数理解析研究所講究録
第 407 巻 1980 年 73-79

私有経済系のワルラス価格均衡点について

早大 数学科 野口 広
沢田 賢

G. Debreu, Y. Balasko は、純粋交換経済系におけるワルラス価格均衡点について研究している。([1], [2])。

ここでは S. Smale の論文[6]にもとづいて、私有経済系におけるワルラス価格均衡点の古典的条件の下でのいくつかの結果を述べる。

l, m, n で、それぞれ財の個数、消費者の人数、生産者の人数を示す。次の(1)~(5)を仮定する。

(1) 各消費者の消費集合は $R^l_+ = \{(x^1, \cdots, x^l) \in R^l \mid x^i > 0, i = 1, \cdots, l\}$ である。

(2) 全資源は一定 s で s は R^l_+ の元である。

(3) 消費者 i の効用関数 $u_i : R^l_+ \to R$ は、C^r 一写像で、可微分単調、可微分凸(定義については[5]参照のこと)である。さらに Debreu の境界条件([ ])みたす。

(4) 生産者 α の技術 $Y_\alpha \subset R^l$ に対して、

(a) Y_α は、境界を有しない R^l の C^r 一閉部分多様体で、その閉包 $\bar{Y}_\alpha$ はコンパクト集合である。

(b) Y_α は可微分凸である（[5]参照）。

(c) 各財 j に対して，財 j を input する様な生産$(y_\alpha^1, \cdots, y_\alpha^j, \cdots y_\alpha^l) \in Y_\alpha$ のとき $y_\alpha^j < 0$）を持つ生産者 α に対して，$|\sum_\alpha y_\alpha^j| < s^j$ 。

(5) 各消費者 i は生産者 α の利益配分 $\theta_{i\alpha}$ が与えられる。

ここで $\theta_{i\alpha} \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \theta_{i\alpha} = 1$ 。

この様に株の所有者の概念の導入された経済系を私有経済系という。また集合

$$\Sigma = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^l)^m \times \prod_\alpha Y_\alpha \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum y_\alpha + s\}$$

をこの経済系の状態空間という。

補題。Σ は $(\mathbb{R}_+^l)^m \times \mathbb{R}^{lu}$ の $(lm + \sum_\alpha \dim Y_\alpha - l)$ 次元部分多様体である。（$\dim Y_\alpha$ は Y_α の次元）

$S_+ = \{(p^1, \cdots\cdots, p^l) \in \mathbb{R}^l \mid (p^1)^2 + \cdots + (p^l)^2 = 1\} \cap \mathbb{R}_+^l$ で示し，S_+ を価格系という。仮定(3)によって各消費者 i に対して需要関数と呼ばれる C^{r-1} 写像 $f_i : S_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^l$ が存在して次の (A), (B) を満足する，（[3]）

(A) $f_i(p, w)$ は集合 $B_i = \{x_i \in \mathbb{R}_+^l \mid p \cdot x_i \leqq w\}$ 上で u_i の最大値を与える（$p \cdot x_i$ は p と x_i の直積）。

(B) $S_+ \times \mathbb{R}_+$ の中の点列 (p^q, w_i^q) が $(\bar{S}-S)\times\mathbb{R}_+$ の中の点 (p^0, w_i^0) に収束するとき，$|f_i(p^q, w_i^q)| \longrightarrow +\infty$。

また(4)の(b)によって各生産者 α の技術 Y_α に対して，価格 $p \in S_+$ に対して利益 $p\cdot y_\alpha$ が最大となる様な生産 $y_\alpha \in Y_\alpha$ を対応させる様な生産関数と呼ばれる C^r－写像 $\eta_\alpha : S_+ \longrightarrow Y_\alpha$ が存在する（[5]）。

$Q_s = \{ r = (r_1, \cdots, r_m) \in (\mathbb{R}_+^l)^m \mid \sum_{i=1}^m r_i = s \}$ とする。この元 r を賦存配分（endowment allocation）という。以下 $Q_s \neq \phi$ であると仮定する。Q_s は $(\mathbb{R}_+^l)^m$ の $l(m-1)$ 次元部分多様体。

定義。与えられた賦存配分 $r \in Q_s$ に対して，$(\mathbb{R}_+^l)^m \times \prod_\alpha Y_\alpha \times S_+$ の元 (x, y, p) がワルラス価格均衡点（walras price equilibrium）であるとは，次の条件がみたされることである。

(1) $(x, y) \in \mathcal{L}$，つまり $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha + s$

(2) 各 x_i は，i の予算集合

$$B_i(y, p) = \{ x_i \in \mathbb{R}_+^l \mid p\cdot x_i = p\cdot r_i + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p\cdot y_\alpha \}$$

上で効用関数 u_i の最大値を与える。つまり，

$$x_i = f_i(p,\ p r_i + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p\cdot y_\alpha).$$

(3) 各 y_α は Y_α 上で p に関する利益 $p\cdot y_\alpha$ を最大する。すなわ

ち．$\eta_\alpha(p)=y_\alpha$。

Q_0の任意の元rとこれに対するワルラス価格均衡点(x,y,p)との対(r,x,y,p)のつくる集合を$\Sigma\subset Q_0\times(\mathbb{R}^l_+)^m\times\prod Y_\alpha\times S_+$で示す。

補題。Σは，$Q_0\times(\mathbb{R}^l_+)^m\times\prod Y_\alpha\times S_+$の$m(l-1)$次元部分多様体である。

定義。正射影 $\Pi_0 : Q_0\times(\mathbb{R}^l_+)^m\times\prod Y_\alpha\times S_+\longrightarrow Q_0$

$$(r,x,y,p)\longrightarrow r$$

の多様体Σ上への制限写像 $\Pi=\Pi_0|\Sigma:\Sigma\to Q_0$ をデブルー写像（Debreu map）または，カタストロフィー写像（Catastroph map）という。

Πの特異点(r,x,y,p)，特異値$\Pi(r,x,y,p)$をそれぞれ，カタストロフィー点，カタストロフィー値という。カタストロフィー値の集合をカタストロフィー集合といいCで示す。$R=Q_0-C$は，正則値の集合である。

補題。$\pi : \Sigma \longrightarrow Q_s$ は proper map である。すなわち K が Q_s のコンパクトな部分集合であると、$\pi^{-1}(K)$ は Σ のコンパクトな部分集合である。

証明。$\Sigma' = \{(r, p) \in Q_s \times S_+ \mid \sum_{i=1}^{m} f_i(p, p\cdot r_i + \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_{i\alpha} p\cdot \eta_\alpha(p)) = \sum_{\alpha=1}^{n} \eta_\alpha(p) + \omega\}$ とする。いま点列 $\{e^\nu\} = \{(r^\nu, p^\nu)\} \subset K \times S_+ \cap \Sigma'$ を与える。このとき、Σ' のある点 (r^0, p^0) に収束する様な部分列 $\{e^{\nu'}\}$ が存在することを示す。K がコンパクトであるからその消費者 i の財空間への正射影 K_i もコンパクト。また Y_α, S_+ はコンパクト集合 $\bar{Y}_\alpha$, $\bar{S}_+$ にそれぞれ含まれている。したがって $(r^0, p^0) \in K \times \bar{S}_+$ に収束し、$p^{\nu'}\cdot r_i^{\nu'} + \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_{i\alpha} p^{\nu'}\eta_\alpha(p^{\nu'})$ がある値に収束する様な部分列 $\{(r^{\nu'}, p^{\nu'})\}$ が存在する。いま $p^0 \in S_+$ を示す。もし $p^0 \in \bar{S}_+ - S_+$ であれば需要関数の条件(B)により $|f_i(p^{\nu'}, p^{\nu'}\cdot r_i^{\nu'} + \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_{i\alpha} p^{\nu'}\cdot \eta_\alpha(p^{\nu'}))| \longrightarrow +\infty$ となる。所が、$(r^{\nu'}, p^{\nu'}) \in \Sigma'$ より

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p^{\nu'}, p^{\nu'}\cdot r_i^{\nu'} + \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_{i\alpha} p^{\nu'}\cdot \eta_\alpha(p^{\nu'})) = \sum_{\alpha=1}^{n} \eta_\alpha(p^{\nu'}) + \omega$$

であり、$\eta_\alpha(p^{\nu'}) \in \bar{Y}_\alpha$ であるから、$\sum_{i=1}^{m} f_i(p^{\nu'}, p^{\nu'}\cdot r_i^{\nu'} + \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_{i\alpha} p^{\nu'}\cdot \eta_\alpha(p^{\nu'}))$ は有界である。$f_i(p, p\cdot r_i + \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_{i\alpha} p\eta_\alpha(p)) \in R^l_+$ であるから各 $f_i(p, p\cdot r_i + \sum \theta_{i\alpha} p\cdot \eta_\alpha(p))$ は有界となりこれは矛盾。よって $p^0 \in S_+$ である。そして、f_i と η_α の連続性より $(r^0, p^0) \in \Sigma'$。　いま $\{(r^\nu, y^\nu\ y^\nu, p^\nu)\}$ を $\pi^{-1}(K)$ の中の点列とする。このとき、$\{(r^\nu, p^\nu)\}$ は Σ' の点列であるから前の議論によりある点 $(r^0, p^0) \in \Sigma'$ に収束する部分列

$(r^{q'}, p^{q'})$ が存在する。ここで部分列 $\{(r^{q'}, x^{q'}, y^{q'}, p^{q'})\}$ が $(r^0, x^0, y^0, p^0) \in \Sigma$ に収束することは明らか。($y^0_\alpha = \eta_\alpha(p^0)$ $x_i^0 = f_i(p^0, p^0 \cdot r^0 + \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_{i\alpha} p^0 \cdot \eta_\alpha(p^0))$)。また $r_0 \in K$ であるから $(r^0, x^0, y^0, p^0) \in \pi^{-1}(K)$。したがって $\pi^{-1}(K)$ はコンパクト。

定理。デブルー写像 $\pi : \Sigma \to Q_0$ の各正則値 $r \in Q_0$ に対するワルラス価格均衡点 (r, x, y, p) の集合は有限集合であり，それらは r に対して連続的に変化する。すなわち，r に対するワルラス価格均衡点の集合を $\alpha_1(r), \cdots, \alpha_k(r)$ とすると，r の Q_0 における近傍 N と連続写像 $\alpha_q : N \to \Sigma$, $r \to \alpha_q(r)$, $q=1, \cdots\cdots k$. が存在し，N の任意の点 r' に対して $\alpha_q(r')$ は r' に対するワルラス価格均衡点となる。

よって π の正則値の集合 R は Q_0 の開集合であり，またカタストロフィー集合 C は Q_0 の測度 0 の閉集合である。

証明。Σ と Q_0 は次元 $l(m-1)$ の多様体である。よって $r \in Q_0$ が正則値であると $\pi^{-1}(r)$ は Σ の 0 次元部分多様体である。また補題によって $\pi^{-1}(K)$ はコンパクト集合であるから，$\pi^{-1}(r)$ は有限個の点の集合である。また，π は，局所微分同相写像であるから，それらは，連続的に変化する。さらにサードの定理([4])により $C = Q_0 - R$ は測度 0 の閉集合である。

また与えられた財存配分 $r \in Q_\alpha$ に対するワルラス価格均衡点の存在性については次の定理が成り立つ。

定理(Debreu). 各生産関数 $\eta_\alpha : S_+ \to R^{\ell}_+$ は，$\bar{\eta}_\alpha : \bar{S}_+ \to \bar{F}_\alpha$ への連続拡大出来るものと仮定する。すると，任意の $r \in Q_\alpha$ に対して $\pi^{-1}(r) \neq \phi$。

文献

[1] Y. Balasko, Economic Equilibrium and Catastroph Theory, An Introduction, Econometrica vol 46 No3 557-567

[2] G. Debreu, Economics with a finite set of equilibria, Econometrica Vol38, No3, 387-392

[3] G. Debreu, Smooth preference, Econometrica Vol40 603-616。

[4] 野口 広，福田拓生，初等カタストロフィー，共立全書，1976

[5] 析下 功，野口広，厚生経済学の基本定理についてのセミナーノート，日本交通政策研究会，1978

[6] S. Smale, Global Analysis and Economics Ⅵ, Journal of Mathematical Economics 3, 1976, 1～14。