数理解析研究所講究録
第 408 巻 1980 年 1-12

極小葉層について

東北大 理　　押切 源一

1、最近、Sullivan [1] は、閉多様体上の foliation に対して、各 leaf を極小部分多様体とするようなリーマン計量が存在するための必要十分条件を与えた。§2 ではこの結果を簡単に紹介する。余次元 1 の foliation $\mathcal{F}$ が non-exponential growth な leaf をもつことと、自明でない $\mathcal{F}$-invariant measure が存在することとは同値であることが知られているし、この場合はかなり研究されている。しかし、$\mathcal{F}$-invariant measure が存在しない場合はあまりわかっておらず、前の場合のようにホモロジカルな議論も適用できないため、例えば、S^{2n+1}, $n \geq 2$, 上に余次元 1 の C^∞ foliation で、$\mathcal{F}$-invariant measure をもたないものが存在するかどうかもわかっていない。Sullivan-Rummler の結果から、この場合は適当なリーマン計量で $\mathcal{F}$ の leaves は極小部分多様体とみなせるので、こういう観点から foliation の構造を調べるのも興味深いことのように思われる。§3 では、リ

ーマン計量を与えた時に余次元1の C^∞ foliationがどうなっているかということを簡単な場合に考える。ここでの計量に関する条件は、リッチ曲率が非負という条件で、この場合極小葉層は全測地的で、foliationが現われるのは平坦な部分にしかないことがわかる。証明は、良く知られたBochnerのテクニックを使うだけのelementaryな議論ですむ。いろいろな曲率に非正や非負の条件をつけたときに、極小葉層や全測地的葉層が「単純」になっているかどうかは、今の所完全にはわかっていない。

以下ではすべて C^∞ として考える。

2、Sullivan-Kummler の定理 [1]、

多様体Mの次元を $n=p+q$ とする。

［定義1］ $\mathcal{F}=\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が M^n 上の余次元 q（又は、p 次元）のfoliationとは、

1）L_α はMの弧状連結な部分集合.

2）$L_\alpha\cap L_\beta=\phi$ $(\alpha\neq\beta)$ で $\bigcup_{\alpha\in A}L_\alpha=M$.

3）M^n の各点 p に対して次のようなchart (U,φ) がとれる.

a）$p\in U$, $\varphi: U\xrightarrow{\cong} D^p\times D^q\subset\mathbb{R}^n$, D^k は $\mathbb{R}^k$ の開単位球

b）$U\cap L_\alpha\neq\phi$ なら、$\varphi(U\cap L_\alpha)$ の連結成分は

$$\{(x_1,\cdots,x_n)\in D^p\times D^q;\ x_{p+1}=c_{p+1},\cdots,x_n=c_n\}.$$

と表わされる。ここで，$c_{p+1}, \cdots, c_n$ は各連結成分によって決まる定数。

以下，M は向きづけられた閉多様体とし，$\mathcal{F}$ の各 leaf も定義1,(3),(b)に両立するような向きをもつと仮定する。

$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda=1}^{\ell}$ を定義1,(3)のような charts による M の有限被覆で，次を満たすものとする（いつでもとれる）。

1）各 λ に対して定義1,(3),(b)を満たす chart $(V_\lambda, \psi_\lambda)$ で，$\overline{U_\lambda} \subset V_\lambda$, $\psi_\lambda : V_\lambda \xrightarrow{\cong} D_\lambda^p(2) \times D_\lambda^q(2)$，$\psi_\lambda | U_\lambda = \varphi_\lambda$ を満たすものがとれる。ここで，$D^k(2)$ は半径2の開球。

2）$x \in D_\lambda^q$ に対して，$P_\lambda(x) := \varphi_\lambda^{-1}(D_\lambda^p \times \{x\})$ とおくとき，任意の μ に対して，$P_\lambda(x) \cap P_\mu(y) \neq \phi$ なる $y \in D_\mu^q$ は高々一個しか存在しない。$P_\lambda(x)$ を plaque という。

このとき，$U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なら，local diffeom. $\gamma_{\lambda\mu} : D_\lambda^q \times \{0\} \longrightarrow D_\mu^q \times \{0\}$ が次のようにして定義できる；

$$\gamma_{\lambda\mu}(x) = y \quad ，ここで \quad P_\lambda(x) \cap P_\mu(y) \neq \phi .$$

［定義2］$X := \coprod_{\lambda=1}^{\ell} D_\lambda^q$ (disjoint union) とおく.

1）Γ：$\gamma_{\lambda\mu}$ から生成される X 上の pseudogroup. これを <u>holonomy pseudogroup</u> という。

2）μ が <u>$\mathcal{F}$-invariant measure</u> とは，X 上の非負 Borel measure で，各コンパクト集合上で有限の値をとり，次の意味で Γ-

不変のものをいう; $S\subset X$ が可測で、$\gamma\in\Gamma$ に対して $S\subset \mathcal{D}om(\gamma)$ ならば、$\mu(S)=\mu(\gamma(S))$.

3) Z_μ : $\mathcal{F}$-invariant measure μ から定まる <u>foliation cycle</u> とは p-form φ に対して

$$\langle Z_\mu, \varphi\rangle = \sum_{\lambda=1}^{l}\int_{D_\lambda^q}\left(\int_{\{x\}\times D_\lambda^p} f_\lambda\varphi\right)d\mu(x)$$

を対応させる p-current をいう。ここで $\{U_\lambda\}_{\lambda=1}^{l}$ は上で得られた M^n の被覆, $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{l}$ は $\{U_\lambda\}_{\lambda=1}^{l}$ に従属した1の分解、$D^q\times D^p$ と D^p の向きは各々 M^n, $\mathcal{F}$ の向きから得られたものとする。Z_μ は、$\{U_\lambda\}$ や $\{f_\lambda\}$ によらず μ によってのみ定まる。また、Z_μ は closed current になっている。

〈例〉 $L\in\mathcal{F}$ をコンパクトな leaf とするとき、

$$\mu_L(S)=\#(S\cap L),\quad S\subset X \quad (X\subset M \text{ とみなして})$$

で $\mathcal{F}$-invariant measure μ_L が定義できる。Z_{μ_L} を μ_L に対応する foliation cycle とすると

$$\langle Z_{\mu_L}, \varphi\rangle = \int_L \varphi$$

が成り立つ。

〔定義3〕(cf. [1],[3]) $\mathcal{D}_p$ で C^∞, p-forms 全体, $\mathcal{D}_p'$ で p-currents 全体を表わすことにする。$\mathcal{D}_p$, $\mathcal{D}_p'$ は局所凸線型位相空間で、しかも Montel 空間(有界集合はプレコンパクト)で

あり、互いに双対になっていることをまず注意しておく。

1) C^∞写像 $f: N \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ が <u>$\mathcal{F}$-tangent</u> とは、任意の $x \in N$ に対して、$(df)_x(T_x N) \cup T_{f(x)}\mathcal{F} = (df)_x(T_x N) + T_{f(x)}\mathcal{F}$ が $T_{f(x)}M$ において成り立つことをいう。

2) $\mathcal{F}$-tangent $(p+1)$-chains の境界全体からなる空間の $\mathcal{D}'_p$ における closure を $\mathcal{S}$ で表わす。これは $\mathcal{D}'_p$ の閉部分空間になっている。$(M, \mathcal{F})$ が <u>*homologically taut*</u> とは、自明でない $\mathcal{F}$-invariant measure μ に対して、$Z\mu \notin \mathcal{S}$ が成り立つことをいう。

3) $(M, \mathcal{F})$ が <u>*geometrically taut*</u> とは、M上にリーマン計量が存在して、$\mathcal{F}$ の各 leaf が極小部分多様体となるときをいう。

<u>Remark</u>. "*homological tautness*" は次のような幾何学的意味をもつ。

[定理 (Rummler [3])] $(M, \mathcal{F})$ のすべての leaves がコンパクトとすると、*homologically taut* であるための必要十分条件は、$\{vol(L) ; L \in \mathcal{F}\}$ が有界集合になることである。

次がこの節の目標の定理である。

[定理 (Sullivan-Rummler [1])]. $(M, \mathcal{F})$ に対して *homological tautness* と *geometrical tautness* は同値。

(証明の概略)

1. (Rummler) リーマン計量 g を与えておく。M^n 上の p-form

$\chi_{\mathcal{F}}$ を、 $\chi_{\mathcal{F}}(\eta_1, \cdots, \eta_p) := \det(\langle \xi_i, \eta_j \rangle)$, $\eta_i \in T_xM$ で定義する。ここで、$\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$ は $T\mathcal{F}$ の向きづけられた正規直交局所基底。このとき、$\mathcal{F}$ が g で極小葉層になるための必要十分条件は、$\eta_1, \cdots, \eta_{p+1}$ の p 個が $T\mathcal{F}$ に属するなら $d\chi_{\mathcal{F}}(\eta_1, \cdots, \eta_{p+1}) = 0$ ということである。(このような p-form を $\mathcal{F}$-closed という。)

2. Purification. V を n 次元ベクトル空間，F を V の p 次元部分空間で、向きづけられているものとする。F の向きづけられた基底を $\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$ とする。ω は V 上の p-form で、F 上正，即ち、$\omega(\xi_1, \cdots, \xi_p) > 0$ なるものとする。Purification とは，このような ω に対し、次のようにして新しい p-form $\tilde{\omega}$ を構成することをいう。まず射影 $P_\omega : V \longrightarrow F$ を

$$P_\omega(v) \wedge (\omega/F) = (v \wedge \omega)/F$$

で定義する。ここで $\cdot/F$ は F への制限，$\wedge$ は contraction を表わす。p-form $\tilde{\omega} := P_\omega^*(\omega/F)$ を ω の purification という。

3. p-vector v に対して，Dirac current $\delta_v \in \mathcal{D}_p'$ を

$$\delta_v(\varphi) := \varphi(v) \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}_p$$

で定義する。また，$\mathcal{F}$ の structure currents からなる cone を

$$C_{\mathcal{F}} := \mathcal{D}_p' \text{ の中の closed convex cone spanned by } \{\delta_v \, ; \, v \in \bigcup_{x \in M} \Lambda_+^p T_x\mathcal{F}\}$$

で定義する。このとき

〔定理 (Sullivan [4])〕 $Z_p = \{\text{closed } p\text{-currents}\}$, $Z_{\mathcal{F}} = \{(M, \mathcal{F})$ の foliation cycles$\}$ とおくと、$C_{\mathcal{F}} \cap Z_p = Z_{\mathcal{F}}$ で、$Z_{\mathcal{F}}$ はコン

パクトなconeになっている。

($hom.\ taut \Rightarrow geom.\ taut$) 仮定と3の定理より $C_{\mathcal{F}} \cap S = \{0\}$. Hahn-Banachの定理によって、$\varphi(C_{\mathcal{F}} - \{0\}) > 0$, $\varphi(S) = 0$ となる p-form φ が存在する。φ は $\mathcal{F}$ 上正で、$\mathcal{F}$-closed になっている。各点 $x \in M$ ごとに φ に purification をして得られた M 上の p-form を $\tilde{\varphi}$ とすると、$\tilde{\varphi}$ は C^∞ であり、$\mathcal{F}$ 上正、$\mathcal{F}$-closed、しかも、$\{\mathrm{Ker}\, P_w\} \subset TM$ は C^∞-subbundle になっている。M 上のリーマン計量 g を、$\tilde{\varphi}|T\mathcal{F}$ が $T\mathcal{F}$ 上の volume form になり、$T\mathcal{F}$ と $\{\mathrm{Ker}\, P_w\}$ が直交するように定める。この g に関する $\chi_{\mathcal{F}}$ が $\tilde{\varphi}$ になっていて、$\tilde{\varphi}$ が $\mathcal{F}$-closed であることから、1 より g が求める計量であることがわかる。

($geom.\ taut \Rightarrow hom.\ taut$) そうでないと仮定すると、ある foliation cycle $z \neq 0$ に対して、$\mathcal{F}$-tangent $(p+1)$-chains からなる列 $\{C_m\}$ で $\partial C_m \longrightarrow z \ (m \to \infty)$ in $\mathcal{D}_p'$ なるものが存在する。仮定によって、あるリーマン計量 g をとると $\chi_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ 上正かつ $\mathcal{F}$-closed。$\partial C_m \longrightarrow z$ より $\langle \partial C_m, \chi_{\mathcal{F}} \rangle \longrightarrow \langle z, \chi_{\mathcal{F}} \rangle$ であるが、$\chi_{\mathcal{F}}$ が $\mathcal{F}$-closed より $\langle \partial C_m, \chi_{\mathcal{F}} \rangle = \langle C_m, d\chi_{\mathcal{F}} \rangle = 0$. また、$\mathcal{F}$ 上正より $\langle z, \chi_{\mathcal{F}} \rangle > 0$。よってこれは矛盾。q.e.d.

特に、余次元1の場合は次のようになる。

(系[1]) $(M, \mathcal{F})$ が geometrically taut であるための必要

十分条件は、各コンパクトなleafに対して、それと交わる閉横断線が存在することである。

(証明) リーマン計量gで$\mathcal{F}$が極小葉層になったとすると、$\mathcal{F}$に直交するM上の単位ベクトル場Xは、$\mathrm{div}(X)=0$を満たす。Poincaréの回帰定理より、Xの軌道は、M上のnull-setを除いてnon-wandering。よって、各コンパクトなleafに対して、それと少なくとも2度交わるXの軌道が存在する。これから求める閉横断線が得られる。

逆を示すには、$\mathcal{S}\subset\{\text{exact currents}\}$より$\mu\neq 0$に対して$[Z_\mu]\neq 0$を示せばよい。$\mathrm{supp}(\mu)\supset L$: non-compactなら、いつでもLと交わる閉横断線がとれるから、$[Z_\mu]\neq 0$。$\mathrm{supp}(\mu)$がコンパクトなleafのみからなるときは、仮定より$[Z_\mu]\neq 0$. //

3、極小葉層について

ここでは、リーマン計量gを与えた場合、余次元1の極小葉層がどうなっているかを簡単な場合に考えてみたい。以下、$(M^{n+1}, \mathcal{F}, g, N)$は次のようなものの組とする; M^{n+1}は向きづけされた$(n+1)$-次元閉多様体, $\mathcal{F}$は向きづけられた余次元1のfoliation, gはM上のリーマン計量, NはM上の単位ベクトル場で$\mathcal{F}$に直交するもの。

全測地的葉層の時は、例えば次の結果がある。

〔定理(cf. Tanno [5])〕 $(M, \mathcal{F}, g, N)$ が全測地的葉層で、(M, g) の断面曲率が非正又は非負とすると、N は平行ベクトル場である。

この節では次を示す。

〔定理〕 $(M, \mathcal{F}, g, N)$ が極小葉層で、(M, g) のリッチ曲率が非負とすると、N は平行ベクトル場である。特に、N の flow は $\mathcal{F}$ を保つ。

(証明) 次の形の Green の公式を用いる。

$$(*) \cdots\cdots \quad \int_M Ric(X, X)\,dM + \int_M Trace(A_X^2)\,dM - \int_M (\delta X)^2\,dM = 0$$

ここで、$\delta X := -div(X)$, A_X は $A_X(V) = \nabla_V X$ で定義される (1, 1) テンソル。

<u>1st</u> $\mathcal{F}$ は全測地的.

$T\mathcal{F}$ 上の (1,1) テンソル $\bar{A}$ を

$$(\bar{A})_x(V) := \nabla_V N, \quad V \in T_x\mathcal{F}, \quad (\bar{A})_x : T_x\mathcal{F} \longrightarrow T_x\mathcal{F}$$

で定義すると、$Trace(A_N^2) = Trace(\bar{A}^2) \geqq 0$ が成り立つ。しかも、$\mathcal{F}$ は極小葉層であるから、$\delta(N) = 0$。よって $(*)$ から

$$\int_M Ric(N, N)\,dM + \int_M Trace(\bar{A}^2) = 0.$$

仮定より, $Ric(N, N) \geqq 0$ だから、左辺は恒等的に 0 でなくてはならない。よって、$Ric(N, N) \equiv 0$, $Trace(\bar{A}^2) \equiv 0$。特に、$\bar{A} \equiv 0$ で $\mathcal{F}$ は全測地的となる。

2nd　$\mathrm{Trace}(A^2_{\nabla_N N}) \geqq 0$.

ベクトル場 N, $\nabla_N N$ に対応する 1-forms を ω, θ とすると $d\omega = \omega\wedge\theta$ が成り立つ。$\{E_1, \cdots, E_n, N\}$ を TM の向きづけられた正規直交局所基底とすると、このことから

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_N N, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_j} \nabla_N N, E_i \rangle$$

が成り立つ。よって

$$\mathrm{Trace}(A^2_{\nabla_N N}) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla_N N, E_j \rangle \cdot \langle \nabla_{E_j} \nabla_N N, E_i \rangle + \langle \nabla_N \nabla_N N, N \rangle^2$$

で求める結果が得られる。

3rd　N は平行ベクトル場.

1st より、$\nabla_N N = 0$ を示せばよい。1st で $Ric(N,N) \equiv 0$ を示したが、これから $\delta(\nabla_N N) \equiv 0$ がわかる。$X = \nabla_N N$ として(*)を用いると

$$\int_M Ric(\nabla_N N, \nabla_N N)dM + \int_M \mathrm{Trace}(A^2_{\nabla_N N}) = 0.$$

2nd と $Ric \geqq 0$ より、$\mathrm{Trace}(A^2_{\nabla_N N}) \equiv 0$ で、$\nabla_N N = 0$ がわかる。

N の flow が $\mathcal{F}$ を保つのは、$L_N \omega = 0$ より明らか。　q.e.d.

M を non-compact にすると、上の定理はもちろん成り立たない。

定理の仮定の下では、Cheeger-Gromoll の分解定理 [6] によって、(M, g) の普遍被覆空間 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ は

$$(\tilde{M}, \tilde{g}) \cong (\bar{M}, \bar{g}) \times (\mathbb{R}^k, g_0)$$

と分解される。ここで、$\bar{M}$は単連結でコンパクトな多様体、g_0は$\mathbb{R}^k$の標準的な計量。これを用いると次を得る。

(系) $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}, \tilde{N})$を$(M, \mathcal{F}, g, N)$の$\tilde{M}$への自然な持ち上げとすると、$(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \cong \bar{M} \times (\mathbb{R}^k, \mathcal{F}_0)$。ここで，$\mathcal{F}_0$は$\mathbb{R}^k$の超平面からなる全測地的葉層。

(証明)

$$\tilde{N} = X + Y \quad , \quad X \in \Gamma(T\bar{M}), \ Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^k)$$

と分解するとき、$X \equiv 0$を示せばよい。$X \not\equiv 0$ならば、ある点$y \in \mathbb{R}^k$に対して，$X|_{\bar{M} \times \{y\}}$は$\bar{M} \times \{y\}$上の平行ベクトル場で、しかも零ベクトル場ではない。しかし，$\bar{M}$は単連結でコンパクトだからこれは起こり得ない。

REFERENCES

1. D. Sullivan: A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces. Comment. Math. Helv. 54 (1979) 218-223.

2. J. F. Plante: Foliations with measure preserving holonomy. Ann. of Math. 102(1975) 327-361.

3. H. Rummler: Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts. Comment. Math. Helv. 54(1979) 224-239.

4. D. Sullivan: Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. Inventiones math. 36 (1976) 225-255.

5. S. Tanno: A theorem on totally geodesic foliations and its applications. Tensor, N.S. 24(1972) 116-122.

6. J. Cheeger & D. Gromoll: The splitting theorem for manifold of non-negative Ricci curvature. J. of Diff. Geom. 6 (1971) 119-128.