数理解析研究所講究録
第408巻 1980年 60-66

複素射影空間内の平行部分多様体について

筑波大数学系　　高木亮一

正則断面曲率 c の N-$\dim_{\mathbb{C}}$ 複素射影空間を $P_N(c)$ とする。最初に，Lie群の表現論を用いて，$P_N(c)$ の Kähler 部分多様体を構成しよう。$\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の Cartan部分環 $\mathfrak{h}$ を1つ選び，$\mathfrak{h}$ に関する $\mathfrak{g}$ の 0 でない root の全体を Δ とおく。Δ に適当な順序を与え，Π を単純 root の全体とする。Π の任意の部分集合 Π_0 $(\neq \Pi)$ に対して，

$$\Delta_0 = \{ \sum_{\alpha \in \Pi_0} n_\alpha \alpha \in \Delta \ ; \ n_\alpha \in \mathbb{Z} \}$$

とおく。$\alpha \in \Delta$ に対する $\mathfrak{g}$ の root 空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ とし，

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_0 \cup \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

とおくと，これは $\mathfrak{g}$ の Lie部分環である。G を Lie環が $\mathfrak{g}$ の中心のない連結複素 Lie群とし，U を $\mathfrak{u}$ に対応する G の連結複素部分群とすれば，単連結複素等質多様体 $M = M(\Pi, \Pi_0) = G/U$ が得られる。G_0 を G の極大 compact Lie 部分群とすれば，$M = G_0 / G_0 \cap U$ とも表されるから，M は compact である。次に，この M を $P_N(c)$ に埋め込もう。

<u>命題</u> 1 ([1], [3], [5], [6]). 任意の $p : \Pi - \Pi_0 \to \mathbb{Z}^+$

に対して，$N \in \mathbb{Z}^+$ と equivariant Kähler 埋め込み $f_p : M(\Pi, \Pi_0) \longrightarrow P_N(\mathbb{C})$ が存在する。

証明。$\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ を Π に対応する weight の基本系とする。$\sum_{\alpha \in \Pi - \Pi_0} p(\alpha)\Lambda_\alpha$ を最高 weight とするような表現

$$\tilde{\rho}_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(N+1, \mathbb{C})$$

が一意的に存在する。$\tilde{G}$ を G の普遍被覆とすれば，$\tilde{\rho}_1$ は準同型 $\rho_1 : \tilde{G} \longrightarrow SL(N+1, \mathbb{C})$ を引起し，さらに次の図形が交換するような準同型 $\rho_2 : G \longrightarrow PL(N+1, \mathbb{C})$ を引起す。

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & SL(N+1, \mathbb{C}) \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[r, "\rho_2"] & PL(N+1, \mathbb{C}) \end{tikzcd},$$

ここに π は被覆準同型である。G_0 の Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ に対応する $\tilde{G}$ の連結 Lie 部分群を $\tilde{G}_0$ とすれば，上図は次の交換図形を引起す。

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_0 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & SU(N+1) \arrow[d, "\pi"] \\ G_0 \arrow[r, "\rho_3"] & PU(N+1) \end{tikzcd}$$

最高 weight vector $e_0 \in \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$ を用いて，M の $P_N(\mathbb{C})$

への埋め込み f_p が

$$f_p(xU) = \rho(x)[e_0],\ x \in G$$

によって定義できる。上図より f_p は所定の性質をもつことがわかる。 q.e.d.

よって、特に $(f_p, M(\Pi, \Pi_0))$ は $P_N(c)$ の等質 Kähler 部分多様となっている。この逆も成立つ。すなわち、

定理2（[6]）. $P_N(c)$ の任意の等質 Kähler 部分多様体は命題1で構成した $(f_p, M(\Pi, \Pi_0))$ のどれかと一致する。

注意3　Calabi [2] の一意性定理によって，定理2は局所的にも成立つ。

さて，$(f_p, M(\Pi, \Pi_0))$ が対称空間（従って Hermitian となる）のとき，その次数を計算してみよう。一般に M を $P_N(c)$ の Kähler 部分多様体とするとき，M の第2基本形式の m 回の共変微分 tensor を H^m で表す。$M \ni x$ において，H^m_x は $T_x(M) \times \cdots \times T_x(M)$（$m$ 個）から $P_N(c)$ における M の法ベクトル空間 $N_x(M)$ への対称多重線型写像と考えられる。次式をみたす $d = d(x) \in \mathbb{Z}^+$ が唯一つ存在することがわかる。

$$\mathrm{Im}(H_x^{d-2}) \subsetneqq \mathrm{Im}(H_x^{d-1}) = \mathrm{Im}(H_x^d).$$

この d を x における M の次数という。明らかに, $(f_p, M(\Pi, \Pi_0))$ の次数は $x \in M$ に依らない。

<u>定理</u>4 ([3]). $P_N(C)$ の対称 Kähler 部分多様体上では,

$$m \neq l \text{ なら, } \mathrm{Im}(H^m) \perp \mathrm{Im}(H^l).$$

<u>定理</u>5 ([5]). $M = M(\Pi, \Pi_0)$ を既約成分が m 個の対称空間とし, それぞれの成分の階数を, $r_1, \cdots, r_m$ とする。このとき必ず $\#\{\Pi - \Pi_0\} = m$ となるが, $\mathrm{Im}(p) = (p_1, \cdots, p_m)$ とおくと, $(f_p, M(\Pi, \Pi_0))$ の次数は

$$p_1 r_1 + \cdots + p_m r_m$$

に等しい。

ここで, M を $P_N(C)$ の第2基本形式が平行な Kähler 部分多様体とすれば, Gauss の公式より M は局所対称となるから, 定理5と注意3より, $p_1 r_1 + \cdots + p_m r_m \leqq 2$ を解いて, 次の場合だけが可能であることがわかる。

(A) $m = 1$, $p_1 = r_1 = 1$

(B) $m = 1$, $p_1 = 2$, $r_1 = 1$

(C) $m = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, $r_1 = r_2 = 1$

(D) $m = 1$, $p_1 = 1$, $r_1 = 2$.

これらを順に等質空間の形で書けば,

(1) $P_n(c) = SU(n+1)/S(U(n)\times U(1))$,

(2) $P_n(c/2)$,

(3) $P_n(c)\times P_m(c)$,

(4) $SO(n+2)/SO(n)\times SO(2)$,

(5) $SU(s+2)/S(U(s)\times U(2))$,

(6) $SO(10)/U(5)$,

(7) $E_6/Spin(10)\times T$,

となる。よって，階数が1または2の compact Hermitian 対称空間であるといえる。

以上，表現論の立場から $P_N(c)$ の Kähler 部分多様体，特に $H^2=0$ なるものを述べてきたが，対称Kähler 部分多様体は代数的に簡潔に述べることができる。すなわち，

<u>定理</u> 6([4]). $P_N(c)$ の対称 Kähler 部分多様体はすべて2次の代数方程式で与えられる。

従って，この定義方程式を $g_1=0, \cdots, g_r=0$ とすれば，原理的にはMの幾何学が $g_1,\cdots,g_r$ と対応しているわけである。この対応関係を明らかにすることは興味ある問題と思われる。

文献

[1] A. Borel and A. Weil, Représentations linéaires et espaces homogénes kählériens des groupes de Lie compacts, Séminaire Bourbaki (Exposé by J. P. Serre) : 1954.

[2] E. Calabi, Isometric imbedding of complex manifolds, Ann. of Math., 58 (1953), 1-23.

[3] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 638-667.

[4] Y. Sakane and M. Takeuchi, On defining equations of symmetric submanifolds in complex projective spaces, to appear.

[5] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kählerian submanifolds of a complex projective space, Osaka Math. J., 14 (1977), 501-518.

[6] M. Takeuchi, Homogeneous Kähler submanifolds in complex projective spaces,

J. Math. Soc. Japan, 4(1978), 171-219.