数理解析研究所講究録
第406巻 1980年 93-99

幾何の定理を，計算機に証明させる試み
—呉文俊教授の成果—

京大数理研　一松 信

0. 概説

標題の研究は数多い。日本でも1960年代に西村敏男教授が立教大のHIPAC-101によって行った研究は有名である．しかしこれは必要な定理を，全部人間がお膳立てして入力する方式であったから，結果的には，計算機にやらせたことに意義があったといえる．

ところで，初等幾何学はHilbertの公理系で完全に体系化されている．そしてその機械的証明手順が，Tarski[2](1948)によって与えられている．もしも順序の公理を使わずにすむ定理については，座標幾何の形で定式化すれば，ある式(実質的には多変数の多項式)が恒等的に0になるか否かという，決定可能な式の計算により，手間さえいとわなければ人手でも，また計算機によっても，少くとも原理的には証明できるはずである．その意味で，これは数式処理の一つの応用例と考えられる．

このたび中国に講義に招かれた折，呉文俊教授の研究[1]を聞

き，直接お話しを伺うこともできた。注目すべき研究と思われるので，ここに紹介する．

1．呉文俊教授とのであい

呉文俊（Wu Wen-Tsün）教授は，もともと微分幾何学の専門であり，É. Cartan，J. Leray の下に留学した方である。現在中国科学院系統科学研究所（北京市海淀区中关村）の副所長をしておられる．系統科学は日本でいうシステム科学であり，この研究所は，1980年4月に数学研究所から独立した新しい研究所である．ただし私が訪ねた同年6月には，まだ同じ建物中に同居していた．

筆者が呉教授の成果を知ったのは，西安で講義中，光明日報紙上である．帰途北京市に立寄った折，お忙しい呉教授のお暇をえて，1時間だけお目にかかって（英語で）お話を伺うことができた。あいにく当日停電（！—開発途上国での計算機の伏兵）で，実演してもらうことができなかったが，資料もいただき，大体の方針は理解できた．

使用しているのは，何とHPの電卓 3045 である．もちろん 256KW まで記憶を増設し，フロッピーディスク，ディスプレイもつけているが，言語は BASIC，数式処理も手製の当面の目的専用の自家用である．速度は極度に遅く，しば

しば一つの定理の証明に数十時間を費しているが，休日や人間の"time sharing"をうまくやって，これで着々と成果をあげている．恵れない環境の下で，楽しそうに研究に打ち込み着々成果をあげている老教授の姿に，深い尊敬の念をいだいた．―― 現在の中国には，大学教授には公式の定年がない．そのせいか，60代，70代の老教授が，最も元気で活躍しておられる．40代，50代の次の世代の学者に，バトン・タッチが滑らかに進むかどうかが，中国の大きな課題であろう．

2. 方針

Descartes の座標幾何学は，幾何学と代数学の融合を目ざしたものだったが，結果的には，幾何学を記号代数に還元することになった．

角度を三角函数に直せば，初等幾何の（等しいことを示す）定理は，いくつかの条件（倍角公式など）式

(1) $p_1(x_1, ---, x_n) = 0$, ---, $p_m(x_1, ---, x_n) = 0$

の下で，恒等的に目的とする函数が 0 ?

(2) $q(x_1, ---, x_n) = 0$?

を示す問題に帰着される．p_i, q は多項式が通例であり，これは (1) で定まる代数的多様体上で (2) が成立するか，あるいは，$p_1, --, p_m$ から生成される多項式環内のイデアル

に q が含まれるか？という問題になる。

これは決定可能で，具体的算法も Seidenberg[3] らによって示されているが，計算機で実現するには，若干工夫がいる。

3. 実例

例1. 三角形の三内角 A_1, A_2, A_3 に対して

(3) $\sin 2A_1 + \sin 2A_2 + \sin 2A_3 = 4\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$

を証明せよ。

$\sin A_i = s_i$, $\cos A_i = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$

$\sin 2A_i = x_i$, $\cos 2A_i = y_i$ （当面 y_i は不要）

とおき，$s_3 = z_1$, $c_3 = z_2$ とおく。三角函数の定義や加法定理，$A_1 + A_2 + A_3 = 180°$ という関係などから，いくつかの関係式が生ずるが，その 0 となるべき式を次のようにおく：

(4) $p_i = s_i^2 + c_i^2 - 1$ $(i = 1, 2)$

(5) $p_{4+i} = x_i - 2c_i s_i$ $(i = 1, 2, 3)$

(6) $p_3 = z_1 - c_2 s_1 - c_1 s_2$, $p_4 = z_2 - s_1 s_2 + c_1 c_2$

0 であることを証明すべき式は

$$q = x_1 + x_2 + x_3 - 4 s_1 s_2 z_1$$

である。x_i に (5) を代入し，z_1 に (6) を代入し，… として整理すると，容易に

$$q = -2c_2 s_2 p_1 - 2c_1 s_1 p_2 - 2(s_1 s_2 + c_1 c_2) p_3 + 2 z_1 p_4 + p_5 + p_6 + p_7$$

と変形できる．したがって (4), (5), (6) がすべて 0 なら $g\equiv 0$ であって，証明できた．

例2　同じ条件の下で

(7)　$\cos 2A_1+\cos 2A_2+\cos 2A_3=\cancel{+}4\cos A_1\cos A_2\cos A_3=0$

は正しいか？

上記にさらに

$$p_{7+i}=y_i-2c_i^2+1 \quad (i=1,2)$$

$$p_{10}=y_3+4c_1c_2s_1s_2-4c_1^2c_2^2+2c_1^2+2c_2^2-1$$

を追加すると，(7) の左辺にあたる

(8)　$\tilde{g}=-1+4c_1c_2p_4+p_8+p_9+p_{10}$

となり，0 にならない．したがって (7) は正しくない．もし (7) の右辺が -1 なら，$\tilde{g}+1$ は (8) の右辺の二項目以下のように書けるから，$p_1=0,\cdots,p_{10}=0$ の下で 0 となって，正しいことがわかる．

これは素朴な例であるが，同じようにして，Euclid原論の初めの方の定理はすべて証明できる．呉教授が成功した定理の中には，Simpson 線（三角形の外接円周上の任意の点から三辺に下した垂線の足は，同一直線上にある）や Feuerbach の定理（三角形の九点円は内接円及び傍接円に接する）といった，かなり高度の定理まで含まれている．—— もっとも Feuerbach の定理は，三頂点を平面ベクトルで表現して，

各円の中心の座標と半径をもとめると，3変数の対称式の計算になり，人手でも思ったほど難しい計算ではない．他方現在までの数式処理体系では，対称式の巧妙な計算が一つのテスト課題になりそうである．

4. 評価

この体系は，(7)のような真偽定かでない式を入力しても，正しく判定してくれる．従ってもっともらしいと思う式を入力して証明させることができれば，新しい定理を発見することさえできる可能性がある．

実際，呉教授は，Pascal 6角形及びその特別な場合にあたるPuppos の定理について，6角形の頂点の順序を入れ換えてできるPascal線の間の関係を図によって予測しては入力し，多くの失敗（予想が不成立）を繰返した後，ついに私があう数日前に"新しい"（自分が今まで知らなかったという意味で）定理の発見に成功した．これに気をよくした呉教授は，次には微分幾何学の定理に挑戦を始めた．「雑用が多くて，落ちついて論文をまとめる暇がなくて」と語る呉教授の言葉は，人事でないような印象を受けた．

もともとこの研究は，文化大革命当時，退屈しのぎに手計算で始めたものを，機械に載せたものであるらしい．初等幾

何学そのものが死んだ(?) といわれる現在，これまでの成果は，老教授の"道楽"にすぎないという見方も可能であろう．しかしこの着想は非凡である．何よりも真偽の判定を計算機にやらせようというのは，計算機が本当に数学の研究のための生きた道具として活用され始めた吉兆である．

数式処理は近年著るしく発展したが，数学自体への応用は，Hearn[4]自身がのべた通り，まだ手つかずである．これが未開拓の沃野なのか？ それともうかつに手のつけられない聖域なのか？ ― たぶんそれは，これからの数学者の態度によって定まるのであろう．

参考文献

[1] Wu Wen-Tsün(呉 文俊), On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry Scientia Sinica, 21, No. 2 (1978) 159-172

[2] Tarski,A. & McKinsey, J.C.C. A decision method for elementary algebra and geometry, Univ. of California Press,1948

[3] Seidenberg,A. A new decision method for elementary algebra, Lect. Notes in Math. 498,Springer 1975, p.14-40.

[4] Hearn,A. The personal algebraic machine, Invited Paper for IFIP-80, Proc. Inf. Proc. 80,North-Holland 1980,p.621-8.