数理解析研究所講究録
第 407 巻 1980 年 10-18

D－安定性

東理大　理工　戸川美郎

今、n種の商品があるとして、$P=(P_1,\cdots,P_n)$ をそれらの価格とする。価格Pに対して、超過需要$E(P)=(E_1(P),\cdots,E_n(P))$が定まり、これは転じて価格$P$に影響を与える。そこで、最も単純なモデルを考えるならば、それは

$$\frac{dP}{dt}=E(P) \qquad \cdots\cdots (i)$$

である。そして$E(P_0)=0$となる価格P_0が重要である。このような価格P_0は、時間がたっても変化しない。さて、$E(P_0)=0$であるだけでは、まだたいした意味を持たない。安定な均衡点P_0，すなわち、P_0の付近の点はすべて時間がたつとP_0へと漸近的に近づいて行くような均衡点P_0，が重要である。ここでは、記述を簡単にするために、（適当に原点を移動して）$E(0)=0$としておこう。原点でEを展開すると、AをEの原

点でのヤコブ行列 $(\partial E_j/\partial p_k)_{p=0}$ として，

$$\frac{dp}{dt}=Ap+2\text{次以上の項}$$

となる。原点は安定均衡点であるということは，Aが安定行列であること，すなわちAの固有値の実部はすべて負であるということである。厳密に言えば，Aの固有値の実部がすべて負でなくとも，すべて非正であり2次以上の項が適切であれば，安定均衡点でありうる。しかし，このような場合にはAに極くわずかの摂動を加えて安定均衡点でなくすることができ，安定均衡であっても構造不安定であり，重要さを欠く。このように，モデル(i)に関しては，均衡点が安定であるかどうかの判定は容易である。 ここで，もう少し複雑なモデルを考えよう。商品 j の価格 P_j の変化 $\frac{dP_j}{dt}$ は，(i)で仮定したように単に超過需要 E_j に等しいというのではなく，E_j のある関数であるとする。すなわち，

$$\frac{dP_j}{dt}=f_j(E_j(P)) \quad \cdots (ii)$$

とする。ただし，関数 f_j は，$f_j(0)=0$ であり $f'(0)>0$ であるという以外には具体的に特定できないとする。$E(0)=0$

であれば、$f_j(E_j(0))=0$, $j=1,\cdots,n$ であり原点は均衡点である。ここでは、そのように仮定する。さて、この均衡点の安定性が問題になる。(ii) を展開すると、

$$\frac{dP}{dt} = BP + 2\text{次以上の項}$$

となる、ただし、$B=\left(\partial(f_j\circ E_j)/\partial P_k\right)_{P=0}$ である。そこで、Bが安定行列であればよい。Bの成分をもう少し計算すると、$\partial(f_j\circ E_j)/\partial P_k = f_j'(0)\cdot\partial E_j/\partial P_k\ (P=0)$ であり、$D=\mathrm{diag}(f_1'(0),\ldots,f_n'(0))$ とすると

$$B=DA$$

であることがわかる。行列Dに関しては、対角行列であり対角成分はすべて正、という以外は何もわからない。そこでD－安定の概念が必要になる。

定義　$n\times n$ 行列がD－安定であるとは、対角成分がすべて正であるような任意の対角行列Dに対してDAが安定であること

行列Aが与えられたとき、それが安定かどうかを判定するこ

とは，Routh-Hurwitz の判定条件により可能である。しかし，AがD-安定であるかを（有限回の操作で）判定する条件は，今の所4次以上の場合では知られていない。従来，この問題に対して，行列論的手法による多くのアプローチが試みられてきたが［　］，ここでは，D-安定な行列全体の集合を幾何学的に調べることによるアプローチを述べる。以下では，行列Aが安定であるとは，Aのすべての固有値の実部が正であること（負ではなく！）とし，D-安定性もこの意味で定義する。こうすることにより，$(-1)^k$ が煩雑にかかってくるのを除くことができる。Aがこの意味で安定（もしくはD-安定）なら，$-A$ は普通の意味で安定（D-安定）である。

$n\times n$ 実行列全体の空間 M_n の中で，D-安定なものの集合 DS_n を考える。D_n を対角成分がすべて正な $n\times n$ 対角行列の全体，$\widetilde{D_n}$ を $n\times n$ 対角行列の全体とする。D_n は積に関して群であり，M_n に $(D,A)\longrightarrow DA$ と作用する。$A\in M_n$ に対し，この群Dの作用による軌道 $\{DA \mid D\in D_n\}$ を D_nA で表わす。これは $\det A\neq 0$ であれば n 次元であり，線形部分空間 $\widetilde{D_n}A=\{DA \mid D\in\widetilde{D_n}\}$ の［第1象限］である。V_n を，

$V_n=\{A\in M_n \mid \det A\neq 0$ であり，Aは実部0の固有値を持つ$\}$

と定義する。V_n は大部分のところでは滑らかな n^2-1 次元

超曲面であるが、特異点も持つ。

固有値の連続性から、AがD－安定である必要充分条件はAが安定でありD_nAはV_nと交わらないこと、であることがわかる。

さて、D－安定性の問題での最終目標は、集合DS_nを適当な不等式系で特徴づけることである。そのために、DS_4の境界$B(DS_4)$に注目して、そこで起っている現象を調べる。すると$B(DS_4)$はいくつかの部分に分けられ、第1の部分では現象P_1が起き、第2の部分では現象P_2が起き……というふうになるだろう。次に、各P_iに対し、$A=(a_{jk})\in M_n$で現象P_iが起きているならば$f_i(a_{jk})=0$となるような関数f_iを見つける。すると第i番目の部分はf_iの零点（超曲面になる、特異点があるかもしれない）に含まれ、$B(DS_4)$は各iについてのf_iの零点（超曲面）の合併に含まれることになり、DS_4は、これらの超曲面により切り取られる部分のひとつ（もしくは、いくつか）である。結局、DS_4は、これらのf_iを適切に組み合わせて超曲面不等式系を作ることにより特徴づけられることになる。（こういった議論が可能なのは、実は、DS_4, $B(DS_4)$といった集合はsemi-algebraic setであり、これらの関数としては、原理的には多項式を選ぶことができるからである）

まず $B(DS_4)$ を次の２つの部分に分ける。

$Ba(DS_4) = B(DS_4) \setminus DS_4$

$Bb(DS_4) = B(DS_4) \cap DS_4$

最初に $Ba(DS_4)$を調べる。$A \in Ba(DS_4)$ ならば、D_nAはV_nと交わるが、この交わりは、ごくわずかの摂動によりはずすことができる。従って、この交わりは非横断的である。$\hat{A} \in D_nA \cap V_n$として、$D_nA$と$V_n$との交わりが$\hat{A}$で横断的でないという条件を求めると、次のようになる。

$\det(\hat{A} - i\lambda I) = 0$ であり、

複素数 $(\hat{A}-i\lambda I)_1, (\hat{A}-i\lambda I)_2, \cdots, (\hat{A}-i\lambda I)_n$ は、２次元実ベクトル空間の元として線型従属となるような$\lambda \in R$が存在する。ただし$(A-i\lambda I)_j$は、行列$A-i\lambda I$のj行j列を除いた小行列の行列式とする。

証明は［　］。そこで、$A \in Ba(DS_n)$ ならば、$D=(d_{jj})$を適当に選んで、$\hat{A} = DA$ が上の条件を満たすようにできるわけで、逆に言うならば、上の条件から未知数$\lambda, d_{11} \cdots d_{nn}$を消去すれば、$Ba(DS_n)$ を零点に含むような関数が得られる訳である。しかし、この消去は、$n \geqq 4$ の場合には今のところできない（$n \leqq 3$ なら、すぐ消去でき、DS_4の特徴づけを得ることができる。しかし、この特徴づけは、すでに別の方

法で得られている[　]。上の条件では、実は、$\hat{A}$はV_4の特異点ではないとしている。$n \leqq 4$の場合では、こう仮定しても本質的差は生じない[　]のだが、$n \geqq 5$なら、この場合は別に考慮しなければならない。しかし、まず上の条件での消去が出来てからでない限り、このような場合（stratification の概念が必要になる）の研究に着手してもあまり意味はないであろう。

次に $B(DS_n)$ を調べる。$A \in B(DS_n)$ とすると，D_nA と V_n は交わらないのだが、Aをわずかに摂動することにより交わりを作ることができる。このことは、D_nAの境界とV_nが交わっているか、もしくはD_nAとV_nが"無限遠で"交わっていることを意味する。しかし、後者のケースは、D_nとV_nはスカラー倍により不変なのであり得ない。そこで、D_nAの境界とV_nが交わる条件を調べると、次の定理が得られる[　]

> $A \in B(DS_n)$ ならば、Aの主小行列のひとつか、もしくはA^{-1}の主小行列のひとつかが$B(DS_{n-1})$に含まれる。

この定理は、$n-1$次のD－安定性問題が解決されていればそれらの零点の合併が$B_b(DS_n)$を含むような関数を書き下すことができることを示している。$B_b(DS_n)$は$B_a(DS_n)$のよう

に新らしい困難を付け加えることはしない。結局、本質的なのは、先の条件での消去である。ところで、上の定理で、「Aの主小行列……」だけでなく「A^{-1}の主小行列……」が表われるのは、多少意外であるが、これは本質的であり落とすことができない。実際、これがあるために、復産物として、次の、

Johnson problem

　AがD－安定なら　A＋IもD－安定か?

の反例を作ることができる。

$$\begin{bmatrix} 100 & 70 & 70 & 280 \\ -400 & 100 & 70 & 280 \\ -400 & -400 & 100 & 280 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

は、この反例となっている［　］。

REFERENCES

1. C.A. Bahl and B.E. Chain, The inertia of Diagonal Multiples of 3×3 Real Matrices, Lin. Alg. and Appl. 18, 267-280 (1977)

2. C.R. Johnson, Sufficient conditions for D-sta-bility, J. Econ. Theory 9 (1974), 53~62

3. Y. Togawa, A geometric study of D-stability problem, preprint