数理解析研究所講究録
第 405 巻 1980 年 288-294

量子情報通信路の作用素代数的取り扱い

東京理科大学　情報科学科
大矢雅則

レザーの発見・発展と相俟って，近年，レザーによる信号の伝送の問題が非常に重要なものとなってきている。レザーの出現は，周波数がラジオ波のそれの1000倍以上である光波情報の伝送に使用することを可能にした。このような状況下にあって，量子力学的情報理論がレザー光による通信の基礎として確立されることが望まれている。

ここでは，量子論的通信路の数学的構造を調べ，情報（エントロピー）をロスなく伝送するためにはどのような通信路が必要であるかを考えてみることにする。

情報理論においては，入力側と出力側の力学系（空間）が必要となる。

入力 ⟶《通信路》⟶ 出力

これらの力学系は，次の W^* 三ツ組で描かれるとしよう。

入力側の W^*-力学系を $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha(R))$ で表わし，出力

側のそれを $(\mathcal{B}, \mathfrak{S}(\mathcal{B}), \tau(\mathbb{R}))$ で表わすことにする。

ここで，$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ はそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ 上の単位元 I を含む Von Neumann 代数であり (i.e., $\mathcal{A} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{A}' \triangleq \{Q \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid [A, Q] = 0 \ \ \forall A \in \mathcal{A}\}$ とすると，$\mathcal{A}'' \triangleq (\mathcal{A}')' = \mathcal{A}$ となる Banach*-代数)，$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$, $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ はそれぞれ $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 上の正規状態の全体とする (i.e., $\forall \varphi \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$, $\varphi(A^*A) \geqq 0$, $\varphi(I) = 1$, $\varphi(A_\alpha) \uparrow \varphi(A)$ for $\forall A_\alpha \uparrow A$ in $\mathcal{A}$)。又，α，τ は $\mathbb{R}$ から $\mathcal{A}$ 及び $\mathcal{B}$ の*自己同型群への強連続な写像である (i.e., $\alpha_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, $\alpha_t(AB) = \alpha_t(A)\alpha_t(B)$, $\alpha_t(A^*) = \alpha_t(A)^*$ $\lim_{t \to 0} \|\alpha_t(A) - A\| = 0$ for $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$)。

通常の量子系は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ とその上の有界作用素の全体 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 及び系の Hamiltonian H によって生成されるユニタリー作用素 $U_t = e^{itH}$ によって記述されるが，W^* 三ツ組による記述は，それの一般化になっているものである。

$\mathcal{A}$ の状態を $\mathcal{B}$ の状態へ変える通信路は古典的な情報理論からの類推によって，次のように定められる。

通信路 Λ^* とは $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への次の条件を満す写像 Λ の共役写像である：

(1) Λ は完全正定値 (i.e., すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$\mathcal{B}$の元からなる $n\times n$ 正定値行列 (B_{ij}) , $B_{ij}\in\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$の $n\times n$ 正定値行列 (ΛB_{ij}) にうつす。)

(2) Λ は ultraweakly continuous.

(3) $\Lambda(I)=I$。

完全正定値写像は非可換条件付期待値の拡張ともいえる概念であり，今や，物理学の様々な領域で重要な道具となっているものである。(e.g., Generalized Master eq とか Pauli Master eq などを導く場合の縮約は完全正定値写像である。)

通常の通信理論において，通信路のエルゴード特性がその解析のために重要な役割を演じている。そこで，我々の非可換通信路 (non-commutative channel) においても，エルゴード特性を導入しておく必要がある。そのために，まず，いくつかの集合を定義することから始めよう。

$I(\alpha)$を αの下で不変な状態の集合とし，$K(\alpha)$ をαに対して K.M.S. 条件を満す状態の集合とする。同様にして，$I(\tau)$, $K(\tau)$ を定義する。更に，$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$の部分集合 $\mathcal{S}$に対して，ex$\mathcal{S}$は$\mathcal{S}$の端点の全体を表わすことにする。 (e.g. $\mathcal{S}=I(\alpha)$, $K(\alpha)$, $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$))

さて，エルゴード通信路を考えよう [3]。

<Definitions>

(1) Λ^* が定常通信路（stationary channel, $\Lambda^* \in SC$）であるとは $\Lambda \circ \tau_t = \alpha_t \circ \Lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$ を満すものをいう。

(2) Λ^* がエルゴード通信路（$\Lambda^* \in EC$）

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ $\Lambda^* \in SC$ 且 $\Lambda^*(exI(\alpha)) \subset exI(\tau)$.

(3) Λ^* が KMS 通信路（$\Lambda^* \in KC$）

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ $\Lambda^* \in SC$ 且 $\Lambda^*(K(\alpha)) \subset K(\tau)$.

$\mathcal{S}$ の中の状態を Λ^* によって伝達したとき，出力側で得られた結果から，送られた状態を言い当てうることが望しい。これを可能にする通信路として決定的通信路（deterministic channel）という概念を導入しておく[4]。

(4) $\Lambda^* \in DC(\mathcal{S}) \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{S}$ の任意の状態 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ において，$\Lambda^*\varphi_1 = \Lambda^*\varphi_2$ ならば $\varphi_1 = \varphi_2$.

最後に，W^*力学系におけるエントロピーを導入しよう[4]。状態 $\varphi \in \mathcal{S} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ に対して，φ が $ex\mathcal{S}$ の元の convex combination に分解されるとき：$\exists \lambda_n \in (0,1)$, $\exists \{\varphi_n\} \subset ex\mathcal{S}$

s.t. $\sum_n \lambda_n = 1$, $\varphi = \sum_n \lambda_n \varphi_n$,

φ のエントロピー $S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ を

$$S^{\mathcal{S}}(\varphi) = \inf\{-\sum_n \lambda_n \log \lambda_n\}$$

と定める。ここで"inf"は上のような様々な分解に関して取る。φがこのように分解できないとき，$S^{\mathcal{S}}(\varphi)=\infty$と定める。

$\mathcal{S}=K(\alpha)$のとき，$S^{\mathcal{S}}(\varphi)=S^{K}(\varphi)$，$\varphi\in K(\alpha)$，

$\mathcal{S}=I(\alpha)$のとき，$S^{\mathcal{S}}(\varphi)=S^{I}(\varphi)$，$\varphi\in I(\alpha)$，

$\mathcal{S}=\mathfrak{S}(\mathcal{A})$のとき，$S^{\mathcal{S}}(\varphi)=S(\varphi)$，$\varphi\in\mathfrak{S}(\mathcal{A})$，

と表わすことにする。

この$S(\varphi)$は$\mathcal{A}=\mathbf{B}(\mathcal{H})$のとき通常のvon Neumannエントロピーに一致する。

二つの状態$\varphi,\psi\in\mathfrak{S}(\mathcal{A})$間のある意味での相異を表わす量として相対エントロピー[1,2,5]が次のように定められる。

$$S(\varphi|\psi)=\begin{cases}\infty & \text{for } \psi\not\ll\varphi\\ -\langle\Psi,\log\Delta_{\Phi,\Psi}\Psi\rangle & \text{for } \psi\ll\varphi.\end{cases}$$

ここで，Ψはψの巡回且分離ベクトルで，$\Delta_{\Phi,\Psi}$はrelative modular operatorである。詳しくは[1]参照。

以上の準備の下で，次の結果が得られる[3,4]。

《主要結果》

<1> エルゴード通信路，KMS通信路は存在する。

<2> $\Lambda^{*}\in EC \Rightarrow \Lambda^{*}$ mod $I(\alpha)$でSCの中の端点

〈3〉 von Neumann 代数 $\mathcal{B}$ が単純であり $\mathcal{A}=\mathbb{B}(\mathcal{H})$ のとき、 $\Lambda^* \in EC \Longleftrightarrow \Lambda^*$ が mod $I(\alpha)$ で SC の中の端点.

〈4〉 $\Lambda^* \in SC$, $\alpha_t(A) = U_t A U_{-t}$ (U_t unitary operator on $\mathcal{H}$) $\Longrightarrow$ 強連続な一径数ユニタリー群 $\{T_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ が存在して、 $\rho(\tau_t(B)) = T_t \rho(B) T_{-t}$ (ここで ρ は $\Lambda(B) = V^* \rho(B) V$ で定められる(Stinespring の定理) $\mathcal{B}$ の表現である)。

〈5〉 $\Lambda^* \in SC$ のとき、
完全正定値写像 Ξ が存在して $\Xi \circ \tau_t = \alpha_t \circ \Xi$ 且 $\Xi \leq \Lambda$
$\Longleftrightarrow \rho(\mathcal{B})' \cap T(\mathbb{R})' \neq \mathbb{C} I$.

〈6〉 $(\mathcal{A}, \alpha)$ が η-abelian (i.e. $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \varphi(D^*[\alpha_t(A), B]D) = 0$ for $\forall \varphi \in I(\alpha)$, and $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$) で且 Λ が $*$-準同型であれば $KC = EC$.

〈7〉 $\Lambda^* \in DC \cap KC$ 且 Λ が $*$-準同型のとき
$S^K(\varphi) = S^K(\Lambda^*\varphi)$ for $\forall \varphi \in K(\alpha)$.

〈8〉 $\Lambda^* \in DC(I(\alpha)) \cap EC \Longrightarrow S^I(\varphi) \geq S^I(\Lambda^*\varphi)$ for $\forall \varphi \in I(\alpha)$.

〈9〉 $\Lambda^* \in EC$ のとき、
(i) Λ^* が $\mathrm{ex}\, I(\alpha)$ 上で bijection $\Longrightarrow S^I(\varphi) = S^I(\Lambda^*\varphi)$ for $\forall \varphi \in I(\alpha)$
(ii) Λ が $*$-準同型で $\Lambda^* \in DC(\mathrm{ex}\, I(\alpha)) \Longrightarrow S^I(\varphi) = S^I(\Lambda^*\varphi)$ for $\forall$ G-abelian $\varphi \in I(\alpha)$.

〈10〉 Λ^* が $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ 上で bijection $\Longrightarrow S(\varphi) = S(\Lambda^*\varphi)$ for $\forall \varphi \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$.

〈11〉 $\Lambda(\mathcal{B})$ が φ の centralizer $\mathcal{A}_\varphi$ に属する $*$-代数で、

$S_{\Lambda(\mathcal{B})}(\varphi|\omega) = S(\varphi|\omega) < \infty$ のとき Λ^* は pair $\{\varphi, \omega\}$ に対して deterministic.

《文献》

[1] H. Araki, Relative Entropy of states of von Neumann Algebras I and II ; R.I.M.S. Kyoto Univ. 11, 809, 1976 and 13, 173, 1977.

[2] F. Hiai, M. OHYA and M. Tsukada, Sufficiency, KMS Condition and Relative Entropy, to appear.

[3] M. Ohya, Quantum Ergodic Channels in Operator Algebras ; Res. Rep. on Inform. Sci. A-69, 1980.

[4] M. Ohya, Entropy Transmission in Non-Commutative Dynamical Systems ; preprint.

[5] H. Umegaki, Conditional Expectation in an Operator Algebra III and IV ; Kodai Math. Sem. Rep. 11, 51, 1959 and 14, 59, 1962.