数理解析研究所講究録
第 408 巻 1980 年 46-59

Totally real parallel submanifolds in $P^n(C)$

山口大 理　内藤博夫

Riemannian manifold M から Riemannian manifold $\bar{M}$ への isometric immersion f が parallel であるとは、f の second fundamental form σ_f が次の式を満たす時に言う：

$$(*) \quad D_X(\sigma_f(Y,Z)) = \sigma_f(\nabla_X Y, Z) + \sigma_f(Y, \nabla_X Z).$$

ここで、D は normal connection、∇ は M の riemannian connection、X, Y, Z は M 上の C^∞ vector fields とする。さて ambient space $\bar{M}$ が symmetric space の時、parallel isometric immersion f を許す Riemannian manifold M は locally symmetric space になる事が知られている。

それゆえ次の問題が考えられる。

問題 1　$\bar{M}$ が symmetric space の時、単連結 symmetric space M とそれから $\bar{M}$ への parallel isometric immersion f の組 (M, f) を決めよ。

これに関して、$\bar{M}$ が real space form の時、Ferus [3] と Takeuchi [11] によって、$\bar{M}$ が正則断面曲率一定の Kähler metric を持つ complex projective space の時、M が Kähler submanifold という条件の下で、Nakagawa-Takagi [4] によって完全に決定された。しかし $\bar{M}$ が他

の場合については知られていないように思われる。ここで注意すべき事は、知られているparallel isometric immersionsは全て'equivariant'である事である。従って次の問題も合わせて考えられる。

問題2　fが単連結symmetric spaceからsymmetric spaceへのparallel isometric immersionならば、fは'equivariant'か。

以下の章で、ambient space $\bar{M}$が正則断面曲率$c>0$のKähler metricを持つcomplex projective space $P^n(c)$の時、M^nがn-dim simply connected symmetric space，fがtotally real parallel isometric immersionと言う条件の下で上の2つの問題を考える。

§1. $P^n(c)$へのtotally real parallel isometric immersions

Jを$P^n(c)$のcomplex structureとする。この時、Riemannian manifold Mから$P^n(c)$へのisometric immersion fがtotally realとは$\forall p \in M$に対して、$T_p(M)$と$JT_p(M)$がorthogonal subspacesの時にいう。$p \in M$に対して、subspace $N^1_p(M)$を$\{\sigma_f(X,Y)\,;\,X,Y \in T_p(M)\}$の$\mathbb{R}$-spanとし、$O^1_p(M) = T_p(M) \oplus N^1_p(M)$を$p$の1st osculating spaceという。この時

Prop. 1.1 ([5]).　$f: M \to P^n(c)$ parallel isometric immersion $\Longrightarrow$

(1) complete totally geodesic submanifold $N \subset P^n(c)$が一意に存在して、$f(M) \subset N$で$\forall p \in M$に対して$O^1_p(M) = T_p(N)$となる。

(2) (M, f)について次の3つの場合が起こる：

(a) f が Kähler immersion で、$N = P^r(c)$.

(b) f が totally real immersion で、$N = P^r(\mathbb{R})$ ($P^r(\mathbb{R})$ は断面曲率 $c/4$ を持つ)。

(c) f が totally real immersion で、$N = P^r(c)$.

ここで(a)については[4]で知られ、(b)については covering sphere $S^r(c/4)$ への parallel immersion によって導びかれる事が分かる。我々の考える対象 $f: M^n \longrightarrow P^n(c)$: totally real parallel isometric immersion は、totally geodesic immersion を除いて(c)の特別な場合である事に注意する。以下、M^n を単連結 symmetric space，$f: M^n \to P^n(c)$ を totally real parallel isometric immersion とし、R を M^n の curvature tensor, $\bar{R}$ を $P^n(c)$ のそれとする。

$o \in M$ を fix し、$\mathfrak{p} = T_o(M)$, $\mathfrak{k} = \{ R_o(X,Y) ; X, Y \in \mathfrak{p} \}_{gen.} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とし、$\mathfrak{g}$ 上の Lie bracket $[\ ,\ ]$ を次のように定義する:

$$[T,S] = T \circ S - S \circ T,\ [T,X] = -[X,T] = T(X),\ [X,Y] = -R_o(X,Y)$$
$$(T, S \in \mathfrak{k},\ X, Y \in \mathfrak{p}).$$

同様に、symmetric space $P^n(c)$ に対しても、$\bar{o}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{k}}, \bar{\mathfrak{g}}$ を定義する。さらに $\mathfrak{p}$ 上の $\mathfrak{p}$-valued bilinear form $\tilde{\sigma}_f$ を $\tilde{\sigma}_f(X,Y) = J\sigma_f(X,Y)$ で定義する。この時、

<u>Lemma 1.2</u> ([6]). $f: M^n \to P^n(c)$ totally real parallel ならば、

(1) $\tilde{\sigma}_f$ は3次の symmetric trilinear form (metric による $\mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^*$ の同一視の下で)。

(2) $\tilde{R}\cdot\tilde{\sigma}_f = 0$, i.e., $T(\tilde{\sigma}_f(X,Y)) = \tilde{\sigma}_f(T(X),Y) + \tilde{\sigma}_f(X,T(Y))$.

(3) $\frac{c}{4}\{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\} = R_o(X,Y)Z - [\tilde{\sigma}_f(X), \tilde{\sigma}_f(Y)](Z)$ （ここで、$\tilde{\sigma}_f(X) : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ は $\tilde{\sigma}_f(X)(Y) = \tilde{\sigma}_f(X,Y)$ によって定義する）。

証明 (1)は totally real と言う事と $P^n(C)$ の riemannian connection $\bar{\nabla}$ が $\bar{\nabla}J = 0$ である事によって簡単に得られる。さらに、0での normal space が $JT_o(M)$ で与えられる事に注意すれば、

$$\nabla_X Y = -JD_X JY \quad (X, Y ; \text{vector fields on } M)$$

を得、それゆえ(*)によって $\nabla\tilde{\sigma}_f \equiv 0$, ゆえに(2)を得る。さて(3)は totally real により $\bar{R}_o(X,Y)Z = \frac{c}{4}\{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\}$ である事に注意すれば、Gauss の式の直接の結果である。

Q.E.D

§.2 Rigidity classes とその関係

先づ、問題 1 を厳密にする。$I(M^n)$ を M^n の isometries 全体のなす Lie 群、H を $P^n(C)$ の holomorphic isometries 全体のなす Lie 群とする。$\mathcal{J}_M = \{f : M^n \longrightarrow P^n(C) ;$ totally real parallel isometric immersion $\}$ とおき、作用：$H \times I(M) \times \mathcal{J}_M \ni (\bar{g}, g, f) \longrightarrow \bar{g}\circ f\circ g^{-1} \in \mathcal{J}_M$ に関する orbits 全体を $\bar{\mathcal{J}}_M$ とする。さらに、$\mathcal{S}_M = \{N \subset P^n(C) ;$ complete totally real parallel submanifold でその universal riemannian covering が $M^n\}$ とおき、作用：$H \times \mathcal{S}_M \ni (\bar{g}, N) \longrightarrow \bar{g}(N) \in \mathcal{S}_M$ に関する orbits 全体を $\bar{\mathcal{S}}_M$ とする。従って、問題 1 は $\bar{\mathcal{J}}_M$, $\bar{\mathcal{S}}_M$ を調べる事である。

Lemma 1.2 を考える事によって、集合 $\mathfrak{M}_M = \{\, \tilde{\sigma}\ ;\ \mathfrak{p}$ 上の $\mathfrak{p}$-valued bilinear form で *Lemma* 1.2 の (1), (2), (3) を満たす $\}$ を考える。$F_0(M) = \{\, g \in I(M)\ ;\ g(0) = 0 \,\}$ とおき、作用：$F_0(M) \times \mathfrak{M}_M \ni (k, \tilde{\sigma}) \longrightarrow k \cdot \tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}_M$ $\left((k\cdot\tilde{\sigma})(X, Y) = (k_*)_0 (\tilde{\sigma}(k_{*0}^{-1}(X), k_{*0}^{-1}(Y))) \right)$ に関する orbits 全体を $\overline{\mathfrak{M}}_M$ とする。この時、$\bar{g} \in H$, $g \in I(M)$, $f \in \mathcal{T}_M$ に対して $(\tilde{\sigma}_{\bar{g}\circ f\circ g^{-1}})_0 = (\tilde{\sigma}_{f\circ g^{-1}})_0 = k \cdot (\tilde{\sigma}_f)_0$ $(\exists k \in F_0(M)$; $g \in F_0(M)$ ならば g 自身を取ればよい) である事に注意すれば、

$$\iota_M : \overline{\mathcal{T}}_M \ni [f] \longrightarrow [(\tilde{\sigma}_f)_0] \in \overline{\mathfrak{M}}_M$$

が定義される。さらに $f \in \mathcal{T}_M$ に対して $f(M)$ が $P^n(C)$ の submanifold (これは後にふれる) であれば、

$$j_M : \overline{\mathcal{T}}_M \ni [f] \longrightarrow [f(M)] \in \overline{\mathcal{S}}_M$$

が定義される。この時、次の定理を得る。

<u>定理2.1</u>([6]) (a) ι_M は bijective である。(b) j_M は bijective である。

ここで $\overline{\mathcal{T}}_M$, $\overline{\mathcal{S}}_M$ の研究はある $\mathfrak{p}$ 上の3次の cubic forms の同値類の集合 $\overline{\mathfrak{M}}_M$ の研究に置き換えられたのだが、$\overline{\mathcal{T}}_M$, $\overline{\mathcal{S}}_M$ を直接調べる方法については[7]を参照せよ。しかし、ここで述べる方法は問題1を $P^n(C)$ に限らず一般の symmetric space で考える時に役立つかもしれない。定理2.1 (a) の証明は次の2つの章で与えられ、(b)については(a)と同じ議論を使うので省略する。

§3. Frenet curves と一意性

この章では ι_M が injective である事を説明する。Riemannian manifold $\bar{M}$ の arc-length で parameterize された curve $C(t)$ $(t \in I)$ が Frenet curve であるとは、自然数 r が存在して、高次の curvature positive functions $\kappa_1(t), \cdots, \kappa_{r-1}(t)$ と Frenet orthonormal frame $\{V_1(t), \cdots, V_r(t)\}$ が定義される時に言い、この時 Frenet formula：

$$\begin{cases} \dot{C}(t) = V_1(t) \quad , & (\bar{\nabla}_t V_1)(t) = \kappa_1(t) V_2(t) \\ (\bar{\nabla}_t V_2)(t) = -\kappa_1(t) V_1(t) + \kappa_2(t) V_3(t) \quad , \cdots , & \\ (\bar{\nabla}_t V_j)(t) = -\kappa_{j-1}(t) V_{j-1}(t) + \kappa_j(t) V_{j+1}(t) \ , \cdots , & \\ (\bar{\nabla}_t V_{r-1})(t) = -\kappa_{r-2}(t) V_{r-2}(t) + \kappa_{r-1}(t) V_r(t) \ , & (\bar{\nabla}_t V_r)(t) = -\kappa_{r-1}(t) V_{r-1}(t) \end{cases}$$

を満たす。さらに f が Riemannian manifold M から Riemannian manifold $\bar{M}$ への parallel isometric immersion の時、M の arc-length な geodesic $\gamma(t)$ に対して、$(f \cdot \gamma)(t)$ は $\bar{M}$ の Frenet curve であり、その curvature functions $\kappa_j(t)$ は定値関数で、$r, \kappa_1, \cdots, \kappa_{r-1}, V_1(0), \cdots, V_r(0)$ は $C(0) = P$, $\dot{C}(0) = X$, $(f_*)_P$, $(\sigma_f)_P$ だけで決まる（Strübing [10]）。

<u>Lemma 3.1</u> ([6]). M が complete riemannian manifold, $\bar{M}$ が riemannian manifold, $f, g : M \longrightarrow \bar{M}$ が parallel isometric immersions とする。この時、$f(0) = g(0)$, $f_{*0} = g_{*0}$, $(\sigma_f)_0 = (\sigma_g)_0$ となる M の点 0 が存在すれば、$f \equiv g$ である。

<u>証明</u> $\gamma(t)$ を 0 を出発する M の arc-length な geodesic とする。この時、条件から上の注意によって２つの Frenet curves $(f \circ \gamma)(t)$,

$(g\circ\gamma)(t)$ は同じ $r, \kappa_1, \cdots \kappa_{r-1}, V_1(0), \cdots, V_r(0)$ をもつ。ここで *Frenet formula* を $\{c, V_1, \cdots, V_r\}$ を変数とする常微分方程式の系とみなすと、2つの *Frenet formulas* は同じ常微分方程式の系を与え、その解は同じ初期値を与える。ゆえに $(f\circ\gamma)(t) = (g\circ\gamma)(t)$ となり、M の完備性によって $f \equiv g$ となる。

Q.E.D

<u>$\imath_M$ の *injective* の証明</u>　$[f], [g] \in \bar{\mathcal{J}}_M$ が $[(\tilde{\sigma}_f)_o] = [(\tilde{\sigma}_g)_o] \in \mathfrak{M}_M$ と仮定する。この時定理2.1の上の注意により適当な $k \in F_o(M)$ によって $(\tilde{\sigma}_f)_o = (\tilde{\sigma}_g)_o$ とできる。さらに $\bar{P}$ の *unitary frames* は互いに共役（順序をこめて）である事に注意すれば、適当な $\bar{g} \in H$ によって、$f(o) = g(o)$, $f_{*o} = g_{*o}$ とできる。ここで再び定理2.1の上の注意より $(\tilde{\sigma}_f)_o = (\tilde{\sigma}_g)_o$ である事に注意すれば、*Lemma* 3.1より $[f] = [g]$ を得る。

Q.E.D

<u>*Remark*</u>　上の議論は本質的に *Lemma* 3.1に依るので、一般の symmetric space $\bar{M}$ でも対応する命題を示すことが出きる。

<u>§4. *Equivariant map* の構成</u>

この章では $\imath_M$ が *onto* になる事、i.e., $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}_M$ から *totally real parallel* な *equivariant map* を構成する事を述べる。$s: P \to \bar{P}$ を *totally real Euclidean isometry* とする。さらに *injective homom.*

$\tau_s:\mathfrak{k}\longrightarrow\bar{\mathfrak{k}}$ を $\tau_s(T)(s(X)+Js(Y))=s(T(X))+Js(T(Y))$ によって、linear map $\mu_{\tilde{\sigma},s}:\mathfrak{p}\longrightarrow\bar{\mathfrak{k}}$ を $\mu_{\tilde{\sigma},s}(X)(s(Y)+Js(Z))=s(\tilde{\sigma}(X,Z))-Js(\tilde{\sigma}(X,Y))$ によって定義する。ここで $\bar{\mathfrak{k}}=\bar{\mathfrak{u}}(\bar{\mathfrak{p}})$ である事に注意すれば $\tilde{\sigma}$ の条件(1)によって上の maps は定義可能である事が分かる。さらに、$\rho_{s,\tilde{\sigma}}:\mathfrak{g}\longrightarrow\bar{\mathfrak{g}}$ を $\rho_{s,\tilde{\sigma}}(T+X)=\tau_s(T)+\mu_{\tilde{\sigma},s}(X)+s(X)$ $(T\in\mathfrak{k},\ X\in\mathfrak{p})$ によって定義すれば、$\tilde{\sigma}$ の条件(1),(2),(3)によって injective Lie homom. になる。さて M は単連結 symmetric space だから、単連結 Lie 群 G で M に transitive, isometrical に働き、Lie 環が $\mathfrak{g}$ で、isotropy subgroup G_0 が連結でその Lie 環が $\mathfrak{k}$ となるものが存在する。同様に $\bar{G}$, $\bar{G}_{\bar{o}}$ をとれば、$\rho_{s,\tilde{\sigma}}$ は $G\longrightarrow\bar{G}$ を induce し、さらに equivariant map $f_{s,\tilde{\sigma}}:M\longrightarrow P^n(C)$ を $f_{s,\tilde{\sigma}}(g(o))=(\rho_{s,\tilde{\sigma}}(g))(\bar{o})$ によって induce する。ここで $(f_{s,\tilde{\sigma}})_{*o}=s$ である事に注意すれば、$f_{s,\tilde{\sigma}}$ の equivariance によって、$f_{s,\tilde{\sigma}}$ は totally real isometric immersion である事が分かる。さて equivariant map について次の事が知られている。

<u>Lemma 4.1</u> ([5]). $\rho:G\longrightarrow\bar{G}$; Lie homom. で $\rho(G_0)\subset\bar{G}_{\bar{o}}$, しかも induced equivariant map $f_\rho: M\longrightarrow P^n(C)$ が isometric immersion と仮定する。このとき、(a) $(\sigma_{f_\rho})_o(X,Y)=([d\rho(X)_{\bar{\mathfrak{k}}}, d\rho(Y)_{\bar{\mathfrak{p}}}])_{\bar{\mathfrak{m}}^\perp}$, $X,Y\in\mathfrak{p}$. ここで、$\bar{\mathfrak{m}}^\perp$ は $(d\rho)(\mathfrak{p})$ の $\bar{\mathfrak{p}}$-projection によって得られる $\bar{\mathfrak{p}}$ の subspace $\bar{\mathfrak{m}}$ の $\bar{\mathfrak{p}}$ での直交補空间とする。(b) f_ρ が parallel であるための必要十分条件は次で与えられる:

$$[d\rho(X)_{\bar{\mathfrak{p}}}, [d\rho(Y)_{\bar{\mathfrak{p}}}, d\rho(Z)_{\bar{\mathfrak{p}}}]] \in \bar{\mathfrak{m}}, \quad [d\rho(X)_{\bar{\mathfrak{k}}}, [d\rho(X)_{\bar{\mathfrak{k}}}, d\rho(X)_{\bar{\mathfrak{p}}}]] \in \bar{\mathfrak{m}}$$
$$(X, Y, Z \in \mathfrak{p}).$$

この Lemma によって我々の $f_{s,\tilde{\sigma}}$ は parallel で $(\tilde{\sigma}_{f_{s,\tilde{\sigma}}})_0 = \tilde{\sigma}$ である事が分かる。これは ι_M が onto であることを示す。

Remark. $f \in \mathcal{J}_M$ とする時、$f(o) = \bar{o}$ とし、$(f_*)_0 = s$ とすれば $f_{(f_*)_0, (\tilde{\sigma}_f)_0} \in \mathcal{J}_M$ であって Lemma 3.1 によって $f = f_{(f_*)_0, (\tilde{\sigma}_f)_0}$ となる。これは f が G-equivariant map である事を示すから、$f(M)$ は $\bar{o}$ の $\rho_{(f_*)_0, (\tilde{\sigma}_f)_0}(G)$-orbit space である。ゆえに $f(M)$ は $P^n(C)$ の submanifold である。

さらに $\mu_{(\tilde{\sigma}_f)_0, (f_*)_0}(X)(f_*(Y) + \xi) = -f_*(A_\xi(X)) + \sigma(X, Y)$ (ここで、$X, Y \in \mathfrak{p}$, $\xi \in \bar{\mathfrak{m}}^\perp = N_0(M)$. A_ξ は ξ 方向の shape operator とする) によって、実は与えられている。

§5. M が Euclidean factor を持たない場合

最初に totally real parallel isometric immersions の例を与える。

Model.1 $M^n = S^n(c/4)$. $f : M^n \longrightarrow P^n(C)$: standard totally geodesic immersion. $(n \geq 2)$

Model.2 $M = SU(n)/SO(n)$ $(n \geq 3)$. $V = S_n(\mathbb{C})$; n 次複素対称行列全体のなす complex vector space とし、$P(V)$ を holomorphic sectional curvature c の Kähler metric をもつ V 上の complex projective space, $\pi : V-\{0\} \longrightarrow P(V)$ を standard projection とする。さらに $f : M \longrightarrow P(V)$ を $f(g\cdot SO(n)) = \pi({}^t g\cdot g)$ として、M に induced metric を入れる。

<u>Model 3</u>　$M = SU(2n)/Sp(n)$ $(n \geq 3)$. $V = \mathfrak{so}(2n;\mathbb{C})$；$2n$ 次複素歪対称行列全体のなす complex vector space. $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ とする。この時、$f : M \longrightarrow P(V)$ を $f(g\cdot Sp(n)) = \pi({}^t g\cdot J_n\cdot g)$ とする。

<u>model 4</u>　$M = SU(n)\times SU(n)/SU(n)$ $(n \geq 3)$. $V = M_n(\mathbb{C})$；n 次複素行列全体のなす complex vector space. $f : M \longrightarrow P(V)$ を $f((g,h)\cdot SU(n)) = \pi(g\cdot h^{-1})$ とする。

<u>Model 5</u>　$M = E_6/F_4$. V : Cayley 数体上の 3 次 Hermitian symmetric matrics 全体のなす real vector space の複素化. E_3 を 3 次の単位行列 $\in V$ とする。この時、群 E_6 は V の正則変換として働き、$f : M \longrightarrow P(V)$ を $f(g\cdot F_4) = \pi(g(E_3))$ とする。

ここで上の models 2～5 が parallel totally real である事は O'Neill[9] や Nomizu[8] の Hopf fibring に関する理論を使って計算する。

<u>Remark</u> 上で与えられた isometric immersions は全て minimal である。

さて、単連結 symmetric space M を de Rham 分解した時、直積因子に Euclidean space が出てこない時 Euclidean factor を持たないと言うことにする。この時、次の定理を得る。

<u>定理5.1</u>([6]). Mはeuclidean factorを持たないとする。この時、$\mathfrak{M}_M \neq \phi$ならば Mはriemannian manifold として models 1〜5の中のどれかになる。さらにこの時 $\mathfrak{M}_M = \{1\text{-point}\}$で代表するisometric immersion は modelsで与えられたfになる。

<u>証明</u> $\mathfrak{M}_M \neq \phi$ と仮定する。この時、$\rho_{s,\tilde{\sigma}}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$より$\mathfrak{g}$はcompact type である。さらにMの既約分解を$M_1 \times \cdots \times M_r$として,

$$\mathfrak{k} = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{k}_i \quad , \quad \mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i \quad , \quad \mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{g}_i$$

とすると$\tilde{\sigma}$の(2)の条件は$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i$ ($\tilde{\sigma}_i$は$\mathfrak{p}_i$上の$\mathfrak{k}_i \cdot \tilde{\sigma}_i \equiv 0$となる3次のsymmetric trilinear)となる。この事に注意すれば、$\tilde{\sigma}$の条件(3)はMがirreducibleで、さらにM上のmetricは一意である事を示す。さて、Mがirreducible, compact typeの時、$d_M = \dim_{\mathbb{R}}\{\tilde{\sigma} \in S^3(\mathfrak{p})\ ;\ \mathfrak{k}\cdot\tilde{\sigma} \equiv 0\}$とする(ここで$S^3(*)$は$*$上の3次のsymmetric trilinear forms全体)。ここで$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{p}$のmaximal abelian, WをMにassociateするWeyl群とすれば、$d_M = \dim\{\tilde{\alpha} \in S^3(\mathfrak{a})\ ;\ W\cdot\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\}$となり、右辺はAraki[1]とBourbaki[2]によって次のように計算される:

Mがmodels 2〜5のMの時 $d_M = 1$, その他のMの時 $d_M = 0$.

$d_M = 0$の時、$\tilde{\sigma} = 0$となり、$\tilde{\sigma}$の条件(3)によって$M = S^n(c/4)$で、明らかに$\mathfrak{M}_M = \{1\text{-point}\}$である。$d_M = 1$の時、再び$\tilde{\sigma}$の条件(3)により$\mathfrak{M}_M$は符号の違いを入れて高々2つである。さらに0でのMのinvolutionは$S^3(\mathfrak{p})$上$-\mathrm{id}$として働くから、models 2〜5の存在によって$\mathfrak{M}_M = \{1\text{-point}\}$となる。 Q.E.D

§6. MがEuclidean factorを持つ場合とその応用

この章ではMがEuclidean factorを持つ場合, i.e., Mの既約分解が $M=\mathbb{R}^{n_0}\times M_1^{n_1}\times\cdots\times M_r^{n_r}$ で与えられている時を考える。このとき,

$$\mathfrak{k}=\sum_{i=1}^{r}\mathfrak{k}_i\,,\quad \mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0+\sum_{i=1}^{r}\mathfrak{p}_i\,,\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{p}_0+\sum_{i=1}^{r}\mathfrak{g}_i$$

となり、$\tilde{\sigma}\in\mathfrak{M}_M$ は $\tilde{\sigma}=\sum_{i,j,k=0}^{r}\tilde{\sigma}_{ij}^{k}$ (symbolicalに)と表わす。ここで $\tilde{\sigma}_{ij}^{k}:\mathfrak{p}_i\times\mathfrak{p}_j\longrightarrow\mathfrak{p}_k$ を $\tilde{\sigma}_{ij}^{k}(X_i,Y_j)=\tilde{\sigma}(X_i,Y_j)$ の $\mathfrak{p}_k$-成分によって定義する。さらに, $H_j=\frac{1}{n_j}\mathrm{Tr}\,\tilde{\sigma}_{jj}^{0}\in\mathfrak{p}_0$ とするとき、$\tilde{\sigma}\in\mathfrak{M}_M$ の条件を各componentごとに書き直すことによって次の定理を得る。

定理6.1 ([6]). (a) $\tilde{\sigma}\in\mathfrak{M}_M$ ならば,

(1) $\tilde{\sigma}=\sum_{j=0}^{r}\tilde{\sigma}_{jj}^{j}+\sum_{j=1}^{r}\tilde{\sigma}_{jj}^{0}+\sum_{j=1}^{r}\tilde{\sigma}_{j0}^{j}+\sum_{j=1}^{r}\tilde{\sigma}_{0j}^{j}$, (2) $\tilde{\sigma}_{jj}^{j}\in\mathfrak{M}_{M_j}^{\frac{c}{4}+h_j^2}$ ($j\geq 1$);(ここで $h_j=|H_j|$ で $\mathfrak{M}_{M_j}^{\frac{c}{4}+h_j^2}$ は $\mathfrak{M}_{M_j}$ の条件(3)の $\frac{c}{4}$ を $\frac{c}{4}+h_j^2$ におきかえたものとする。) (3) $\tilde{\sigma}_{00}^{0}\in\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^{n_0}}$, $\langle H_j,H_k\rangle=-c/4$ ($j\neq k$), $\tilde{\sigma}_{00}^{0}(Z_0,H_j)=\langle Z_0,H_j\rangle H_j-\frac{c}{4}Z_0$, (4) $\tilde{\sigma}_{jj}^{0}(X_j,Y_j)=\langle X_j,Y_j\rangle H_j$, $\tilde{\sigma}_{j0}^{j}(X_j,Z_0)=\tilde{\sigma}_{0j}^{j}(Z_0,X_j)=\langle Z_0,H_j\rangle X_j$; ($Z_0\in\mathfrak{p}_0$, $X_j,Y_j\in\mathfrak{p}_j$).

(b) 逆に上の(1),(2),(3),(4)を満たす $\mathfrak{p}$ 上の $\mathfrak{p}$-valued bilinear formは $\mathfrak{M}_M$ の元になる。

Remark　上の定理の(a)の(2)によって $\overline{\mathfrak{M}}_M\neq\phi$ ならばMの既約成分は§5の‘modelsのM’のどれかになる。その時 $\overline{\mathfrak{M}}_M$ は一般にinfinite setである事も分かる。

最後に、証明は省略されるが、$M=\mathbb{R}^2$ の場合に次の定理を得る。

定理6.2([6]). $P^2(C)$の中に，holomorphic isometryの違いを除いて，uniqueなcomplete totally real parallel minimal flat surfaceが存在する。

Remark 上のmodelのconcreteな形は[5]で述べられている。さらにそのmodelはcompact，$|\sigma| = \frac{c}{2}$，$\sqrt{c}/2\sqrt{2}$-isotropicになっている。

Remark Yau [12]は'$P^2(C)$のcomplete non-negative curved totally real minimal surfaceはtotally geod. or flatであり，後者はparallelである，事を示した。上の定理のmodelは後者の唯一つの例である。

さらに他の応用については[6]か[7]を参照せよ。

References

[1] S.Araki : On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J. Math. Osaka City Univ, 13 (1962), 1-34.

[2] N.Bourbaki : Elements de Mathematique Groupes et Algebres de Lie, Chap. 4-6, 1968.

[3] D.Ferus : Immersions with parallel second fundamental form, Math. Z, 140(1974), 87-93.

[4] H.Nakagawa and R.Takagi : On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 638-667.

[5] H.Naitoh : Isotropic submanifolds with parallel second fundamental forms in $P^m(c)$, to appear.

[6] ———— : Totally real parallel submanifolds in $P^n(c)$, to appear.

[7] H.Naitoh and M.Takeuchi : Totally real submanifolds and symmetric bounded domains, to appear.

[8] K.Nomizu : A characterization of the Veronese varieties, Nagoya Math. J, 60(1976), 181-188.

[9] B.O'Neill : The fundamental equations of a submersion, Michigan Math. J, 13(1966), 459-469.

[10] W. Strübing : Symmetric Submanifolds of Riemannian Manifolds, Math. Ann, 245(1979), 37-44.

[11] M.Takeuchi : Parallel submanifolds of Space forms, to appear.

[12] S.T.Yau : Submanifolds with constant mean curvature I, Amer. J. of Math, 96(1974), 346-366.