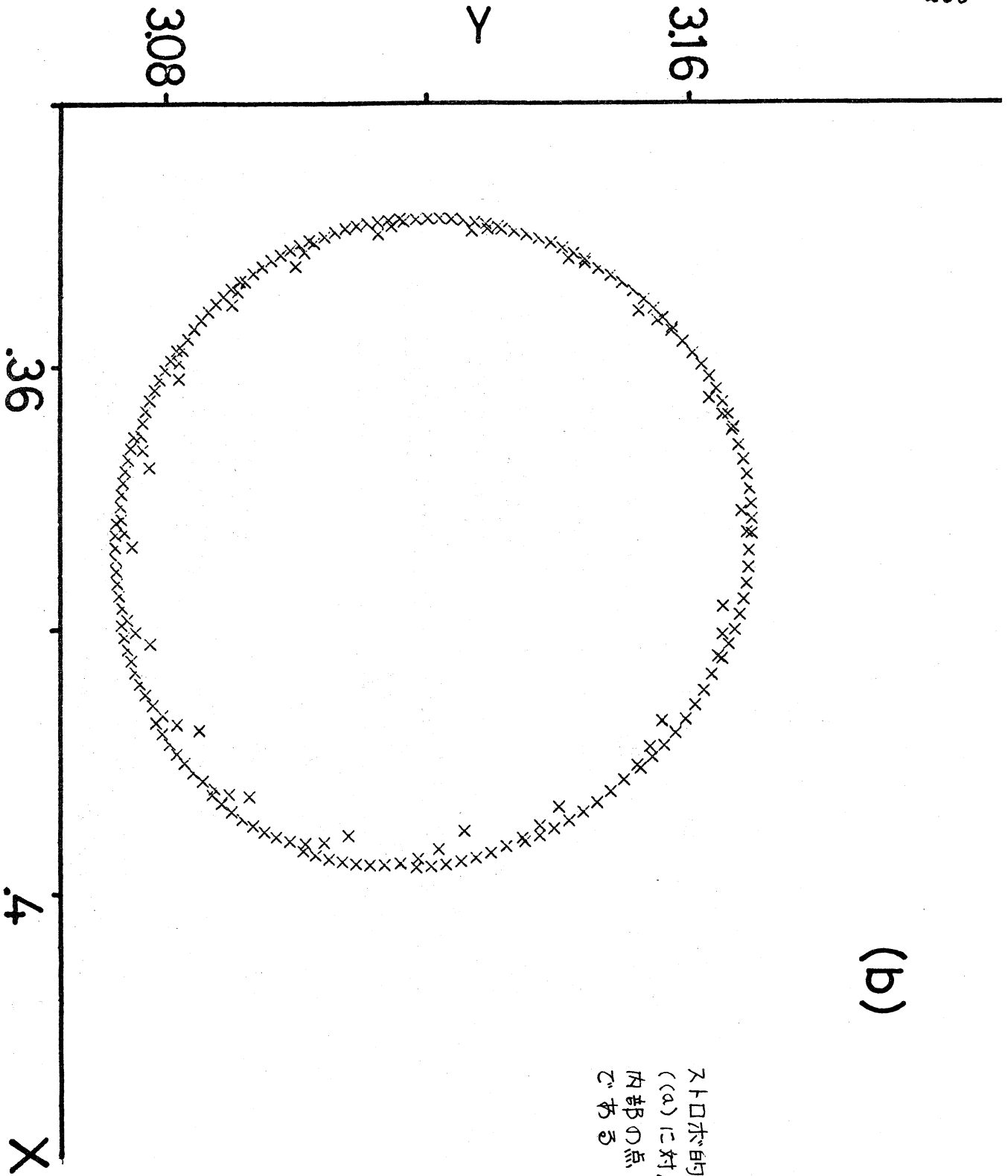
準周期振動の例

$a = 0.0036$

$\omega = 0.455$

$A = 0.4, B = 1.2$

外力について200周期分の軌道（上の閉曲線はストロボ的リミットサイクルの位置を示す）



(b)

ストロボ的リミットサイクル
((a) に対応する)
内部の点は transient 状態の
である

自律系	Steady state	hard mode instability	Limit cycle
	Irreversible circulation α	$\alpha \rightarrow \infty$ ↓ $\delta \rightarrow \infty$	Ensemble dephasing $\langle \psi(t)\psi'(t) \rangle \propto t$
非自律系	Entrained limit cycle Stroboscopic steady state	limit of entrainment	Quasi-periodic state Stroboscopic limit cycle
	Stroboscopic circulation $\tilde{\alpha}$		Stroboscopic ensemble dephasing $\langle \phi(n)\phi'(n) \rangle \propto n$

(揺動に関する自律系と非自律系の対応)

- (i) 外力によつてひきこまれた状態では ensemble dephasing は抑止される
- (ii) ひきこみが破れて準周期状態となると，再び，1種の dephasing が おこる

ということ，および，

- (iii) 揺動をストロボ的にながめることによつて，周期外力をうけた系の揺動のふるまいが，周期外力のない場合（自律系）と同様の言葉で記述できる

ことをみた。ストロボ表示は，力学系の理論におけるポアンカレ・マップの特別な場合にあたっている。したがつて，ストロボを，ポアンカレ・マップにおきかえれば，上と同様の方法が，もつと一般の系の揺動を調べる際にも有用であろうと考えられる。

以上では，1つの反応系のモデルをとり， Ω 展開法にもとづいて議論して来たが，得られた結果の少なくとも定性的な部分は，モデルにもよらず，また Ω 展開法を越えたより洗練された方法を用いたとしても，変わらないはずである。

さて，現実の系では，定量的にも充分よく実験と一致するような，決定論的運動の簡単なモデルをたてることは，困難な場合が多い。そのような場合，パラメタのどんな値で，どのような不安定化が起こるかの予測はできないことになる。

しかしながら，そのような場合でも，揺動のふるまい（分散と循環）を観測すれば，パラメタ値を変えていくとき，次に采たる *instability* の性格（S.M.I. か H.M.I. か）を予測できるであろう。ストロボ的循環 α は，この意味で，ひきこみの破れに対する precursor として役立つものと思われる。実際，定常状態の *instability* に関して，非可逆的循環 α は，同様の見地から，すでに炉雑音の問題等に應用されている。¹⁰⁾

References

- 1) H. Daido and K. Tomita, *Prog. Theor. Phys.* 61 (1979), 825, 62 (1979), 1519
- 2) N. G. van Kampen, *Can. J. Phys.* 39 (1961), 551
R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, *J. Stat. Phys.* 9 (1973), 51
- 3) 例えは, P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuation* (Wiley-Interscience, 1971) [邦訳, 松本, 竹山 訳, みすず書房]
- 4) 化学反応系への応用を展開したものとして,
Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.* 52 (1974), 1399 を挙げておく。

- 5) K. Tomita, T. Kai and F. Hikami, *Prog. Theor. Phys.* 57 (1977), 1159
- 6) Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.* 54 (1975), 60
- 7) K. Tomita and H. Tomita, *Prog. Theor. Phys.* 51 (1974), 1731
K. Tomita, T. Ohta, and H. Tomita, *ibid.* 52 (1974), 1744
- 8) N. Minorsky, *Non-linear Oscillations* (van Nostrand, 1962)
- 9) T. Kai and K. Tomita, *Prog. Theor. Phys.* 61 (1979), 54
- 10) K. Kishida, S. Kanemoto, T. Sekiya and K. Tomita, *J. Nuclear Sci. and Technology*, 13 (1976) 161