数理解析研究所講究録
第 407 巻 1980 年 80-86

周期的粗代替系について

岩手大 教育 中島文雄

ある経済体がn種の財から成っているとし，それらの財を番号 $1, 2, \cdots, n$ で表す．$1 \leq i \leq n$ に対し，i財の時刻tでの価格を$p_i(t)$とし，価格体系をベクトル $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ で表す。時刻t，価格ベクトルpの下でのi財の超過需要量を$F_i(t, p)$で表す。

さて需要－供給の法則を数学的に定式化する．この際，ベクトルpの各成分p_iはすべて正であることが，価格の意味として要請されるので，pの属すべき集合R^+を

$$R^+ = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n ; \ x_i > 0 \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

と置く．ここで R^nでn次元ユークリッド空間を表し，$x \in R^n$に対し，x_iでそのi成分を表す．$x \in R^n$に対し，$x_i > 0 \quad (1 \leq i \leq n)$ ならば，$x > 0$ で表す．

需要－供給の法則を記述する方程式として

$$(1)\quad \frac{d}{dt} p_i = \lambda_i E_i(t, p) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

を考える．ここで $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は正の定数であり，t は時刻，p は価格ベクトルである．$E(t,p) = (E_i(t,p))_{1\leq i \leq n}$ は次の条件を満している；

(i) 周期 $\omega > 0$ が存在して

$$E(t+\omega, p) = E(t, p) \qquad ({}^{\forall}t \in R^1, p \in R^+).$$

(ii) R^+ の any compact subset K に対し定数 $L = L(K) > 0$ が存在して

$$|E(t,p) - E(t,q)| \leq L|p-q| \quad \text{for } p, q \in R^+,\ t \in R^1,$$

(iii) (粗代替の仮定) $1 \leq {}^{\forall}i \leq n$ に対し

$$E_i(t,p) \leq E_i(t,q) \quad \text{for } p \leq q \text{ and } p_i = q_i.$$

(iv) (Walras' law)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i E_i(t,p) = 0 \qquad ({}^{\forall}t \in R^1,\ p \in R^+)$$

ここで，$R^1 = (-\infty, \infty)$ であり，$p, q \in R^n$ に対し，$p_i \leq q_i$ $(1 \leq {}^{\forall}i \leq n)$ が成立すれば，$p \leq q$ と表す．

[注釈] (1)の周期性の意味について述べる。これまでの粗代替系では，需要と供給は時間に依存せず，$E(t,p)=E(p)$であった。著者は，この依存性が存在する場合を扱い，特にこの依存性が周期的である場合を考えた。これは需要−供給に対する季節の変化の影響を反映するものと考えた。この考え方の是非について，研究集会の参加者から貴重な助言を頂いた。

$E(t,p)$の例について述べる；

$$E_i(t,p) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, p_k \Big/ p_i \qquad (1\le i\le n),$$

ここで $(a_{ik}(t))_{1\le i,k\le n}$ は次の条件を満すとする；

(i) $a_{ik}(t)$ は t の連続関数で，period ω の周期関数とする；

(ii) $a_{ik}(t) > 0 \quad (i \ne k)$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(t) = 0 \quad (1\le k\le n)$,

(ii),(iii) は各々，粗代替の仮定とWalras law を意味している。

<u>定義1.</u> $p(t)$ を(1)の解とする。$p(t)$ が compact とは定数 $\alpha > \beta > 0$ が存在して

$$\alpha \ge p_i(t) \ge \beta \qquad (\forall\, 1\le i\le n,\ t\in R^1)$$

が成立することである。

[注釈] 明らかに 有界な解は必ずしも compact ではない.

定義 2. $p(t)$ を(1)の compact solution とする。$p(t)$ が asymptotically periodic of period ω とは, ある periodic solution $q(t)$ of period ω が存在して

$$p(t) - q(t) \longrightarrow 0 \qquad (t \to \infty)$$

となる事である.

[注釈]. 上の $p(t)$ の例は $\sin t + \frac{1}{t}$ である.

定理 system (1) に於て. any compact solution は asymptotically periodic of period ω である.

証明は[1]を見て下さい.

system (1) は, これまでの粗化替系を特殊なものとして含む. 上の定理の結果を, これまでの粗化替系について述べると次の様になる;

Corollary 1. system (1) に於て. $E(t,p)$ は時間 t に依存せず, $E(t,p) = E(p)$ とする。この時, compact solution $p(t)$ が少くとも1つ存在すれば, 均衡点 $\xi \in R^+$ が存在する. 即ち $E(\xi) = 0$ となる.

証明　$E(t, p) = E(p)$ より，$E(t, p)$ は時刻 t について任意の period $\omega > 0$ を持つとして良い．定理より compact solution（これを $p(t)$ とする）に対して，periodic solution $\bar{q}(t)$ が存在して

$$p(t) - \bar{q}(t) \to 0 \qquad (t \to \infty),$$
$$\bar{q}(t+\omega) = \bar{q}(t)$$

となる．今，ω は任意であるから，$\bar{q}(t) = \text{constant}$（$= \xi$ とする）となる．故に

$$E(\xi) = 0$$

Corollary 2.　$E(t, p) = E(p)$ とする．$E(p)$ は homogeneous of order $m > 0$ とする．即ち

$$E(\lambda p) = \lambda^m E(p) \quad \text{for } \lambda > 0 \text{ and } p \in R^+.$$

もし，少くとも1つ compact solution が存在すれば，(1) のすべての solution は compact であり，且つ asymptotically constant となる．

[注釈] 上の結果の under-line の部分は，global stability として知られている。これまでの global stability の発生のための十分条件では，仮定の

compact solution が均衡点であることが要請されていた。Corollary 2 は、この要請が不必要であることを示している。

<u>Corollary 2 の証明</u> 仮定より compact solution が存在するので、Corollary 1 より均衡点 $\xi \in R^+$, $E(\xi)=0$, が存在する。一方、粗代替の仮定より、$p(t)$ と $q(t)$ を (1) の解で、$p(0) \geqq q(0)$ とすれば

$$p(t) \geqq q(t) \qquad \text{for } t \geqq 0$$

が成立することが知られている。そこで、$p(t)$ を任意の解とし、$q(t) = \lambda \xi$，ここで $\lambda = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \dfrac{p_i(0)}{\xi_i}$ とすれば、$p(0) \geqq \lambda \xi = q(0)$ となる。

よって上の事より $p(t) \geqq q(t) \geqq \lambda \xi$ となる。

他方、Walras' law より、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2(t)}{\lambda_i} = \text{constant}$$

が導かれる。よって $p(t)$ は compact となる。

以上より、任意の解は compact となり、更に Corollary 1 より、asymptotically constant となる。

最後に、$E(t,p)$ の周期性を季節の変化と解釈すると都合の良い点について述べる。今、定理より compact solution は十分時間が経過すれば、periodic solution $q(t)$ (period ω) に近づく。この $q(t)$ に対し

$$\int_0^{\omega} E_i(t, q(t))\,dt = \int_0^{\omega} \frac{1}{d_i}\frac{d}{dt} q_i(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{d_i}\{q_i(\omega) - q_i(0)\} = 0 \qquad (1 \leq i \leq n),$$

即ち
$$\int_0^{\omega} E(t, q(t))\,dt = 0$$
となる。

この式は、価格体系 $q(t)$ の下では、需要と供給は one-period に渡る総計として均衡していることを示している。

文献

[1] Periodic gross-substitute systems, F. Nakajima, SIAM Journal Applied Mathematics vol. 36, No. 3 (1979), p. 421~427.