数理解析研究所講究録
第 405 巻 1980 年 258-271



# Forced Burgers Turbulence
## ── 解の存在と一意性，解の構成 ──

京大理 物理　中澤 宏

乱流への流体力学的アプローチは大別して二つある。一つは $t=0$ での初期 data に確率分布を与え，以後の時間的減衰を追求するものである。他の一つは（確率的またはそうでない）外力を入れて，流体のランダムな運動の時間的定常状態を追求するものである。どの定式化でも関心は非粘性の極限にあり，これが困難を大きくする。ここではランダムな外力を受ける場合（forced turbulence と呼ぶ）についていくつかの考察を報告する。

## §1. Forced Turbulence の方程式

外力や初期確率分布を特定することなく Kolmogorov は有名な $k^{-5/3}$ 法則を導いたし，Kraichnan の有名な direct interaction approximation [1] では外力の（確率的なものも含めた）構造が，明確に定義されることを要せず，巧妙に消去される

ような構成が与えられた。しかし精密な方程式の特定なしに（何かランダムな外力をうける流体方程式とだけ仮定して）これ以上議論を進めることには，大きな困難があるように思われる。一方，任意にランダムな外力を仮定して計算を進める事は，「形式解」が簡単に得られる場合はまだしも，乱流問題ではあまりに難しすぎて，得られた結果がどのような一般性を持つものであるかが多くの仮定や近似のもとで不分明になる恐れがある。ここでは実際（あるいは少くとも思考実験的に）起き得るある種の物理状況を考え，それが方程式そのものを限定することを見る。基本的なアイデアはブラウン運動の統計力学的基礎づけについての Kubo[2] の講義録に負う。主な結論は，ガウス型ホワイトノイズを持つ方程式が，あるクラスの forced tubbulence に必然性を持って登場するということ，およびその登場の様式の特定である。

方程式を次の形にとる：

$$\partial u_\nu(x,t)/\partial t = G^{(\nu)}[u_\nu(x,t)] + F(x,t). \tag{1}$$

3 次元 Navier-Stokes 方程式の場合，$u_\nu$ と $x$ は 3 成分であり，$G^{(\nu)}(u) \equiv \nu\Delta u - (u\,\mathrm{grad})u - \mathrm{grad}\,p(x,t)$ の形になる。非圧縮性からは条件 $\mathrm{div}\,u_\nu = 0$ が付け加わる。$F(x,t)$ はランダムな外力で，これからその形に物理的な制限を加える。「乱流」を，$u_\nu(x,t)$ のフーリエ成分 $\int d^3x\, e^{ikx} u_\nu(x,t)$ の間の，対流項

$(u_\nu \,\mathrm{grad})u_\nu$ から生じる相互作用による運動，特に $\nu\downarrow 0$ での運動と定義する。目標は forced case のみならず，$F(x,t)\equiv 0$ の random initial data での定式化とも共通な特徴に置く。あるいは Kolmogorov が直接仮定したように，低波数（$|k|\sim 0$）でのエネルギー注入で生じる，$|k|\gg 1$ でのエネルギーのやりとりの様子を見たい。従って $F(x,t)$ は空間的なフーリエモード $\{\sigma_k(x)\}$ で分解して

$$F(x,t)=\sum_k \sigma_k(x)f_k(t) \tag{2}$$

となるようなもの，しかも $\Sigma_k$ は実質的に $|k|\sim 0$ の少数個のものだけからなる場合を考えてよい。最も簡単な，$F(x,t)=\sigma(x)A'(t)$ となる場合について以下に論じる。$\sigma(x)$ は3次元 Navier-Stokes の場合3成分ベクトル，$A'(t)$ はスカラーである。外力項 $\sigma(x)A'(t)$ は２つの固有な時間因子を与える。一つは「correlation time」$\tau_0$ であり，もう一つはこの外力項が $u_\nu(x,t)$（あるいはその，モード $\sigma(x)$ の成分）に単位時間に与えるエネルギーの量からきまる時間因子 $\tau$ である。時間的定常状態がもしあるとすれば，そこでの基本的な量はこのエネルギー注入率から大きさを決定されるはずで，$\tau$ が kinematical に妥当な正規化因子である。そのように規格化して方程式を考えると，$A'(t)$ は $\tau_0/\tau$ の correlation time を持つことになる。$u_\nu(x,t)$ と $u_\nu(x',t')$，あるいは対応するフーリエモード間の相

関としては，外力 $f(t)\equiv A'(t)$ と $f(t')$ の間の相関に起因するものは排除したい。このことは $\tau_0/\tau \sim 0$ という要求をもたらす。短かく言えば，正規化して $\delta$-correlated と見えるようなものが物理状況として理想である。Kubo[2] によって予測されたように，このことは Rosenblatt[3] の中心極限定理を用いて詳しく論じることができる。あらく言って次の事が得られる。

［結論 1］正規化されていない $f(t)$ が十分強い（しかし物理としてはもちろん restrictive でない）漸近的独立性（即ち $f(t)$ と $f(t')$ が $|t-t'|\to\infty$ で十分速かに独立となる）を持ち，いくつかの moment condition を満たすとする。正規化した $f(t)$ はもとの確率構造に関係なく，ガウス型ホワイトノイズに $\tau_0/\tau\downarrow 0$ の極限で収束する。その収束の様式は，「力積」$A(t)=\int_0^t f(t')dt'$ について，見本毎に Wiener 過程の（連続だが微分不可能な）それに，有限の $t$-区間上一様ノルムで収束するようなものである。

以下ではこの結論に基いて，ガウス型ホワイトノイズ $f(t)$ を持つ方程式を「定義」することにする。上の結論は(2)で有限和の場合，各 $f_k(t)$ に対して成立する。またこの結論は非圧縮 Navier-Stokes 方程式についても，Burgers 方程式についても形式上全く同じ議論で成り立つ。

## §2. 非粘性の極限

以下はすべて Burgers 方程式で考える：

$$\frac{\partial u_\nu(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_\nu^2(x,t)}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u_\nu(x,t)}{\partial x^2} + \sigma(x)A'(t), \tag{3}$$

$u_\nu(x,0)=\psi(x)=$ given (non-random), $t\in[0,\infty)$, $x\in(-\infty,\infty)$,

$u_\nu(x,t)$, $\psi(x)$, $\sigma(x)$ は $x\in E\equiv[0,1]$ を周期として周期的.

ここで $u_\nu$ と $x$ はスカラー，$\nu>0$ は粘性係数，$\sigma(x)$ はフーリエモード，$A(t)$ は主としてランダムでない一つの函数（あるいは確率過程の一つの見本）とする。［結論1］から，そして物理状況から，(3)について問題となるのは，次の諸極限[1]～[3]での $u_\nu(x,t)$ の収束と，諸極限のからみ合いである：

[1] $\nu\downarrow 0$。

[2] 例えばなめらかな $A(t)$ が，前述の compact 一様ノルムの意味で連続だが微分不可能なものに収束する。

[3] $\psi(x)$ が何等かのノルムで収束する。

[1]は乱流問題として当然。[2] は［結論1］から。[3]は解の一意性・安定性・近似等から重要である。言いかえると，問題は次のようになる：①何か $u_\nu(x,t)$ に課すべき適当なノルムを見出して上の3極限で収束が成り立つようにできるのか；②上の3極限についての収束は任意の $t\in[0,\infty)$ で成り立つか；③ $\nu\downarrow 0$ で収束するとして，$u_\nu(x,t)$ の $\nu=+0$ での極限函数 $u(x,t)$ はどのように決定されるのか；そして最終的に

④ガウス型ホワイトノイズの外力を受ける $u(x,t)$ の典型的な構造はどのようなものであるか。この節では①〜③について述べる。次節で③〜④に言及する。結論的には上の(3)のBurgers流体の場合については，$u(x,t)$ を $x \in E = [0,1]$ の上の $L^1$ 函数であって，$t \in [0,\infty)$ をパラメーターとして（強）連続的に動くもの，と見るのがよい。この節の基本的アイデアは $\sigma(x)$ と $A'(t)$ が十分正則な場合を含む一般的な方程式について論じた Kruzhkov[*] に負う。以下 $T<\infty$ は任意である。

［結論 2］ $u_\nu(x,t)$ を $L^1(E)$-valued な，$\{\nu \in (0,1],\ t \in [0,T],\ A(t) \in C[0,T],\ \varphi(x) \in L^1(E) \cap L^\infty(E)\}$ からの写像 $\Phi(\nu,t,A,\varphi)$ と考える。もしも $\sigma(x)$ が2回連続微分可能，$\sigma''(x)$ が Hölder 連続ならば，$\Phi(\nu,t,A,\varphi)$ は上の変数のすべての domain で連続写像となり，$\nu \downarrow 0$ で収束し，$A(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(x) \in C^2(E)$ の classical な場合については(3)の classical solution と一致する。前出の3極限[1]〜[3]についてはその順序によらず自由にとることができる。初期条件 $\varphi(x)$ に依存することを強調して $u_{(\nu)}(x,t) = u_{(\nu)}(x,t;\varphi)$ と記すならば，特に，$\nu, A, t$ に無関係に次が成り立つ：

$$\| u_{(\nu)}(x,t;\varphi) - u_{(\nu)}(x,t;\tilde{\varphi}) \|_{L^1(E)} \leq \| \varphi - \tilde{\varphi} \|_{L^1(E)}. \quad (*)$$

［結論 3］上と同じ $\sigma(x)$ の正則性を仮定する。任意の $A(t) \in C[0,T]$ について，もし初期条件 $\varphi(x)$ を $L^1(E) \cap L^\infty(E)$

の[有界変動の函数のクラス]ととるならば，$u(x,t)$ は $^{\forall}t\in[0,T]$ について同じクラスにとどまる。

[結論4] 上と同じ正則性を $\sigma(x)$ に課す。非粘性極限 $u(x,t)$ は，Kruzhkov の意味の generalized solution として，任意の $\varphi(x)\in L^1(E)\cap L^\infty(E)$ および任意の $A(t)\in C[0,T]$ に対し各 $t\in[0,T]$ で $L^1(E)$ として一意的に定まる。即ち $u(x,t)$ は

$$
\begin{aligned}
&\iint_{R\times[0,\infty)} dx\,dt\; I(x,t) \geqq 0, \\
&I(x,t) \equiv |u(x,t)-\sigma(x)A(t)-k|\, f_t(x,t) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,[u(x,t)-\sigma(x)A(t)-k]\, u^2(x,t)\, f_x(x,t) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,[u(x,t)-\sigma(x)A(t)-k]\, \frac{d}{dx}\left\{[k+\sigma(x)A(t)]^2 \right. \\
&\qquad \left. \times f(x,t)\right\}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

をすべての実数 $k$，および $R\times(0,T)$ に compact support を持つすべての1回連続微分可能な test function $f(x,t)\geqq 0$，に対して満たし，初期条件を

$$
\lim_{t\downarrow 0} \|\varphi(x)-u(x,t)\|_{L^1(E)} = 0 \tag{6}
$$

の形で満たすものとして各 $t\in[0,T]$ で $L^1(E)$-unique に定まる。

## §3. 非粘性極限の解の構成

上の(5),(6)による $u(x,t)$ の定義は直観性に欠ける。Force

free な $(A(t)\equiv 0)$ 場合の Burgers 流体の非粘性の極限については，いわゆる「shock discontinuity」の出現はよく知られている。ガウス型ホワイトノイズのような force があっても同様な構造があることをここで示す。但し，$^\forall t<\infty$ の場合であって，$t=\infty$ の，定常状態となるべき肝心のところについては，まだわからない。(4)式が示すように，initial data $\varphi(x)$ としては $L^1(E)\cap L^\infty(E)$ で dense な，性質のよいものを考察すればよいであろう。基本的なアイデアは，force-free の場合に知られている，characteristic の方法に基く。

次の常微分方程式を考える。

$$\frac{d\Xi(t;x,u,A)}{dt}=H(t;x,u,A),\quad \frac{dH(t;x,u,A)}{dt}=\sigma[\Xi(t;\cdots)]A'(t),$$
$$\Xi(0;x,u,A)=x,\quad H(0;x,u,A)=u. \tag{7}$$

ここで $\sigma(\Xi)$ は (3)式の $\sigma(x)$ と同じものである。

［du 論 5］ $\sigma(x)$ について，Hölder 連続な $\sigma''(x)$ が存在すると仮定する。$A(t)\in C^1[0,T]$ とする。このとき，(7)式の解は $^\forall(x,u)$ に対し一意的に，すべての $t\in[0,T]$ で存在し，$\Xi$ と $H$ は $x,u$ に関し1回連続的微分可能である。

さらに次の Liouville の定理が成り立つ：

$$J(t)\equiv\frac{D[\Xi(t;x,u,A),\ H(t;x,u,A)]}{D(x,u)}=1. \tag{8}$$

［補論 6］ $\sigma(x)$ は上と同じ正則性を持つとし，$\psi(x)\in C^1(E)$，$\{A_n(t)\in C^1[0,T]\}$ は $C[0,T]$ の意味で $A(t)$ に収束するとする。このとき

$$
\begin{aligned}
&\xi(t,x_0;A_n)\equiv \Xi(t;x_0,\psi(x_0),A_n),\\
&\eta(t,x_0;A_n)\equiv H(t;x_0,\psi(x_0),A_n)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

は，それらの導函数 $\partial\xi/\partial x_0$，$\partial\eta/\partial x_0$ と共に $n\to\infty$ で $(t,x_0)\in E\times[0,T]$ 上一様に収束する。この極限を $\xi(t,x_0;A)$，$\eta(t,x_0;A)$ と記す。$A(t)$ が Wiener 過程なら，$\xi(t,x_0;A)$ と $\eta(t,x_0;A)$ は確率微分方程式

$$
\begin{aligned}
&d\xi/dt=\eta\ ,\quad d\eta/dt=\sigma(\xi)A'(t)\ ,\\
&\xi(0)=x_0\ ,\quad \eta(0)=\psi(x_0)\ ,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

の解である。

［補論 7］ $\sigma(x)$ と $\psi(x)$ について［補論 6］と同じ仮定を置く。$A(t)$ を $C[0,T]$ で任意にとるとき，$(x,v)$-平面の曲線

$$
\begin{aligned}
&x\equiv \Xi(t;x_0,\psi(x_0),A)=\xi(t,x_0;A),\\
&v\equiv v(x,t)\equiv H(t;x_0,\psi(x_0),A)=\eta(t,x_0;A),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

は任意の $t\in[0,T]$ で $x_0$ をパラメーターとする $C^1$ 曲線で特異点も重複点も持たない。この曲線上，$\partial x/\partial x_0=\partial\xi(t,x_0;A)/\partial x_0=0$ となる点を除いては次式が成り立つ：

$$
\partial v(x,t)/\partial t+v(x,t)\partial v(x,t)/\partial x=\sigma(x)A'(t) \tag{12}
$$

上の[補論7]は[補論5,6]をまとめて得られる。

典型的な $x-v(x,t)$ 曲線の $t$ による変化を図1に示す。

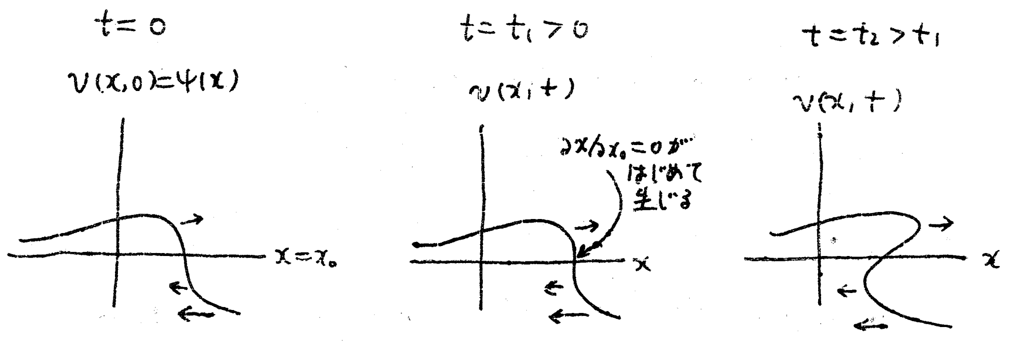


図1

このように、(11)で定められる $v(x,t)$ は(3)式の形式的非粘性方程式の解に近いが、多価になる難点がある。この難点を解消する処方箋は、$\partial x/\partial x_0=0$ となる点が生じて後、いわゆる「shock discontinuity」を導入して修正することである。図2のよ

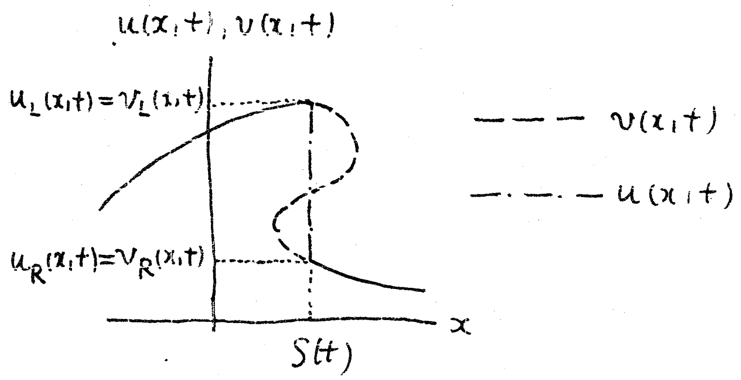


図2

うに $x=S(t)$ に不連続を入れて $v(x,t)$ を修正し、$u(x,t)$ を定義しよう。$S(t)$ は、いわゆる Rankine-Hugoniot の関係で定められる。これを導出するのに、次の事に注意する。このような構造を持つ $u(x,t)$ が §2 の Kruzhkov の意味の generalized solution であるならば，$u_\nu(x,t)$ の $L^1(E)$ （さらに $|u_\nu|$ の $\nu$ に関して一様な有界性が言えるから，$L^1(E\times[0,T])$ ）の意味での $\nu\downarrow 0$ の極限，従ってもちろん超函数の意味での極限，従って (3) 式の超函数の意味での極限である

$$\partial u/\partial t + \tfrac{1}{2}\partial u^2/\partial x = \sigma(x)A'(t) \tag{13}$$

を満たすもの，でなければならない。仮に $u(x,t)$ が $x=S(t)$ に孤立した第一種不連続を持つとすると，次式が成り立つ：

$$\begin{aligned}0= &[\partial u/\partial t+\tfrac{1}{2}\partial u^2/\partial x-\sigma(x)A'(t)]-\delta[x-S(t)]\\ &\times\{u_L[S(t),t]-u_R[S(t),t]\}\Big\{-\frac{dS}{dt}+\frac{1}{2}\big[u_L[S(t),t]\\ &+u_R[S(t),t]\big]\Big\}.\end{aligned} \tag{14}$$

ここで右辺第1項は普通の意味の微分で，$u(x,t)$ を $v(x,t)$ から作った場合，(12) 式によって消える。即ち

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\{u_L(S,t)+u_R(S,t)\} \tag{15}$$

が成り立たねばならない。これが Rankine-Hugoniot の関係である。(15) 式は常に，既知の函数 $v(x,t)$ を用いて，$u_{\genfrac{}{}{0pt}{}{L}{R}}(x,t) \equiv v_{\genfrac{}{}{0pt}{}{L}{R}}(x,t)$ から，$S(t)$ を決定する微分方程式と見做すことができる。この微分方程式は，$\partial x/\partial x_0=0$ がはじめて生じるところで特異性を示すが，いくつかの手続きを補うことによって一意的に $S(t)$ を決定することができる。そしてもしも $\partial x/\partial x_0$ の零点がすべて孤立するなら，$A(t)$ がなめらかであるなしに

かかわらず，このようにして構成した $u(x,t)$ が［結論4］の意味で Krughkov の generalized solution であることが示される。どのような場合に $\partial x/\partial x_0$ の零点が孤立するか？

［結論8］$\sigma(x)$, $\varphi(x)$ が有限フーリエ級数であるとする。任意の $A(t)\in C[0,T]$ と $\forall t\in[0,T]$ に対し $\xi(t,x_0;A)$ 及び $\eta(t,x_0;A)$ は $x_0$-平面の実軸上正則である。従って $\partial x/\partial x_0=\partial\xi(t,x_0;A)/\partial x_0$ の零点は $x_0$-軸上孤立し，従って $x$ 軸上でも図3のような偶然の重りを除いて孤立する。

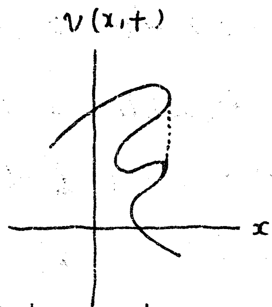


図3

特に $\forall t\in[0,T]$ において，$x\in E\equiv[0,I]$ 上での零点の数はつねに有限個である。従って Krughkov の generalized solution は高々有限個の不連続しか持たない。

有限フーリエ級数は $L^1(E)$ で稠密であるから，この結論はホワイトノイズを含めた外力をうける forced Burgers turbulence について，実際どのような構造が生じうるのかを示すと考えてよいであろう。

## §4. 付記

Force-free ($A(t)\equiv 0$) の Burgers 方程式を含む場合について Crandall[5] は次の事を示した：Krughkov の generalized solution

である $u(x,t)$ は，$L^1(E)$ 内に定義域を持つある生成作用素 $G_{Crandall}$ によって，$L^1(E)$ 上の発展方程式

$$du/dt = G_{Crandall}(u)$$

で記述され，$u \in C^1(E)$ ならば $G_{Crandall}(u) = -\frac{1}{2}\partial u^2/\partial x$ が成り立つ。この事柄は次の事を示唆する：(3)式に従う $u_\nu(x,t)$ の極限としてここで考察した $u(x,t)$ は，「確率発展方程式」とでも呼ぶべきもの，

$$du/dt = G_{Crandall}(u) + \sigma(x)A'(t) \qquad (16)$$

によって記述できるであろう。しかし，$\sigma(x)A'(t)$ は $L^1(E)$ 上の作用素と見ることが一般にできないし，$G_{Crandall}$ は $L^1(E)$ 上の線形作用素でもない。だから (16) をどのように意味付ければよいのか，$A(t)$ の見本毎の発展方程式としてか，あるいは $L^1(E)$ 上の確率微分方程式としてか，が私にはわからない。あるいはこれは既によくわかっていることなのかもしれない。御教示等頂ければ幸いである。

## 文献


1) R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 5(1959), 497.

2) R. Kubo, 物性研究, Vol. 3 (1964), 350.

3) M. Rosenblatt, Quart. Appl. Math. 18 (1961), 387.

4) S. N. Kruzhkov, Math. USSR Sbornik 10 (1970), 217.

5) M. Crandall, Israel J. Math., 12 (1972), 108.

増田久弥, 発展方程式, 紀伊国屋書店 (1975), 第9章.

宮寺 功, 非線型半群, 紀伊国屋書店 (1977), 第7章.