

# Burago - Toponogov の定理について

北大 酒井 隆

コンパクト連結 Riemann 多様体  $M$  の単射半径 (injectivity radius)  $i(M)$  は

$i(M) := \text{Sup} \{ r > 0 : \text{Exp}|_{B_r(O_m)} \text{ が } \forall m \in M \text{ に対して微分同型} \}$   
によって定義される。ここで  $\text{Exp}$  は  $M$  の指数写像,  $B_r(O_m)$  は  $m$  での接空間  $T_m M$  の原点  $O_m$  を中心, 半径  $r$  の開球である。  $i(M)$  は正で最も短い (単純) 閉測地線の長さの半分と, 測地線に沿った第一共役点までの最短距離の小さい方に一致することが知られている。  $i(M)$  の  $M$  の幾何学的量による評価は重要な問題で, pinching problems や topological types の有限性定理において本質的な役割りを果している。

特に  $M$  が単連結コンパクト Riemann 多様体でその断面曲率  $K$  が正定数  $\delta$  に対して  $(0 <) \delta \leq K \leq 1$  をみたしているとき。  $M$  の次元  $\dim M$  が偶数のときは任意の  $\delta > 0$  に対して  $i(M) \geq \pi$  が知られている (Klingenberg, [K], [C-E])。他方奇数次元の場合は  $\delta \geq 1/4$  ならば  $i(M) \geq \pi$  が知られている (Klingenberg, 最近 = 通りの方法で証明が与えられた [C-G], [K-S])。しかし  $\delta < 1/4$  のときは  $i(M) \geq \pi$  が成立しない  $M$  の例がある (Berger [C-E])。今のところは  $\delta < 1/4$  のとき

/

の様子がよく分かっているとは云えない。さて Burago-Toponogov ([B-T]) は次を主張している:

$M$  を 3次元コンパクト単連結 Riemann 多様体でその断面曲率が  $K \leq 1$  を満たし, Ricci 曲率が各接ベクトル  $v$  に対して  $\text{Ricci}(v) \geq R (> 0)$  を満たすとする。このとき  $i(M) > 6e^{-6/R}$ 。

彼等の証明方法は非常に興味深いがそのままでは議論に本質的な gap がある様に思える。ここではその gap 上の上の評価を次の様に改良しよう。

定理  $M$  を 3次元コンパクト単連結 Riemann 多様体で  $K \leq 1$ ,  $\text{Ricci}(v) \geq R (> 0)$

を満たすものとする。このとき任意の  $b > 1$  に対して

$$i(M) \geq \text{Min} \left\{ \frac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2 + (b-1)^2}, \pi \left\{ 1 + \frac{1}{\pi^2} (e^{b/R} - 1)^4 \right\}^{-1/2} \right\}.$$

注意1. これは定曲率の場合でも best possible から程遠い。

上の評価は次の様にも解釈できる: 任意の  $b > 1$ ,  $\log \left( 1 + \sqrt{\frac{b^2\pi^2 - (b-1)^2}{2b(b-1)}} \right)$

$> b/2$  に対して一意に  $R_0 = R_0(b) (< 2)$  が定まって

$$i(M) \geq \begin{cases} \frac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2 + (b-1)^2} & \text{if } \text{Ricci}(v) \geq R (\geq R_0) \\ \pi \left\{ 1 + \frac{1}{\pi^2} (e^{b/R} - 1)^4 \right\}^{-1/2} & \text{if } \text{Ricci}(v) \geq R, R \leq R_0 \end{cases}$$

前者は  $R$  に依らない評価で上には述べた事実を反映している。

またたとえば  $b=2$  ととると  $R_0 = 2 / \log(1 + \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2 - 1})$  ( $< 2$ ) であつて  
 $\pi \{1 + \frac{1}{\pi^2}(e^{2/R} - 1)\}^{-1/2} > 7 \cdot (6e^{-4/R})$ .

注意 7次元の場合最早上の様な評価は期待できない。実際  
 7次元コンパクト単連結有次元間の族  $\{M\}$  である  $\delta > 0$  に  
 対して  $\delta \leq K_M \leq 1$  を満たすか  $\text{Inf } i(M) = 0$  となるものが  
 存在する ([H], [S])。

以下 gap をうめ子的に我々は Fiala ([F]) と Ehrlich ([E])  
 の結果を用いるのでニホラについても詳しく述べることにす  
 る (§2, §5)。

### §1. 問題の reduction

最初に  $M$  が実解析的な場合を考える。  $K \leq 1$  の仮定から第  
 一共役長までの距離は  $\pi$  以上であり、閉測地線の長さの評価  
 が問題となる。いま  $C$  を長さ  $l$  の単純閉測地線と可る。ニホ  
 は  $M$  の実解析的な Jordan 曲線であるか、 $C$  に対して Plateau  
 問題—可なり  $C$  を境界と可る面積最小の極小曲面を張る問  
 題—を考える。ニホに対して Douglas-Morrey の解と呼ばれ  
 る  $\mathbb{R}^2$  の単位円板  $D$  から  $M$  の実解析的な写像

$$F: D \rightarrow M, \quad F|_{\partial D} = C$$

による解がある。  $M$  が3次元、実解析的な場合は  $F$  の分岐長  
 が内部にも境界にもなく  $F: D \rightarrow M$  が immersion になつて  
 いることが知られてゐる ([O1], [G], [G-L])。尤も  $D$  に

$M$  から  $F$  によって導かれる Riemann 計量を与えておく。

$NF$  を  $F$  の法バンドルとして  $F$  に沿ったの単位法ベクトル場  $\nu: D \rightarrow NF$  を考える。  $f$  を  $f|_{\partial D} \equiv 0$  をみたす  $D$  上の任意の  $H^1$ -級関数として、 $F$  の境界を保つ変分

$$F_t: D \ni m \longrightarrow \text{Exp } t f(m) \nu(m)$$

をとる。  $F$  が面積最小の極小曲面だから  $F_t$  の面積の第 2 変分は非負である。すなわち

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{Area } F_t = \int_D \{ |\nabla f|^2 - f^2 \text{Ricci}(\nu) - f^2 |B|^2 \} dS \\ &\leq \int_D (|\nabla f|^2 - f^2 R) dS. \end{aligned}$$

ここで  $\nabla f$  は上の計量に関する  $f$  の gradient,  $|B|$  は  $F$  の第二基本形式  $B$  の norm,  $dS$  は  $D$  の面積要素。この変分公式では 3 次元であることを本質的に用いている。したがって

$$\lambda_1(D) := \text{Inf} \left\{ \int_D \frac{|\nabla f|^2}{f^2} dS : f \in H^1(D), f|_{\partial D} \equiv 0 \right\}$$

Dirichlet 境界条件に関する  $D$  の Laplacian の第一固有値とすると

$$(1, 1) \quad \lambda_1(D) \geq R$$

という不等式を得る。したがって問題は  $\lambda_1(D)$  を境界の閉測地線  $C$  の長さに関する言葉で上から評価することに帰着される。そのために Burago - Toponogov は境界からの距離関数の level circles の長さの変化を考察し、特に  $D$  の  $\partial D$  が

ら垂直に走る任意の測地線は長さ  $\pi/2$  までは  $\partial D$  からの距離を実現する最短線であると主張している。しかし  $D$  が楕円曲面のためその Gauss 曲率は正とは限らないのでこの事実は一般には成立しない。そこで  $D$  において  $\partial D$  の "cut locus" を定義して、 $\partial D$  からの距離関数の level circles の長さの変化を詳しく調らべよう。これは Fiala ([F]) によって最初に考察された。

## 2.2. Fiala の結果.

$D$  を解析的なリーマン計量を持った 2-disk とする。我々の場合境界  $C (= \partial D): [0, l] \rightarrow D$  は長さ  $l$  の閉測地線である (この事実はこの節では本質的には用いられない)。以下で測地線は弧長で径数づけられているものとする。ここの目的は [F] の結果を私なりに解釈して述べることにあす。

$X$  を  $C$  に沿って  $C$  に垂直な単位ベクトル場とすればこれは平行ベクトル場である。Fermi 座標  $x$  を

$$x(\sigma, \tau) := \text{Exp}_\tau X(\sigma), \quad \sigma \in [0, l] / \{0, l\}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+$$

で定義すれば各  $\sigma$  に対して  $x_\sigma: \tau \rightarrow x(\sigma, \tau)$  は  $C$  から垂直に走る測地線である。  $a(\sigma)$  を  $x_\sigma$  が再び  $C$  と最初に交わる  $\tau$  ( $+\infty$  を含む) の値とする。もし  $x_\sigma$  が  $C$  と交われば  $\sigma$  には横断的に交わるから  $a(\sigma) < \infty$  のところでは  $a(\sigma)$  は  $\sigma$  の解析関数になる。よって  $\mathcal{D} := \{(\sigma, \tau) : \sigma \in [0, l] / \{0, l\}, 0 \leq \tau < a(\sigma)\}$  とお

$\alpha: \mathcal{D} \rightarrow D$  は上への実解析的写像で  $\{(0,0)\}$  の近傍では微分同型を与える。(任意の点  $m \in D$  に対して  $m$  と  $C$  の距離を実現する  $C$  に垂直な最短測地線が存在する)。定義より

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial x}{\partial \tau} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial x}{\partial \tau} \right\rangle = 1 \quad \text{である。}$$

(2.1) 定義: 測地線  $\alpha_\sigma$  に沿った  $C$  の焦点とは  $\frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = 0$  となる点  $\alpha_\sigma(\tau)$  のこととする。 $\alpha_\sigma$  に沿った最初に現われる焦点全体の集合を  $C$  の焦跡 (focal locus) と呼んで  $F(C)$  で表す。

$J_\sigma(\tau) := \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma, \tau)$  は Jacobian の方程式をみたすから陰関数定理より  $F(C)$  は局所的には解析関数  $\tau = g(\sigma)$  を用いてパラメータ表示できることが分かる。

(2.2) 定義:  $\alpha_\sigma$  に沿った  $C$  の cut point とは  $\alpha_\sigma$  上の点で  $C$  からの距離を実現する最後の点のこととする。その集合を  $C$  の cut locus と呼んで  $C(C)$  で表す。 $D$  がコンパクト故各  $\alpha_\sigma$  に沿った  $C$  の cut point が現われる。 $C(C)$  の  $\alpha$  による  $\mathcal{D}$  へのリフトを tangent cut locus と呼んで  $\hat{C}(C)$  で表す。 $\hat{C}(C) = \{(\sigma, g_1(\sigma)) : \sigma \in [0, l] / [l_0, l_1]\}$  と書ける。

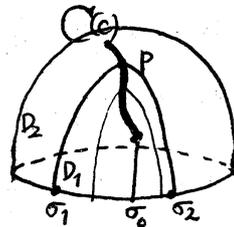
一点の cut locus の場合と同様に  $g_1(\sigma) \leq g(\sigma)$  で  $g_1(\sigma)$  は連続関数となる。特に  $\hat{C}(C)$  は  $S^1$  に同相である。 $\mathcal{D}_0 := \{(\sigma, \tau) : \sigma \in [0, l] / [l_0, l_1], 0 \leq \tau < g_1(\sigma)\}$  とおくと、 $\alpha|_{\mathcal{D}_0}$  は微分同型となり、 $\partial \mathcal{D}_0 = \hat{C}(C) \cup \{(\sigma, 0)\}$ 。

さてもし  $F(C)$  が一点になれば  $F(C)$  は  $C(C)$  と一致し、 $g_1(\sigma)$

$=g(\sigma) = \text{定数}$  となる 2 が容易に示せる。そこで以下矢  $C$  は一点に帰着しないと仮定する。このとき次の事実がやさしい議論で成立する 2 が分かる。

(2.3)  $\alpha_\sigma$  に沿ったの焦点がまた cut point にもなっている様な  $\sigma$  の値は有限個しかない。

(2.4)  $p \in C(C)$  とし異なる 2 本の最短線  $\alpha_{\sigma_1} | [0, \tau], \alpha_{\sigma_2} | [0, \tau]$  が  $p$  で交わるとする。  $\alpha_{\sigma_1}, \alpha_{\sigma_2}$  は  $D$  を 2 つの領域  $D_1, D_2$  にわける。  $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq l$  とし  $D_1$  が  $C | [\sigma_1, \sigma_2]$  をふくめば  $\forall \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$  に対し  $\alpha_\sigma$  に沿ったの  $C$  の cut point は  $D_1$  にふくまれる。更に  $\sigma_0 \in (\sigma_1, \sigma_2)$  で  $\alpha_{\sigma_0}$  に沿ったの  $C$  の cut point が焦点になっているものがある。同様の結論が  $D_2$  に対しても成立する。



さて  $p \in C(C)$  に対し 2 次の 3 条件を考える。

- (i)  $p \in C(C)$  はある  $\alpha_\sigma$  に沿ったの  $C$  の焦点。
- (ii)  $C$  と  $p$  を結ぶ最短測地線は唯一本である。
- (iii)  $p \in C(C)$  に対し  $C(C)$  の 1-cell で  $p$  を端点とするものが丁度一つある。このとき  $p$  を  $C(C)$  の端点と呼ぶ。

このとき (2.4) を用いて

(i) が成立する 2 が分かる。(2.3) より  $C(C)$  の端点 (ii)  $\longleftrightarrow$  (iii) 端点 は有限個である。  $D$  が disk だから  $C(C)$

は閉曲線を含み得ず  $\mathcal{C}(c)$  は曲線論という“樹 (tree)”となる。

同様の議論を用いて

(2.5)  $p \in \mathcal{C}(c)$  に対して  $c$  から  $p$  への最短線の個数は有限で、 $p$  から出る  $\mathcal{C}(c)$  の 1-cells の個数に等しい。これを  $p$  の位数と呼ぶ。<sup>\*</sup>

$p \in \mathcal{C}(c)$  は  $p$  が  $c$  の焦点ではなくかつその位数が2のとき regular cut point と云う。そうでない cut point は singular であるとする。regular (singular) cut points の  $\widehat{\mathcal{C}}(c)$  への lift を regular (singular) tangent cut points と云う。

(2.6) 有限個の singular (tangent) cut points しか存在しない。これは (2.3) と無限個の位数が3以上の cut points があれば (2.4) より無限個の焦点が存在することになり証明される。次に  $\mathcal{C}(c)$  での regular cut points の集合の連結成分は (2.6) より有限個でありそれは正則な解析曲線となることを見よう。定義より丁度2個の最短線  $\gamma_0 | [0, \tau_0]$ ,  $\gamma_1 | [0, \tau_1]$  で点  $p$  に終るものがある。 $(\sigma_0, \tau_0)$  (resp.  $(\sigma_1, \tau_1)$ ) の近傍で  $(\sigma', \tau')$  (resp.  $(\sigma', \tau')$ ) は  $p = \alpha(\sigma_0, \tau_0) = \alpha(\sigma_1, \tau_1)$  の局所座標系を定義し、実解析的な座標変換

$$\begin{cases} \sigma' = u(\sigma, \tau) \\ \tau' = v(\sigma, \tau) \end{cases} \quad (\text{resp.} \quad \begin{cases} \sigma = u'(\sigma', \tau') \\ \tau = v'(\sigma', \tau') \end{cases})$$

\* [M]での事実を帰納法で証明を主張しているがその証明は正しくない。Lefschetz (2.5) は正しい。<sup>自明</sup>

を得る。このとき  $w(\sigma, \tau) := v(\sigma, \tau) - \tau = 0$  なる方程式を得る。  
 $w(\sigma_0, \tau_0) = 0$  は明らかで  $\sigma_0, \tau_0$  が異なる 2 点  $(\sigma_0, \tau_0) \neq 0$  が従う。  
 よって陰関数定理から  $\sigma_0$  の近傍で定義された解析関数  $\tau = g_1(\sigma)$  で  $\tau_0 = g_1(\sigma_0)$ ,  $v(\sigma, g_1(\sigma)) = g_1(\sigma)$  なるものを得る。これが cut locus の (局所的な) 方程式を与えることはすぐ分かる。

注意.  $p$  の近傍で cut locus は cut point と  $C$  を結ぶ 2 個の最短線の  
 内角を 2 等分している。これは第一変分公式から得る。

更に regular cut points の連続成分を定義する解析関数  $\tau = g_1(\sigma)$  には高々有限個の危点しか存在しないことを示そう。  
 まず  $\tau = g_1(\sigma)$  の危点では存在する 2 本の  $C$  から最短線が  
 cut point で直角をなすことに注意する。実際

$\langle \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \chi(\sigma, g_1(\sigma)), \frac{\partial \chi}{\partial \tau}(\sigma, g_1(\sigma)) \rangle = 0$ . よってもし無限個の危点があれば、  
 $C$  から垂直に交り  $C$  に垂直に終る無限個の測地線があり、  
 長さか上に有界なものがある。他方  $p, S$  で定義された  $a(\sigma)$  は  
 解析的であったから  $C$  から延びる可べいの測地線  $\chi_\sigma$  は  $C$  に垂  
 直に終ることはなる。  $a(\sigma)$  が最小値をとる  $\sigma$  の値を  $\sigma_0$  とすれば  
 は  $\chi(\sigma_0, a(\sigma_0))$  を通る 2 本の曲線  $\sigma \rightarrow \chi(\sigma, a(\sigma))$ ,  $\sigma \rightarrow \chi(\sigma, a(\sigma))$   
 は共に測地線の場合  $\chi_\sigma$  に垂直で一致しなければならない。こ  
 れより  $a(\sigma) \equiv \text{定数}$  を得る。これより  $F(C)$  が一点に帰着す  
 ることが示せて矛盾を得る。以上をまとめ

(2.7)  $\tilde{C}(C) = \{(\sigma, g_1(\sigma))\}$  は連続関数  $\tau = g_1(\sigma)$  によつて経  
 9

数づけられる。  $g_1(\sigma)$  は有限個の  $\sigma$  の値を除いて実解析的であり、その危点の個数はたかだか有限である。

次に  $\rho(m) := \rho(m, c)$  を  $c$  からの距離関数とし、

$$\Omega_t := \{m \in D : \rho(m) \geq t\}, \quad S_t := \text{Area} \Omega_t, \quad S = S_0 = \text{Area} D$$

$$\Lambda_t := \{m \in D : \rho(m) = t\}, \quad l_t := \text{length } \Lambda_t, \quad \rho = \max_{m \in M} \rho(m)$$

と置く。このとき次が成立する。

(2.8) 定理 [FJ]  $t \rightarrow l_t$  ( $\rho \geq t \geq 0$ ) は連続で有限個の  $t$  の値を除いて実解析的である。さらに  $K_D$  は Gauss 曲率と可なり

$$\frac{d}{dt} l_t \leq \int_{\Omega_t} K_D \, ds - 2\pi$$

証明.  $\tilde{\Lambda}_t$  を  $\Lambda_t$  の  $\alpha$  による  $\overline{\Omega}_0$  への lift とする。すなわち  $\tilde{\Lambda}_t := \{(\sigma, t) \in \overline{\Omega}_0\}$ 。すると  $\tilde{\Lambda}_t \cap \hat{C}(c)$  はたかだか有限個の点よりなる。さもなければ  $c = g_1(\sigma)$  の無限個の危点が存在することになるから。よって  $E := \{(\sigma, \tau) : \sigma \in [0, l]/(0, l), \tau \in \mathbb{R}\}$  上

$$f(\sigma, \tau) := \begin{cases} \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \right| & \text{if } (\sigma, \tau) \in \overline{\Omega}_0 \\ 0 & \text{if } (\sigma, \tau) \notin \overline{\Omega}_0 \end{cases} \quad \text{と置く。}$$

すると  $l_t = \int_0^l f(\sigma, t) \, d\sigma$  である。  $l_t$  の連続性を示す。

まず  $M > 0$  で  $0 \leq f \leq M$  on  $E$  をみたすものを選ぶ。  $t$  を固定し  $t_n \rightarrow t$  とする。  $\varepsilon > 0$  を任意に与える。  $\hat{C}(c)$  は区分的に滑らかなので  $\tilde{\Lambda}_t \cap \hat{C}(c)$  は  $(c$  の原点を必要なら取り換えることにより) 有限個の点  $\{(\sigma_i(t), t) : 0 < \sigma_1(t) < \sigma_2(t) < \dots < \sigma_k(t) < l\}$  で

与えられるから  $\delta < \varepsilon/8kM, \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq k+1} (\sigma_i(t) - \sigma_{i-1}(t))$  ( $\sigma_0(t) \equiv 0, \sigma_{k+1}(t) \equiv l$ )

と (8)  $\delta_1 > 0$  を

$$N_{\delta, \delta_1} := \{(\sigma, \tau) : \sigma \notin \bigcup_{i=1}^k (\sigma_i(t) - \delta, \sigma_i(t) + \delta), |\tau - t| \leq \delta_1\}$$

が  $\tilde{C}(c)$  と交わらない様に選ぶことが出来る。  $N_{\delta, \delta_1}$  の連続性  
成分上  $f$  は一様連続だから正整数  $N$  が存在して  $n \geq N$  ならば

$$|f(\sigma, t) - f(\sigma, t_n)| < \varepsilon/2l \quad \text{for } (\sigma, t) \in N_{\delta, \delta_1}$$

とできる。すると

$$|t_n - t| \leq \int_0^l |f(\sigma, t) - f(\sigma, t_n)| d\sigma \leq \sum_{\sigma_i(t) - \delta}^{\sigma_i(t) + \delta} 2M d\sigma + \int_0^l \frac{\varepsilon}{2l} d\sigma < \varepsilon.$$

これより  $t$  の連続性を示された。次に  $\tau = t_0 \in \underbrace{\tilde{\Lambda}_{t_0}}_{(0 < t_0 < p)} \cap \tilde{C}(c)$  が  
空かあるかは (有限個の) regular tangent cut points  $(\sigma(t_0), g_1(\sigma(t_0)))$

で  $\sigma(t_0)$  が  $g_1$  の危兵でない様なものをばかりから成る値と可る。

有限個の  $\tau$  の値を除いて  $\tilde{\Lambda}_{\tau} \cap \tilde{C}(c)$  は二重性質を持つ。特に

後者の場合を考へる。二重とき tangent cut locus の定義方程式

$\tau = g_1(\sigma)$  は  $t_0$  の近傍で  $\sigma = \sigma(\tau)$  の形に解析関数を用いてとけ

る。即ち  $t_0$  の近傍において ( $c$  の原点を必要なら取り換える

ことにより)  $0 < \sigma_1^-(t) < \sigma_1^+(t) < \sigma_2^-(t) < \sigma_2^+(t) < \dots < \sigma_k^-(t) < \sigma_k^+(t) <$

$1$  を  $\tilde{\Lambda}_t = \bigcup [\sigma_i^-(t), \sigma_i^+(t)] \times \{t\}$  をおこなう様にとることも可

出来る。特に  $\alpha \mid (\sigma_i^-(t), \sigma_i^+(t)) \times \{t\}$  は微分同型で各 tangent

cut point  $(\sigma_i^{\mp}(t), t)$  は  $J$  度  $u \times v$  の  $(\sigma_i^{\mp}(t), t)$  と  $\alpha$  に付

て同一視される。更には (2.4), (2.6) の後の議論から  $\sigma \rightarrow$

$x(\sigma, t)$ ,  $\sigma \in U[\sigma_i^-(t), \sigma_i^+(t)]$  は曲線  $\Lambda_t$  に自然な向きを定めることとなる。さて  $l_t$  は

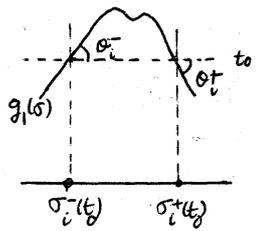
$$l_t = \sum \int_{\sigma_i^-(t)}^{\sigma_i^+(t)} \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma, t) \right| d\sigma \quad \text{と与えられ, } t_0 \text{ の近傍の } t \text{ に対しては } \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma, t) \right| \neq 0 \text{ であり } l_t \text{ の解析性は明らかである。更に}$$

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} l_t = \sum \int_{\sigma_i^-(t_0)}^{\sigma_i^+(t_0)} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right\rangle / \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right| \cdot d\sigma + \sigma_i^+'(t_0) \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_i^+(t_0), t_0) \right| - \sigma_i^-'(t_0) \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_i^-(t_0), t_0) \right|.$$

$$\begin{aligned} \text{まず (2.9) の右辺第 1 項} &= - \sum \int_{\sigma_i^-(t_0)}^{\sigma_i^+(t_0)} \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \sigma}} \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right| \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} / \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right| \right) \right\rangle \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right| d\sigma \\ &= - \int_{\Lambda_{t_0}} k_g ds. \end{aligned}$$

$\int ds = \int \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right| d\sigma$  は  $\Lambda_{t_0}$  の弧長,  $k_g$  は  $\Lambda_{t_0}$  の測地的曲率である。次にベクトル  $\frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_i^\pm(t_0), t_0)$  と曲線  $\varphi^\pm: t \rightarrow x(\sigma_i^\pm(t), t)$  の  $t=t_0$  における接ベクトルとなす角を  $\theta_i^\pm$  とする。乃至  $\varphi^\pm$  の弧長とすると

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_i^\pm(t_0), t_0) \right| \sigma_i^\pm'(t_0) &= \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right| \cdot \frac{d\sigma_i^\pm}{du} / \frac{du}{du} \\ &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \sigma} / \left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right|, \frac{d\varphi^\pm}{du} \right\rangle / \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{d\varphi^\pm}{du} \right\rangle = \mp \cot \theta_i^\pm \end{aligned}$$



を得る。幾何学的な意味から  $0 < \theta_i^\pm < \pi/2$ 。したがって

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} l_t = - \int_{\Lambda_{t_0}} k_g ds - \sum \cot \theta_i^\pm$$

を得る。

$\Delta_{t_0}$  は有限個の互いに素な disk に分かれその境界の角点 (cut points) における接線の変化の総和は  $\sum (\pi - \theta_i^- - \theta_i^+)$  であり与えられるから、Gauss-Bonnet の定理を適用して

$$\begin{aligned} 2\pi &\leq \int_{\Delta_{t_0}} K_D dS + \int_{\Lambda_{t_0}} k_g ds + \sum (\pi/2 - \theta_i^\pm) \\ &= \int_{\Delta_{t_0}} K_D dS - \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} l_t - \sum (\tan(\frac{\pi}{2} - \theta_i^\pm) - (\frac{\pi}{2} - \theta_i^\pm)) \\ &\leq \int_{\Delta_{t_0}} K_D dS - \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} l_t. \quad (\text{証明終り}). \end{aligned}$$

注意  $\tilde{\Lambda}_{t_0} \cap \tilde{C}(c) = \emptyset$  であるか  $\tilde{f}_1(c)$  が一点に帰着される場合でも同じ議論が明らかに成り立つ。また上の議論では解析性が本質的であり微分可能というだけで一般に  $l_t$  の連続性も成り立たない。

### §3 定理の証明 (解析的の場合)

$i(M)$  が定理で与えられた 2 つの数より小さいとして矛盾を出す。このとき  $i(M) < \pi$  が容易に分かり  $K \leq 1$  の仮定から長さ  $l < 2\pi$  の単純閉測地線  $C$  が存在する。§2 の議論により minimal immersion  $F: D \rightarrow M$ ,  $F|_{\partial D} = C$  および  $D$ -disk  $D$  上  $F$  により  $M$  から導入されたリーマン計量を考えることができる。  $0 < \varepsilon \leq \rho (= \max_{m \in M} \rho(m))$  に対して  $\varphi_\varepsilon: [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$  なる  $C^1$ -級関数を  $\varphi_\varepsilon(0) = 0$ ,  $\varphi_\varepsilon(\rho) = 1$  for  $\rho \geq \varepsilon$  をおける様にとり

$$f_\varepsilon(m) := \begin{cases} \varphi_\varepsilon(\rho(m)) & \text{if } \rho(m) \leq \varepsilon \\ 1 & \text{if } \rho(m) \geq \varepsilon \end{cases}$$

と定義すれば次を得る。

$$(3.1) \text{ 補題 } \int_D |\nabla f_\varepsilon|^2 dS = \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon'^2 l_t dt$$

証明. cut locus  $C(c)$  の近傍の列  $U_n := \{x(\sigma, \tau) : g_1(\sigma) \geq \tau > g_1(\sigma) - \frac{1}{n}\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) で  $U_n \rightarrow C(c)$  なるものを選ぶ。  $D_n := D \setminus U_n$ ,  $E_n := \{m \in D_n : \rho(m) \leq \varepsilon\}$  とおくと,  $\rho$  が  $C(c)$  を除いたところでは解析的で  $|\nabla \rho| = 1$  という事実から  $\varphi = \varphi_\varepsilon$  とおくと

$$\int_{D_n} |\nabla f_\varepsilon|^2 dS = \int_{D_n} (\varphi' \circ \rho)^2 dS = \int_{E_n} (\varphi' \circ \rho)^2 dS.$$

$\chi_t$  を  $\nabla \rho$  で生成される flow とする。  $\rho(\chi_t(m)) = t$  か  $m \in \partial D$ ,  $\chi_t(m)$  が  $C(c)$  に交るまで成立し,  $X_n := \{(t, \sigma) : \sigma \in [0, l] / [0, l], 0 \leq t \leq g_1(\sigma) - \frac{1}{n}\}$  とおくと  $\Phi_n(t, \sigma) := \chi_t(c(\sigma))$  で定義される微分同型  $\Phi_n : X_n \rightarrow M$  を得る。  $E_n \subset \Phi_n(X_n)$  に注意して  $Y_n := \Phi_n^{-1}(E_n)$  とおく。  $\omega_t$  が  $\Lambda_t$  の弧長要素を表わす可測ならば Fubini の定理, Lebesgue の定理を用いて

$$\begin{aligned} \int_{E_n} (\varphi' \circ \rho)^2 dS &= \int_{Y_n} (\varphi' \circ \rho \circ \Phi_n)^2 \Phi_n^* dS = \int_{Y_n} \varphi'^2(t) dt \wedge \Phi_n^* \omega_t \\ &= \int_0^\varepsilon \varphi'^2 \left\{ \int_{\chi_t^{-1}(\Lambda_t \cap E_n)} \chi_t^* \omega_t \right\} dt = \int_0^\varepsilon \varphi'^2 \text{length}(\Lambda_t \cap E_n) dt \\ &\longrightarrow \int_0^\varepsilon \varphi'^2 l_t dt \quad (\text{証明終り}). \end{aligned}$$

さて我々の場合  $F$  が極小で  $K \leq 1$  及び  $D$  の Gauss 曲率  $K_D \leq 1$

である。よって任意の  $\sigma \in [0, \rho] / (0, \rho)$  に対して  $\alpha_\sigma \in [0, \pi/2)$  には  $C$  の集束は現われぬ (Berger の比較定理 [C-E])。他方  $C \cap \mathcal{A}(C) \neq \emptyset$  であったから  $\rho \geq \pi/2$ 。また前節の議論から  $t < \pi/2$  に対しては  $l_t > 0$  である。さて  $\varepsilon < \pi/2$  に対し

$$g_\varepsilon(t) := \begin{cases} \int_0^t l_t^{-1} dt / \int_0^\varepsilon l_t^{-1} dt & \text{if } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1 & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

を選ぶ。すると (3.1) から

$$\int_D |\nabla f_\varepsilon|^2 dS = \left( \int_0^\varepsilon l_t^{-1} dt \right)^{-1}, \quad \int_D f_\varepsilon^2 dS \geq S_\varepsilon \quad \text{を得る。}$$

他方 (2.8) と  $K_D \leq 1$  より

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} l_t \leq S_t - 2\pi \leq S - 2\pi \quad (\text{有限個の } t \text{ を除いて})$$

(3.2) で  $t=0$  とおくと  $C$  が測地線であることから  $S \geq 2\pi$  を得る。と = 3 が等号不等式からこの事実から

$$S \geq 2\pi + \sqrt{4\pi^2 - l^2} \quad \text{を得る} \quad ([0, \rho]).$$

$l_t$  の連続性と (3.2) から  $l_t \leq (S-2\pi)t + l$  であるから

$$(3.3) \quad \lambda_1(D) \leq \frac{S-2\pi}{S_\varepsilon} \left( \log \frac{(S-2\pi)\varepsilon + l}{l} \right)^{-1}$$

が  $\varepsilon < \pi/2$  に対して成立するようになる。この背理法の仮定から

$$l < \frac{4b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2 + (b-1)^2}, \quad 2\pi \left\{ 1 + \frac{1}{\pi^2} (e^{bR} - 1)^4 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{であった。最初の不等式から}$$

$1 - \frac{1}{b} > \frac{\pi l}{2\pi + \sqrt{4\pi^2 - l^2}}$  が従う。次の二つの場合に分けて考へよう：

15

Case 1  $S - 2\pi = bS\varepsilon_0$  を満たす  $\varepsilon_0 \in (0, \pi/2)$  が存在する場合:

まず  $t_0 \in (0, \varepsilon_0)$  で

$$\frac{d}{dt} l_t \Big|_{t=t_0} \geq \frac{2S}{\varepsilon_0^2} \left(1 - \frac{1}{b}\right) - \frac{2l}{\varepsilon_0} \quad \text{を満たすものが存在する}$$

ことを主張する。実際そうでなければ  $l_t$  は連続で有限個の  $t \in (0, \varepsilon_0)$  を除いて  $\frac{d}{dt} l_t < \frac{2S}{\varepsilon_0^2} \left(1 - \frac{1}{b}\right) - \frac{2l}{\varepsilon_0}$  が成り立つ。2回

積分して、 $\int_{\Omega_t} dS = \int_0^t l_t dt$  に注意して

$$S - S\varepsilon_0 < S \left(1 - \frac{1}{b}\right) = S \left(1 - \frac{S\varepsilon_0}{S - 2\pi}\right) \leq S \left(1 - \frac{S\varepsilon_0}{S}\right) \quad \text{となり}$$

矛盾を得る。したがって (3.2) より

$$(3.4) \quad \frac{2l}{\varepsilon_0} + (S - 2\pi) \geq \frac{2S}{\varepsilon_0^2} \left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

次に  $\frac{2l}{\varepsilon_0} < S - 2\pi$  であることを注意する。実際そうでなければ

$$2l\varepsilon_0 \geq S \left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq (2\pi + \sqrt{4\pi^2 - l^2}) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \pi l \quad \text{となり}$$

$\pi l > 2l\varepsilon_0$  に矛盾する。したがって

$$(3.5) \quad S - 2\pi > \frac{S}{\varepsilon_0^2} \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

を得る。(3.3) から

$$\lambda_1(D) \leq b \left\{ \log \left(1 + \frac{(S - 2\pi)\varepsilon_0}{l}\right) \right\}^{-1}$$

を想い起す。他方 (3.5) から

$$(S - 2\pi)^2 \varepsilon_0^2 / l^2 > S(S - 2\pi) / l^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \pi \sqrt{\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 - 1}$$

よって

$$R \leq \lambda_1(D) < b \left\{ \log \left(1 + \sqrt{\pi \sqrt{\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 - 1}}\right) \right\}^{-1} \quad \text{となり}$$

$$l > 2\pi \left\{ 1 + \frac{1}{\pi^2} (e^{b/R} - 1)^4 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{を得る。矛盾。}$$

Case 2 も Case 1 から起すならば  $(S - 2\pi)/S < 1 < b$

よりある  $\varepsilon \in (0, \pi/2)$  に対  $(S-2\pi)/S\varepsilon < b$  が必要  
 にならない。したがって

$$\lambda_1(D) \leq b \left\{ \log \left( 1 + \frac{(S-2\pi)\varepsilon}{\rho} \right) \right\}^{-1} \quad \text{で } \varepsilon \rightarrow \pi/2 \text{ と}$$

$$R \leq \lambda_1(D) \leq b \left\{ \log \left( 1 + \frac{S-2\pi}{\rho} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right\}^{-1} \\
 < b \left\{ \log \left( 1 + \sqrt{\pi \sqrt{(2\pi/\rho)^2 - 1}} \right) \right\}^{-1}$$

を得る。  $\square$

$$\sqrt{\pi \sqrt{(2\pi/\rho)^2 - 1}} < \sqrt{(2\pi/\rho)^2 - 1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \left( \leq \frac{(S-2\pi)\pi}{2\rho} \right) \Leftrightarrow$$

$$\rho < 2\pi \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}} \quad \text{であり、前者の不等式は}$$

$$\rho \leq 2\pi \cdot \frac{2b(b+1)\pi}{b^2\pi^2 + (b+1)^2} < 2\pi \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}} \quad \text{より得られる。}$$

これは Case 1 と同様に矛盾が導かれ実解析的の場合の証明  
 が終わった。

4 定理の証明 (一般の場合).

$(M, g_0)$  を  $C^3$ -級コンパクト単連結リ-マニフォールド

$$K_{g_0} \leq 1, \quad \text{Ricci}_{g_0}(v) \geq R (> 0)$$

を与えることができる。  $M$  は与えられる  $C^3$ -微分構造と等しく  
 実解析的構造を持つ。 Nash の imbedding theorem から  
 等長な  $C^3$ -級 imbedding  $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^N$  がある。 可なり  
 $G_0 \in \mathbb{R}^N$  の標準的計量とすると  $g_0 = \Phi^* G_0$ . したがって  $M$  から  
 $\mathbb{R}^N$  への  $C^3$ -級写像全体の空間の中で  $M$  から  $\mathbb{R}^N$  への実解析

的な imbeddings の全体は residual な集合を  $C^3$ -位相に關して作る。したがって induced metrics を考へることにし、 $g_0$  は  $C^2$ -位相に關して ( $G_0$  から導かれる) 実解析的なリーマン計量に於て近似される。したがって  $M \in \mathcal{A}$  実解析的なリーマン計量  $g_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) で  $g_n \rightarrow g_0$  ( $C^2$ -位相),  $1 + \delta_n \geq K g_n$ ,  $\text{Ricci}_{g_n}(v) \geq R - \delta_n$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$  を満たすものがとれる。よって前節の結果より

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} i_{g_n}(M) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_n}} \text{Min} \left\{ \frac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2 + (b-1)^2}, \pi \left( 1 + \frac{1}{\pi^2} (e^{\frac{b}{R - \delta_n}} - 1) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \text{Min} \left\{ \frac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2 + (b-1)^2}, \pi \left( 1 + \frac{1}{\pi^2} (e^{\frac{b}{R}} - 1) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

ただし  $i_{g_0}(M)$  は計量  $g_0$  に關する単射半径を表す。

他方 Ehrlich の結果は ([E])

$$i_{g_0}(M) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} i_{g_n}(M)$$

を示すことが出来る。証明が容易に示される。

注意 Ehrlich に於ける証明はかなり長いが  $i_{g_0}(M) \geq$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} i_{g_n}(M)$  の簡単な証明を次節に与えておくことが出来る。

## §5. Appendix

ここでは次を示す。

(5.1) 命題  $M$  をコンパクト連結な  $C^2$ -可微分多様体とする。  $M$  上の  $C^2$ -リーマン計量の列  $g_n$  が  $C^2$ -位相でリーマン

> 計量  $g_0$  に収束するとき  $i_{g_0}(M) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} i_{g_n}(M)$  である。

この事実を示すためにいくつかの準備をする。まず常微分方程式の基本的な結果から。

(5.2) 補題  $N$  を  $C^1$  級リーマン多様体,  $X \in N$  上の  $C^1$ -ベクトル場,  $\alpha(t), (0 \leq t \leq R)$  を  $X$  の積分曲線とする。このとき正定数  $M := M(N, X, \alpha(0), R)$  が十分小さな  $\varepsilon, \delta > 0$  に対して次が成立する様なものが存在する:  $y(t)$  を  $\sup_{x \in N} |X_x - Y_x| < \delta$  なる  $N$  上の  $C^1$ -ベクトル場  $Y$  の  $\rho(\alpha(0), y(0)) < \varepsilon$  を満たす積分曲線とすれば

$$\rho(\alpha(t), y(t)) < M(\varepsilon + \delta t), \quad 0 \leq t \leq R.$$

証明.  $\alpha(t), 0 \leq t \leq R$  を含む  $N$  の相対コンパクトな座標近傍  $U$  を,  $U$  を  $\mathbb{R}^{\dim N}$  の開集合とみなしとき  $\square$  で  $\alpha(t)$  が座標軸上にある様子ものをとる。  $\exists A > 1$  s.t.  $\frac{1}{A}(\delta_{ij}) \leq (g_{ij}) \leq A(\delta_{ij})$  on  $U$ . euclid のノルムを  $\|\cdot\|$  で書くことは

$$\|X_x - Y_x\| < A\varepsilon, \quad \|\alpha(0) - y(0)\| < A\delta.$$

$X$  は  $C^1$ -級故  $\exists B > 0$  s.t.  $\|X_x - X_y\| < B\|x - y\|$  on  $U$ .

さて  $\alpha(t), y(t)$  をそれぞれ  $X, Y$  の解曲線とすれば:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\alpha}{dt} - \frac{dy}{dt} \right\| &= \|X_{\alpha(t)} - Y_{y(t)}\| \leq \|X_{\alpha(t)} - X_{y(t)}\| + \|X_{y(t)} - Y_{y(t)}\| \\ &< B\|\alpha(t) - y(t)\| + A\delta. \end{aligned}$$

よって  $\alpha(t) \neq y(t)$  ならば

$$\begin{aligned} \left\{ \|\alpha(t) - y(t)\| e^{-Bt} \right\}' &\leq \left\| \frac{d\alpha}{dt} - \frac{dy}{dt} \right\| e^{-Bt} - B\|\alpha(t) - y(t)\| e^{-Bt} \\ &< A\delta e^{-BR} \leq A\delta. \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq R$  に対し  $t_0 < t$  で  $x(t_0) = y(t_0)$  なる  $(t_0, t]$  に  $x(t) \neq y(t)$  なる  $t_0$  があれば

$$\|x(t) - y(t)\| e^{-Bt} \leq A\delta(t - t_0) \leq A\delta t$$

その様な  $t_0$  がなければ

$$\|x(t) - y(t)\| e^{-Bt} \leq A\delta t + \|x(t_0) - y(t_0)\|.$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad p(x(t), y(t)) &\leq A \{ A\delta t + A p(x(t_0), y(t_0)) \} e^{Bt} \\ &\leq A^2 e^{BR} (\delta + \delta t) \quad (\text{証明終り}). \end{aligned}$$

(5.3) 補題.  $(M, g_0)$  を  $C^2$ -級コンパクトリーマン多様体,  $(TM, \sigma_0)$  を接バンドル  $TM$  上の計量とする。  $M$  の  $C^2$ -リーマン計量の族  $\{g\}$  を考え  $\varphi_t^g: TM \rightarrow TM$  を  $g$  に関する geodesic flow とする。  $R > 0$  と  $g_0$  に関する単位接ベクトル  $v_0$  を固定する。  $\varepsilon_1 > 0$  に対し  $g_0$  の  $C^1$ -近接に関する近傍  $\mathcal{U}(g_0)$  が存在して  $g \in \mathcal{U}(g_0)$  ならば

$$p_{\sigma_0}(\varphi_t^g(v_0/|v_0|_g), \varphi_t^{g_0}(v_0)) < \varepsilon_1$$

$$p_{g_0}(\pi \circ \varphi_t^g(v_0/|v_0|_g), \pi \circ \varphi_t^{g_0}(v_0)) < \varepsilon_1 \quad 0 \leq t \leq R.$$

証明  $K^g: TTM \rightarrow TM$  を  $g$  に関する接続写像とする。  
(例えば [G-K-M] 参照。局所座標系  $\{x^i\}$  と  $K^g(\sum u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum (v^i + \sum \Gamma_{jk}^i u^j v^k) \frac{\partial}{\partial x^i}$ ). 特に geodesic spray  $S^g$  は  $TM$  上  $\pi_* S^g = v, K^g \cdot S^g = 0, v \in TM$  で特徴づけられる  $C^1$ -級ベクトル場がある。 geodesic flow  $\varphi_t^g$  は  $S^g$  から生成されることを注意しておこう。 また  $\sigma_0(\tilde{x}, \tilde{y}) = g_0(\pi_* \tilde{x}, \pi_* \tilde{y}) + g_0(K^{g_0} \tilde{x}, K^{g_0} \tilde{y})$

2) あり。いま  $\varepsilon, \delta > 0$  を  $M(TM, S_V^g, V_0, R) (\varepsilon + \delta R) < \varepsilon_1$  を満たす様にとる。すると  $C^1$ -位相に関する  $g_0$  の近傍  $\mathcal{U}(g_0)$  の  $g \in \mathcal{U}(g_0)$  に対して

$$|S_V^g - S_V^{g_0}|_{g_0} = |(K^g - K^{g_0})S_V^g|_{g_0}$$

$$(|\sum (\Gamma_{ij}^{(g)k}(\pi v) - \Gamma_{ij}^{(g_0)k}(\pi v)) v^i v^j \frac{\partial}{\partial x^k}|_{g_0}) < \delta \quad \text{と} \quad \rho_{g_0}(V_0/|V_0|_g, V_0) (\leq |1 - 1/|V_0|_g|) < \varepsilon$$

が単位接 bundle  $U(M, g_0)$  のある近傍に属する任意の  $V$  に対して成立する様をとる。

(5.2) より最初の結果が従う。第2の結果は  $\pi: (TM, g_0) \rightarrow (M, g_0)$  がリーマン submersion で距離を減少させることからできる。(証明終り)

次に  $P := \{(v, w) \in TM \times TM : \pi v = \pi w\}$  を考える。これは  $TM \times TM$  の部分多様体の  $G_0 \times G_0$  から導かれる計量を持っているとみるものとする。  $M$  上の  $C^2$ -計量  $g$  に対して  $P$  上の  $C^1$ -級ベクトル場  $Y^g$  を  $Y_{(v,w)}^g := (S_V^g, T_{V,W}^g)$  ー ただし  $T_{V,W}^g$  は  $K^g T_{V,W}^g = 0, \pi_* T_{V,W}^g = V$  ー で定義されるものとする。

$P$  の曲線  $t \rightarrow (\varphi_t^g(v), A_{v,w}^g(t)) \in P$  ー  $A_{v,w}^g(t)$  は  $W$  の測地線  $t \rightarrow \pi \circ \varphi_t^g(v)$  ー に対しての平行移動 ー が  $Y^g$  の積分曲線である。

(5.4) 補題  $(M, g_0)$  はコンパクトな  $C^2$ -級リーマン多様体。  $V_0 \in U(M, g_0)$  と  $\pi V_0 = \pi W_0$  なる  $W_0 \in TM$  および  $R > 0$  を固定する。すると  $\forall \varepsilon_1 > 0$  に対して  $g_0$  の  $C^1$ -位相に関する近傍  $\mathcal{U}(g_0)$  での  $g \in \mathcal{U}(g_0)$  ならば

$$\rho_{g_0}(A_{V_0, W_0}^g(t), A_{V_0/|V_0|_g, W_0}^g(t)) < \varepsilon_1, \quad 0 \leq t \leq R$$

をみたすものが存在する。

証明.  $\varepsilon, \delta > 0 \in MCP, Y^{g_0}, (v_0, w_0), R, (\varepsilon + \delta R) < \varepsilon_1$  の様  
 にとる.  $P_a := \{(v, w) \in P : |v|_{g_0} < 1+a, |w|_{g_0} < |w_0|_{g_0} + a\}$   
 とおくと  $a > 0$ ,  $g_0$  の近傍  $U(g_0)$  が存在して

$$|Y_{(v,w)}^g - Y_{(v,w)}^{g_0}|_{g_0} = |S_v^g - S_v^{g_0}|_{g_0} + |T_{v,w}^g - T_{v,w}^{g_0}|_{g_0} < \delta$$

$$(|T_{v,w}^g - T_{v,w}^{g_0}|_{g_0} = |\sum_i (T_{jk}^{g_i} - T_{jk}^{g_0}) w^j v^k \frac{\partial}{\partial x^i}|_{g_0} \text{ (注意) かつ}$$

$P_p((v_0, w_0), (v_0/|v_0|_{g_0}, w_0)) < \varepsilon$  かつ  $(v, w) \in P_a$  として  
 成立する様にできる.  $(TM \times TM, g_0 \times g_0)$  の距離に於て  
 Pythagoras の定理が成立し,  $P$  の距離は  $TM \times TM$  の距離よ  
 り小さくはなから (5.2) を用いる.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &\geq P_p^2(\varphi_t^g(v_0/|v_0|_{g_0}), A_{v_0/|v_0|_{g_0}, w_0}^g(t), (\varphi_t^{g_0}(v_0), A_{v_0, w_0}^{g_0}(t))) \\ &\geq P_{g_0}^2(\varphi_t^g(v_0/|v_0|_{g_0}), \varphi_t^{g_0}(v_0)) + P_{g_0}^2(A_{v_0/|v_0|_{g_0}, w_0}^g(t), A_{v_0, w_0}^{g_0}(t)) \\ &\geq P_{g_0}^2(A_{v_0, w_0}^{g_0}(t), A_{v_0/|v_0|_{g_0}, w_0}^g(t)), \quad 0 \leq t \leq R. \text{ (証明終り)}. \end{aligned}$$

さて (5.1) の証明に戻る. 必要なら 部分別 を考える = せめて  
 $g_n \rightarrow g_0$  ( $C^2$ -位相), かつ  $i_{g_n}(M) \geq i_{g_0}(M) + \varepsilon$  かつ  $\varepsilon >$   
 $0$  として 成立して いる と して 矛盾 を 出せば よい.  $R = i_{g_0}(M)$   
 $+ \varepsilon$  とおく.  $p \in M$  と  $p$  を 始点 とする  $g_0$ -測地線  $C_v: t \rightarrow$   
 $\pi \circ \varphi_t^{g_0}(v)$  ( $v \in U_p(M, g_0)$ ) を  $C_v|_{[0, i_{g_0}(M)]}$  は 最短 だが  $\forall \delta > 0$  に対して  
 $C_v|_{[0, i_{g_0}(M) + \delta]}$  は 最早 最短 ではない様に 選べる. 最初に  $q_i = C_v(i_{g_0}(M))$   
 かつ  $C_v$  に 沿って の 第一 共 攸 点 になつて いる 場合 を 考へる.  $e_i$  は  
 $T_p M$  の 基底,  $E_i(t) (= A_{v, e_i}^{g_0}(t)) \in e_i$  の  $C_v$  に 沿って の  $g_0$ -平

行移動と可。あると  $C^1$ -1"のトル場  $U(t) = \sum f^i(t) E_i(t)$ ,

$0 \leq t \leq R$  で  $U(0) = U(R) = 0$  の指数形式  $D^2E(C_V)$  を負

に可ともがある。可なり  $D^2E(C_V)(U, U) =$

$$\sum \int_0^R \{ g_{ij}^0 f^i(t) f^j(t) - K_{g_0}(U(t), \varphi_t^{g_0}(V)) g_{ij}^0 f^i(t) f^j(t) \} dt < 0,$$

ただし  $g_{ij}^0 := g_0(E_i(t), E_j(t)) - g_0(E_i(t), \varphi_t^{g_0}(V)) g_0(E_j(t), \varphi_t^{g_0}(V)) (=$

const.),  $K_{g_0}(U(t), \varphi_t^{g_0}(V))$  は  $\mathbb{R}^2$  のベクトルで張られる平面の

断面曲率を表す。他方  $E_i^g(t)$  は  $e_i$  の  $g$ -測地線  $C_{V/|V|_g}^g: t \rightarrow$

$\pi \cdot \varphi_t^g(V/|V|_g)$  に沿った平行移動とし、 $U^g(t) = \sum f^i(t) E_i^g(t)$

とす。このとき第2変分公式は  $D^2E(C_{V/|V|_g}^g)(U^g, U^g) =$

$$\sum \int_0^R \{ g_{ij}^{(g)} f^i(t) f^j(t) - K_g(U^g(t), \varphi_t^g(V/|V|_g)) g_{ij}^{(g)} f^i(t) f^j(t) \} dt,$$

ただし  $g_{ij}^{(g)} = g(E_i^g(t), E_j^g(t)) - g(E_i^g(t), \varphi_t^g(V/|V|_g)) g(E_j^g(t), \varphi_t^g(V/|V|_g))$

(= const.) である。また (5.3), (5.4) より  $g_n \rightarrow g$  ( $C^1$ -位相)

であれば  $|g_{ij}^{(g_n)} - g_{ij}^0| \rightarrow 0$  かつ  $[0, R]$  に一様に

$$|U^{g_n}(t) - U(t)|_{g_0} \rightarrow 0, \quad |\varphi_t^{g_n}(V/|V|_{g_n}) - \varphi_t^{g_0}(V)|_{g_0} \rightarrow 0.$$

他方断面曲率  $K_g$  は  $TM$  の 2-planes の空間  $G_2(M)$  上の関数と

考えれば  $g_n \rightarrow g_0$  ( $C^2$ -位相) のとき  $K_{g_n}$  は  $K_{g_0}$  に一様収束可

す。あると  $D^2E(C_{V/|V|_{g_n}}^{g_n})(U^{g_n}, U^{g_n}) \rightarrow D^2E(C_V)(U, U) < 0$

となり十分大きな  $n$  に対しては  $C_{V/|V|_{g_n}}^{g_n}|_{[0, R]}$  は最早最短

線には成り得ない。可なり  $i_{g_n}(M) < R = i_g(M) + \epsilon$  となり矛盾。

したがって  $g$  は  $p$  の共接点ではないと仮定してよい。このとき

長さ  $l = 2i_{g_0}(M)$  の  $p$  を基底と可る  $g_0$ -閉測地線  $C_V^{g_0}$  ( $V \in$

$U_p(M, g_0)$  がある。  $(\varepsilon > 0)$   $\delta > 0$   $\varepsilon > 2\delta < i_{g_0}(M) < i_{g_n}(M)$  とす  
 様にとす。 十分大きな  $n$  に対し  $\text{Exp}^{g_0} B_{\delta}^{g_0}(O_p) \subset$   
 $\text{Exp}^{g_n} B_{2\delta}^{g_n}(O_p)$  が成立する事に注意する。 二小は  $\varepsilon_n \rightarrow 0$   
 を  $P_{g_0}(q, r) \geq (1 - \varepsilon_n) P_{g_n}(q, r) \quad \forall q, r \in M$  が成立する様  
 とする事にから明らか。  $\varepsilon$  (5.3) から十分大きな  $n$  に対し  
 $z_n := C_{V/|V|g_n}^{g_n}(l) \in \text{Exp}^{g_0} B_{\delta}^{g_0}(O_p) \subset \text{Exp}^{g_n} B_{2\delta}^{g_n}(O_p)$  であ  
 る。  $z_n$  と  $p$  を結ぶ最短  $g_n$ -測地線  $\tau_n$  を取り  $z_n$  を  
 含まない閉曲線  $C_{V/|V|g_n}^{g_n} | [0, l] \cup \tau_n$  である  $g_n$ -閉曲線の長  
 $l_n$  を  $l_n < l + 2\delta$  を満たす  $z_n$  の  $l$  とする。

$C_{V/|V|g_n}^{g_n} | [0, t], t > l_n/2$  は最短線には成り得ない。 実  
 際十分小さい  $\alpha > 0$  に対し

$$P_{g_n}(p, C_{V/|V|g_n}^{g_n}(l_n/2 + \alpha)) \leq g_n\text{-length of } C_{V/|V|g_n}^{g_n} | [l_n/2 + \alpha, l] \cup \tau_n \\
= l - (l_n/2 + \alpha) + (l_n - l) = \frac{l_n}{2} - \alpha.$$

したがって  $i_{g_n}(M) < \frac{l_n}{2} < i_{g_0}(M) + \varepsilon$  (矛盾)。  $\varepsilon$  (5.1) の証明  
 が終わる。

注意 同様の考え方で  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_{g_n}(M) \geq i_{g_0}(M)$ , 亦す  
 上と合わせて。 単射半径  $\varepsilon > 0$  の  $C^2$ - $\eta$ -2-計量条件に  $C^2$ - $k$   
 相  $\lambda$  の空間に定義された関数  $f$  と  $f$  の連続性  
 不可  $\varepsilon$  である。

## References

- [B-T] Yu.D.Burago-V.A.Toponogov., On 3-dimensional riemannian spaces with curvature bounded above, *Math.Zametic*, 13 (1973), 881-887.
- [C-E] J.Cheeger-G.Ebin., comparison Theorems in Riemannain Geometry, North Holland-American Elsever, New-York, 1975.
- [C-G] J.Cheeger-D.Gromoll., On the injectivity radius of  $1/4$ -pinched manifolds, Preprint (1979).
- [E] P.Ehrlich., Continuity properties of the injectivity radius function, *Comp. Math.*, 29(1974), 151-178.
- [F] F.Fiala., Le problème les isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive, *Comment.Math.Helv.* 13 (1940/41), 297-346.
- [G-K-M] D.Gromoll-W.Klingenberg-W.meyer., Riemannsche Geometrie in Grossen, Lecture Notes in Math., 55, Berlin-Heidelberg -New York, Springer, 1968.
- [G] R.Gulliver., Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature, *Ann.Math.*, 97(1973), 275-305.
- [G-L] R.Gulliver-F.Lesley., On boundary branch points of minimizing surfaces, *Arch.Rat.Mech.and Anal.*, 52(1973), 20-25.
- [H] H.M.Huang., Some results on the pinching problem, Ph.D. Thesis, State Univ. of New York at Stony Brook, 1976.
- [K] W.Klingenberg., Contributions to Riemannian geometry, *Ann. of Math.*, 69(1959), 654-666.
- [K-S] W.Klingenberg-T.Sakai., Injectivity radius estimate for  $1/4$ -pinched manifolds, Preprint(1980).
- [M] S.B.Myers., Connections between differential geometry and topology, I, simply connected surfaces, *Duke Math.J.*, 1(1935), 376-391.
- [O<sub>1</sub>] R.Osserman., A proof of the regularity everywhere of the classical solutions to Plateau's problem, *Ann. of Math.* 91(1970), 550-569.
- [O<sub>2</sub>] R.Osserman., The isoperimetric inequality, *Bull.A.M.S.*, 84(1978), 1182-1238.
- [S] T.Sakai., Cut loci of Berger's spheres, Preprint(1980).