数理解析研究所講究録
第408巻 1980年 104-120

部分多様体の部分多様体と一般化されたガウス写像

徳島大 教育　石原 徹

リーマン多様体からユークリッド空間へのそう入に対してガウス写像が与えられる。この小文ではもう少し一般的なそう入に対してガウス写像を定義する。Eを$n+p+q$次元擬ユークリッド空間，Nを$n+p$次元擬リーマン多様体でEに等長的にそう入されているものとする。さらにn次元擬リーマン多様体MがNに等長的にそう入されているときに，Mから等質空間$G(n,p,q)=O(n+p+q)/O(n)\times O(p)\times O(q)$への写像（一般化されたガウス写像）を定義する。ここで$O(n+p+q)$等は擬ユークリッド空間の直交変換群である。

M. Obata [8]はn次元リーマン多様体の単連結完全な$n+p$次元定曲率空間Vへのそう入に対して，一般化されたガウス写像を定義した。Vの曲率が正のときは球面と考えられ，従ってVは$n+p+1$次元ユークリッド空間の部分多様体であり，曲率が負のときはVは$n+p+1$次元擬ユークリッド空間の部分多様体とみなせる。このように考えることによってObataの

ガウス写像と我々のガウス写像とは深い関係があることが示せる。負の定曲率空間のときも統一的に扱うために擬ユークリッド空間の場合も含める必要がある。そのとき，そう入される多様体M,N等を擬リーマンの場合まで広げて考えるほうが自然なので，そういう一般的な場合を扱うことにした。

等質空間 $G(n,p,q)$ は自然に $O(n)\times O(p)\times O(q)$-構造（G-構造の意味で）を持つ。この構造はさらに擬リーマン構造とみなせるので，$G(n,p,q)$ に自然に擬リーマン計量が与えられる。この計量を考えることで，我々のガウス写像の調和性，等角性を問題にすることができる。

§1. 擬ユークリッド空間とその部分空間の組の作る空間

E^n_r $(0\leqq r\leqq n)$ を n 個の実数の組 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ の作る擬ユークリッド空間とする。内積は $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} e_i x^i y^i$ で与えられる。ここで e_i は 1 か -1 の値をとり，-1 を r 回とるものとする。E^n_r の符号数は $(r, n-r)$ である。E^n_r の直交(変換)群 $O^r(n)$ は

$$O^r(n)=\{(a^i_j)\in GL(n,R),\ \sum e_k a^i_k a^j_k = e_i\delta^{ij}\}.$$

そのリー環 $\mathfrak{o}^r(n)$ は次のように与えられる。

$$\mathfrak{o}^r(n)=\{(A^i_j)\in \mathfrak{gl}(n,R),\ A^i_j=-A^j_i e_i e_j\}.$$

同様に E^p_s $(0\leqq s\leqq p)$ を符号数 $(s, p-s)$ の擬ユークリッド空間，$O^s(p)$，$\mathfrak{o}^s(p)$ をそれぞれ直交群，リー環とする。今 $E^{n+p}_{r+s}=E^n_r+$

$E^p_s=\{(x,y)\,;\,x\in E^n_r,\ y\in E^p_s\}$ とすると，E^{n+p}_{r+s} は符号数 $(r+s,n+p-r-s)$ の擬ユークリッド空間である。それの直交群，リー環を $O^{r+s}(n+p)$，$\mathfrak{o}^{r+s}(n+p)$ で表わす。さらに $E^q_t(0\leqq t\leqq q)$ を符号数 $(t,q-t)$ の擬ユークリッド空間とし，$E^{n+p+q}_{r+s+t}=E^{n+p}_{r+s}+E^q_t$ とすると，これは符号数 $(r+s+t,n+p+q-r-s-t)$ の擬ユークリッド空間である。それの直交群，リー環も同様に対応する記号で表わす。さてこのように一般に擬ユークリッド空間とその直交群，リー環を考えていくのであるが，特に必要のない限り簡単にユークリッド空間と同じ記号で表わすことにする。例えば，E^{n+p+q}_{r+s+t} を E^{n+p+q}，$O^{r+s}(n+p)$ を $O(n+p)$ で表わすことにする。

$G(n,p)$ を E^{n+p} の符号数 $(r,n-r)$ の部分空間のなす集合とする。$G(n,p)=O(n+p)/O(n)\times O(p)$ と表わされ非正定値のグラスマン多様体である。次に U を E^{n+p+q} の符号数 $(r,n-r)$ の n 次元部分空間，V を符号数 $(s,p-s)$ の p 次元部分空間とし，さらにこれらは $U\perp V$，すなわち互いに直交するものとする。今このような組 (U,V) 全体の集合を $G(n,p,q)$ で表わす。$O(n+p+q)$ は $G(n,p,q)$ に推移的に作用し，(E^n,E^p) を動かさない $O(n+p+q)$ の元は部分群 $O(n)\times O(p)\times O(q)$ を作る。従って

$$G(n,p,q)=O(n+p+q)/O(n)\times O(p)\times O(q)$$

である。次のような射影 π_i があることは明らかである。

$$
\begin{tikzcd}
 & G(n,p,q) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\
G(n+p,q) & G(n,p+q) & G(n+q,p)
\end{tikzcd}
$$

§2. ガウス写像

f_1を符号数$(r+s, n+p-r-s)$の擬リーマン多様体NからE^{n+p+q}への等長的そう入写像，f_2を符号数$(r, n-r)$の擬リーマン多様体MからNへの等長的そう入とする。この§ではE^{n+p+q}をさらに簡単にEで表わすことにする。$O(M), O(N), O(E)=E\times O(n+p+q)$をそれぞれ，$M, N, E$上の直交フレーム・バンドルとする。

$$O(N,M)=\{v=(Y_1,\cdots,Y_{n+p})\in O(N)|_M,\ Y_1,\cdots,Y_n \text{ が}M\text{に接する}\}$$

とすると，$O(N,M)$はM上の群$O(n)\times O(p)$をもつ主バンドルになる。同様に主バンドル$O(E,N)$も考えられる。さらに

$$O(E,N,M)=\{v=(Y_1,\cdots,Y_{n+p+q})\in O(E)|_M,\ Y_1,\cdots,Y_n \text{ が}M\text{に接し } Y_1,\cdots,Y_{n+p} \text{ が } N\text{に接する}\}$$

とすると，これもM上の主バンドルで群$O(n)\times O(p)\times O(q)$を持つ。次のような図式が考えられる。

$$
\begin{tikzcd}
 & O(E,N,M) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_1"] & O(E,N) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "j_3"] & O(E) \\
O(M) & O(N,M) \arrow[l, "j_3"'] \arrow[r, "i_3"] & O(N) &
\end{tikzcd}
$$

ここでi_1, i_2, i_3は自然なinjection，j_1, j_2, j_3は自然なprojectionである。$\theta_M, \theta_N, \theta_E$を$O(M), O(N), O(E)$のCanonical formとする

次のことが言える。

命題 2.1. Canonical forms $\theta_M, \theta_N, \theta_E$ の間に次の関係がある。

$$(i_3\cdot j_1)^*(\theta_N)=(j_2\cdot j_1)^*(\theta_M)=(i_2\cdot i_1)^*(\theta_E)$$

さて次に我々のガウス写像を定義しよう。$i=i_2\cdot i_1$ と置く。$\rho: O(E)=E\times O(n+p+q)\longrightarrow O(n+p+q)$ を自然な projection とするとき，写像

$$\tilde{g}(v)=\rho\circ i(v),\quad v\in O(E,N,M)$$

はバンドル写像で base の写像 g を導く。すなわち

$$\begin{array}{ccc} O(E,N,M) & \xrightarrow{\tilde{g}} & O(n+p+q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{g} & G(n,p,q) \end{array}$$

この g が我々のガウス写像である（$\tilde{g}$ もガウス写像と呼ぶ）。§1 の最後で述べた図式の projection π_i に対応して，$g_i=\pi_i\circ g$ と置くと次のことは明らかである。

命題 2.2. g_1 は $f_1\circ f_2: M\to E$ に対応する通常のガウス写像，g_2 は $f_2: N\to E$ に対応する通常のガウス写像と f_1 の合成である。

次に Ohata のガウス写像について簡単に述べる。まず定曲率空間 V は次のようなものとする。

$$V=\begin{cases}(\mathrm{i})\ S^{n+p}=\{x\in E^{n+p+1},\ x_1^2+\cdots+x_{n+p+1}^2=a^2\}\\(\mathrm{ii})\ H^{n+p}=\{x\in E_1^{n+p+1},\ -x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+p+1}^2=a^2\}\end{cases}$$

$\alpha(V)$をVの直交フレーム・バンドルとすると，それは群$G(n+p)$と同一視できる。ここで$G(n+p)$とは

$$G(n+p)=\begin{cases}(\mathrm{i})\ O(n+p+1)\ :\ E^{n+p+1}\text{の直交群}.\\(\mathrm{ii})\ O'(n+p+1)\ :\ E_1^{n+p+1}\text{の直交群}.\end{cases}$$

次にQをVのtotally geodesic n-space全体の作る集合とする。totally geodesic n-spaceは$E=$(i) E^{n+p+1}, (ii) E_1^{n+p+1}の原点を通る$n+1$次元部分空間((ii)のときは，符号数$(1,n)$の)とVとの交わりである。Qは等質空間$G(n+p)/G(n)\times O(p)$と同一視できる。さてMがn次元リーマン多様体として，$f:M\longrightarrow V$が等長的そう入とするとき，fに対応するObataのガウス写像は次のように与えられる。Mの各点xに対してQの点$g'(x)$を，xでMに接するVのtotally geodesic n-spaceであると決める。このとき写像$g':M\longrightarrow Q$がObataのガウス写像である。$g'(x)$はxと，xでのMの接空間(Eに含まれていると考えて)とで張られる$n+1$次元部分空間とVの交わりである。さらにxはVと直交することより次が言える。

<u>定理</u>2.3. Obataのガウス写像は$E=$(i) E^{n+p+1}, (ii) E_1^{n+p+1}, $N=$(i) S^{n+p}, (ii) H^{n+p}の場合の我々の写像$g_3=\pi_3\circ g$に等しい。

§3. 等質空間$G(n,p,q)$上の擬リーマン構造

始めに少し一般的なことについて復習する。Kをリー群とする。Hをその閉リー部分群として，等質空間$M = K/H$を考える．Mの次元をnとする。coset Hをoで表わしMの原点と呼ぶ。Kの元kはMに推移的に作用しさらにフレーム・バンドル$L(M)$にも作用する。$\pi : L(M) \to M$をProjectionとし，今$u_0 \in \pi^{-1}(o)$を一つとって固定する。u_0を線型写像$u_0 : E^n \to T_o(M)$とみなすことにする。すると$h \in H$のとき，$h : M \to M$の微分h_*は$T_o(M)$を$T_o(M)$に移すから，準同形写像$\lambda : H \to GL(n,R)$を$\lambda(h) = u_0^{-1} \cdot h_* \cdot u_0$で与えることができる。$\lambda$は$u_0$に関する線形等方表現である。$\chi : K \longrightarrow L(M)$を$\chi(k) = k \cdot u_0$で定義すると，次のことは明らかである。

<u>命題</u>3.1. $\chi(K)$は$L(M)$のsub bundleであり，M上の$\lambda(H)$-構造を与える。特にλが忠実ならば$\chi : K \to \chi(M)$は同形写像である。

次に$M = K/H$がreductiveのとき，すなわちKのリー環$\mathfrak{k}$の部分空間$\mathfrak{m}$が存在して$\mathfrak{k} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$，$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$, $ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$とできるときを考える。ここで$\mathfrak{h}$は$H$のリー環である。$\omega$を$K$のcanonical 1-formとする。すなわち$A \in \mathfrak{k}$のとき，$\omega(A) = A$で与えられるものである。$\omega_{\mathfrak{m}}$をωの$\mathfrak{m}$-成分とす

ると，次のことも容易に確かめられる。

<u>命題</u>3.1. λが忠実のとき，$\lambda(H)$-構造 $\chi(K)$ の canonical form θは $\theta=(\chi^{-1})^*\omega_{\mathfrak{m}}$ で与えられる。

$\omega_{\mathfrak{f}}$をωの$\mathfrak{f}$-成分とする。λが忠実のとき

$$(3.1)\qquad \omega'=\lambda_*\cdot(\chi^{-1})^*(\omega_{\mathfrak{f}})$$

が $\chi(K)$上の canonical connection を与える。また次のような K-不変な接続 ω' も考えることができる。

$$(3.2)\qquad \omega'_{u_0}(X')=\begin{cases}\lambda_*(X), & X\in\mathfrak{f},\\ \Lambda_{\mathfrak{m}}(X), & X\in\mathfrak{m}\end{cases}$$

ここでX'はXに対応するM上の vector field の$L(M)$への natural lift である。さらに $\Lambda_{\mathfrak{m}}$は

$$(3.3)\qquad \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)(Y)=\frac{1}{2}[X\ Y]_{\mathfrak{m}}\ ,\ X,\ Y\in\mathfrak{m}$$

で与えられるもので，同一視 $\mathfrak{m}\cong T_o(M)\cong E^n$ によって，$\mathfrak{gl}(n,R)$ に値をとるものと考えられる。ただし $[X\ Y]_{\mathfrak{m}}$は $[X\ Y]$の$\mathfrak{m}$-成分を表わしている。この(3.2)で与えられる接続は natural torsion free な接続と呼ばれるもので一般には $\chi(K)$上の接続ではなく $L(M)$ の接続と考えるべきである。([6] を参照).

以上の一般論を我々の場合の$K=O(n+p+q)$，$H=O(n)\times O(p)\times O(q)$に適用する。その前にこの小文で用いる添字の動く範囲は次

のとおりである。

$1 \leqq i, j, k \leqq n$, $n+1 \leqq a, b, c \leqq n+p$, $n+p+1 \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq n+p+q$,

$1 \leqq A, B, C \leqq n+p+1$, $1 \leqq i^*, j^*, k^* \leqq n+p$, $n+1 \leqq a^*, b^*, c^* \leqq n+p+q$,

$n+p+1 \leqq \alpha^*, \beta^*, \gamma^* \leqq n+p+q$ or $1 \leqq \alpha^*, \beta^*, \gamma^* \leqq n$.

$A = (A^i_a)$ が $n \times p$ 行列のとき, $A^* = (A^{*a}_i)$ は $p \times n$ 行列で $A^{*a}_i = -A^i_a e_i e_a$ をみたすものとする. そのとき $g(n, p, q)$ を

$$\begin{pmatrix} O & A & B \\ A^* & O & C \\ B^* & C^* & O \end{pmatrix}$$

なる形の行列全体の作る集合とする。ここで A は $n \times p$-行列, B は $n \times q$-行列, C は $p \times q$ 行列である。$\mathfrak{m} = g(n, p, q)$ とすることによって, $G(n, p, q) = O(n+p+q)/O(n) \times O(p) \times O(q)$ は reductive であることが解る。E^B_A ($\in gl(n+p+q, R)$) を (A, B)-成分だけが 1 でその他は 0 となるものとする。$F^B_A = E^B_A - E^A_B e_A e_B$ とすると F^a_i, F^α_i, F^α_a が $g(n, p, q)$ の base になる。

$E^{np} = \{(X^i_a)\}$ を符号数 $(ns + pr - 2rs,\ np - ns - pr + 2rs)$ で内積が次で与えられる擬ユークリッド空間とする。

$$(X, Y) = \sum e_i e_a X^i_a Y^i_a, \quad X = (X^i_a),\ Y = (Y^i_a) \in E^{np}.$$

$E_{ia} = E^a_i$ とすると, E_{ia} が E^{np} の base になる。同様に E^{nq}, E^{pq} を定義し $E^{np+nq+pq} = E^{np} \oplus E^{nq} \oplus E^{pq}$ とする。$u_0 \in L(M)$ を

$$u_0(E_{ia}) = \pi_*(F^a_i), \quad u_0(E_{i\alpha}) = \pi_*(F^\alpha_i), \quad u_0(E_{a\alpha}) = \pi_*(F^\alpha_a)$$

で決めると

補題 3.2. U_0に関する線形等方表現 $\lambda: O(n)\times O(p)\times O(q)$ ——→ $GL(np+nq+pq, R)$ は次で与えられて忠実である。

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} h^j_i & & 0 \\ & h^b_a & \\ 0 & & h^\alpha_\beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} h^{jb}_{ia} & & 0 \\ & h^{j\beta}_{i\alpha} & \\ 0 & & h^{b\beta}_{a\alpha} \end{pmatrix} \in O(np)\times O(nq)\times O(pq) \subset O(np+nq+pq).$$

ここで

$$h^{jb}_{ia} = h^j_i h^b_a e_a e_b, \quad h^{j\beta}_{i\alpha} = h^j_i h^\beta_\alpha e_\alpha e_\beta, \quad h^{b\beta}_{a\alpha} = h^b_a h^\beta_\alpha e_\alpha e_\beta.$$

上の補題より $\lambda(O(n+p+q))(\subset L(M))$ は擬リーマン構造を与えることが解る。この構造によって決る擬リーマン計量を常に$G(n,p,q)$上に考えることにする。我々の場合(3.1)で与えられたcanonical connection は torsion を持つ。従って擬リーマン接続は(3.2)で与えられるものである。この計量を具体的に決定するために λ_* と Λ_m を求める。まず $F^{jb}_{ia} = E^{jb}_{ia} - E^{ia}_{jb} e_i e_j e_a e_b$ などのように置くと，次がある。

$$\lambda_*(F^j_i) = \sum_a F^{ja}_{ia} + \sum_\alpha F^{j\alpha}_{i\alpha},$$

$$\lambda_*(F^b_a) = -\sum_j F^{ja}_{jb} + \sum_\alpha F^{b\alpha}_{a\alpha},$$

$$\lambda_*(F^\beta_\alpha) = -\sum_j F^{j\alpha}_{j\beta} - \sum_a F^{a\alpha}_{a\beta}.$$

一方 Λ_m は次のようになる。

$$\Lambda_m(F^a_i) = \frac{1}{2}\sum_\alpha F^{a\alpha}_{i\alpha}, \quad \Lambda_m(F^\alpha_i) = -\frac{1}{2}\sum_a F^{a\alpha}_{ia} e_a e_\alpha, \quad \Lambda_m(F^\alpha_a) = -\frac{1}{2}\sum_i F^{i\alpha}_{ia} e_a e_\alpha.$$

これらと(3.2)を用いると次がある。

定理 3.3. $G(n,p,q)$ の擬リーマン接続 ω' を次のように

置く。

$$\omega' = \sum \omega'^{ia}_{jb} F^{jb}_{ia} + \sum \omega'^{i\alpha}_{j\beta} F^{j\beta}_{i\alpha} + \sum \omega'^{a\alpha}_{b\beta} F^{b\beta}_{a\alpha} + \sum \omega'^{ia}_{j\alpha} F^{j\alpha}_{ia} + \sum \omega'^{i\alpha}_{j\beta} F^{b\beta}_{i\alpha}.$$

すると，$\omega'^A_B = (\chi^{-1})^*(\omega^A_\beta)$とすると，$\omega'$の成分は$\chi(O(n+p+q))$上で

$$\omega'^{ia}_{jb} = \omega'^i_j \delta^a_b - \omega'^b_a \delta^i_j,\quad \omega'^{i\alpha}_{j\beta} = \omega'^i_j \delta^\alpha_\beta - \omega'^\beta_\alpha \delta^i_j,\quad \omega'^{a\alpha}_{b\beta} = \omega'^a_b \delta^\beta_\alpha - \omega'^\beta_\alpha \delta^a_b,$$

$$\omega'^{ia}_{j\alpha} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \omega'^\alpha_a,\quad \omega'^{ia}_{b\alpha} = -\frac{1}{2}\delta^a_b e_b e_\alpha \omega'^i_\alpha,\quad \omega'^{i\alpha}_{a\beta} = \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta \omega'^i_a.$$

で与えられる。

§4. 調和なガウス写像

ガウス写像gの調和性について考える。命題2.2，定理2.3を考えに入れるとg_1, g_2, g_3もガウス写像と呼んで良いことがわかる。それらの調和性についても考える。まず§2, §3の結果を総めると次のような図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
O(E,M,N) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\pi_1"] & O(n+p+q) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & \chi(O(n+p+q)) \arrow[d, "\pi_2"] \\
M \arrow[r, "g"] & G(n,p,q) \arrow[r, leftrightarrow] & G(n,p,q)
\end{tikzcd}$$

UとVをそれぞれMと$G(n,p,q)$の開集合とし$g(U)\subset V$をみたすものとする。さらにlocal section $s_1: U \to O(E,N,M)$，$s_2: V \to \chi(O(n+p+q))$が存在すると仮定しておく。$(\omega^A_B)$を$O(n+p+q)$のcanonical form，$(\theta^A)$を$O(E^{n+p+q}) \to E^{n+p+q}$のcanonical form，$i: O(E,N,M) \to O(E^{n+p+q})$をinjection，そして$\omega'^A_B = (\chi^{-1})^*(\omega^A_B)$としておく。そこで

$\theta'^i = A_1^* i^*(\theta^i)$, $\omega''^i_a = A_2^*(\omega'^i_a)$, $\omega''^i_\alpha = A_2^*(\omega'^i_\alpha)$, $\omega''^a_\alpha = A_2^*(\omega'^a_\alpha)$

と置く。するとMと$G(n,p,q)$の擬リーマン計量がlocalに

$$ds^2_M = \sum e_i(\theta'^i)^2,$$

$$ds^2_{G(n,p,q)} = \sum e_{ia}(\omega''^i_a)^2 + \sum e_{i\alpha}(\omega''^i_\alpha)^2 + \sum e_{a\alpha}(\omega''^a_\alpha)^2$$

と表現される。ここで $e_{ia} = e_i \cdot e_a$ と置いてある。

$\rho^*(\omega^A_B)$ が $O(E^{n+p+q})$ の flat な擬リーマン接続を与えることと，命題2.1より $i^*(\theta^{a^*}) = 0$ が成立することより

$$(4.1)\quad \begin{cases} \tilde{g}(\omega^\alpha_a) = (\rho i)^*(\omega^\alpha_a) = \sum A^\alpha_{aj}\, i^*(\theta^j) \\ \tilde{g}(\omega^\alpha_a) = (\rho i)^*(\omega^{a^*}_i) = \sum A^{a^*}_{ij}\, i^*(\theta^j) \end{cases}$$

と置くことができる。ここで $A^{a^*}_{ij}, A^a_{ij}$ はそれぞれMのE^{n+p+q}とNへの等長そう入に対する第2基本形式とみなせる。ガウス写像gはlocalに $g = \pi_2 \circ \tilde{g} \circ A_1$ と表わすことができるので(4.1)より次が出る。

<u>補題</u>4.1. localに次のように置く。

$$g^*(\omega''^i_{a^*}) = \sum G^{ia^*}_j \theta'^j, \quad g^*(\omega''^a_\alpha) = \sum G^{a\alpha}_j \theta'^j.$$

すると次が成立する.

$$G^{ia^*}_j = A^i_{a^*j} = -A^{a^*}_{ij} e_{a^*} e_i, \quad G^{a\alpha}_j = A^a_{\alpha j} = -A^\alpha_{aj} e_\alpha e_a.$$

$O(E,N,M)$の自然な接続に関する A^i_{aj} の共変微分を

$$(4.2)\quad \sum A^i_{ajk}\theta'^k = dA^i_{aj} + \sum A^k_{aj}\omega''^i_k - \sum A^i_{bj}\omega''^b_a - \sum A^i_{ak}\omega''^k_j$$

で与える。$A^i_{\alpha j}$，$A^a_{\alpha j}$ の共変微分 $A^i_{\alpha jk}$, $A^a_{\alpha jk}$ も同様に

与えることができる。次にΦ, Ψを 1_{n+1} から n_{n+p+q}，そして $(n+1)_{n+p+1}$ から $(n+p)_{n+p+q}$ を走る添字とする。すると G^Φ_i の共変微分が

(4.3) $\sum G^\Phi_{jk}\theta^k = dG^\Phi_j - \sum G^\Phi_k \omega^k_j + \sum G^\Psi_j g^*(\omega''^\Phi_\Psi)$

で与えられる。ここで $\omega''^\Phi_\Psi = \Lambda_2^*(\omega'^\Phi_\Psi)$ かつ $\omega = (\omega'^\Phi_\Psi)$ は $G(n,p,q)$ 上の擬リーマン接続である。$g: M \longrightarrow G(n,p,q)$ は $\sum_j G^\Phi_{jj} e_j = 0$ のとき調和であると呼ばれる。(4.2), (4.3) 等より次を得る。

$$
(4.4)\quad \begin{cases}
G^{ia}_{jk} = A^i_{ajk} + \frac{1}{2}\sum(A^\alpha_{aj}A^i_{\alpha k} - A^\alpha_{ak}A^i_{\alpha j}), \\
G^{i\alpha}_{jk} = A^i_{\alpha jk} + \frac{1}{2}\sum(A^a_{\alpha j}A^i_{ak} - A^a_{\alpha k}A^i_{aj}), \\
G^{a\alpha}_{jk} = A^a_{\alpha jk} + \frac{1}{2}\sum(A^i_{\alpha j}A^a_{ik} - A^i_{\alpha k}A^b_{ij}).
\end{cases}
$$

従って

<u>定理</u>4.2. ガウス写像 $g: M \longrightarrow G(n,p,q)$ が調和であるための必要十分条件は

$$\sum_j A^i_{ajj} e_j = \sum_j A^i_{\alpha jj} e_j = \sum_j A^a_{\alpha jj} e_j = 0.$$

ガウス写像 $g_1: M \longrightarrow G(n, p+q)$ が調和であるための必要十分条件は E. A. Ruh と J. Vilms [9] によって与えられた。それは我々の記号で表わすと次のようになる。

(4.5) $\sum_k A^i_{akk} e_k - \sum_{\alpha,k} A^i_{\alpha k} A^\alpha_{ak} e_k = 0$, $\sum_k A^i_{\alpha kk} e_k - \sum_{a,k} A^i_{ak} A^a_{\alpha k} e_k = 0$.

次に $g_2: M \longrightarrow G(n+p, q)$ が調和であるための必要十分条件は

(4.6) $\sum_j A^i_{\alpha jj} e_j + \sum_{\alpha,j} A^a_{\alpha j} A^i_{aj} e_j = 0$, $\sum_j A^a_{\alpha jj} e_j + \sum_{i,j} A^i_{\alpha j} A^a_{ij} e_j = 0$.

同様に $g_3 : M \longrightarrow G(n+q,p)$ に関する条件は

(4.7) $\sum_j A^a_{\alpha jj} e_j - \sum_{i,j} A^a_{ij} A^i_{\alpha j} e_j = 0$, $\sum_j A^i_{ajj} e_j + \sum_{\alpha,j} A^\alpha_{aj} A^i_{\alpha j} e_j = 0$.

(4.4), (4.5), (4.6), (4.7) より次が出る。

定理4.3. g_1, g_2, g_3, g のどれか3つが調和であれば，残りも調和で，さらに次が成立する。

$$\sum_{\alpha,k} A^a_{\alpha k} A^\alpha_{ak} e_k = \sum_{\alpha,j} A^i_{aj} A^a_{\alpha j} e_j = \sum_{i,j} A^i_{\alpha j} A^a_{ij} e_j = 0.$$

次にNが E^{n+p+q} に totally umblic にそう入されているときを考える。このとき

$$A^\alpha_{i^* j^*} = \frac{1}{n+p} \sum_{k^*} A^\alpha_{k^* k^*} e_{k^*} \delta_{i^* j^*}.$$

従って $A^a_{\alpha i} = 0$, $A^a_{\alpha jk} = 0$ が出る。これより

定理4.4. Nが E^{n+p+q} に totally umblic にそう入されているとする。もしMがNで constant mean curvature を持つとき，g と g_1 が調和である。さらにもしMがNで極小的のとき g_2 と g_3 も調和である。

系4.5. Nを定理2.3.のように仮定する。リーマン多様体MがNに極小的にそう入さられことが，Obata のガウス写像が調和であるための必要十分条件である。

§5. 共形的なガウス写像

擬リーマン多様体M, NのRicci曲率を，直交baseに関してlocalに，R_{jk}，$K_{j^*k^*}$ と表わしておく。すると

$$(5.1)\begin{cases} K_{jk} = \sum (A^{\alpha}_{jk} A^{\alpha}_{i^*i^*} - A^{\alpha}_{ji^*} A^{\alpha}_{i^*k}) e_{i^*} e_{\alpha}, \\ R_{jk} = \sum (A^{a^*}_{jk} A^{a^*}_{ii} - A^{a^*}_{ji} A^{a^*}_{ik}) e_{a^*} e_{i}. \end{cases}$$

次に，g, g_1, g_2, g_3 が共形的であるための条件はそれぞれM上のsmoothな関数 μ, μ_1, μ_2, μ_3 が存在して，次式が成立することである。

$$(5.2)\begin{cases} \sum A^{i}_{a^*j} A^{i}_{a^*k} e_i e_{a^*} + \sum A^{a}_{\alpha j} A^{a}_{\alpha k} e_a e_{\alpha} = \mu e_j \delta_{jk}, \\ \sum A^{i}_{a^*j} A^{i}_{a^*k} e_i e_{a^*} = \mu_1 e_j \delta_{jk}, \\ \sum A^{i^*}_{\alpha j} A^{i^*}_{\alpha k} e_{i^*} e_{\alpha} = \mu_2 e_j \delta_{jk}, \\ \sum A^{a}_{\alpha^* j} A^{a}_{\alpha^* k} e_a e_{\alpha^*} = \mu_3 e_j \delta_{jk}. \end{cases}$$

これらより直ちに次を得る。

<u>命題</u>5.1. g, g_1, g_2, g_3 のどれか3つが共形的ならば，残りも共形的である。

MがE^{n+p+q}でpseudo-umblicであるとはM上のsmoothな関数ηが存在して $\sum A^{a^*}_{ij} A^{a^*}_{jk} e_i e_{a^*} = \eta e_j \delta_{jk}$ となるときである。Nに対しても同様に定義できる。これらのことと，(5.1)，(5.2)より次が従う。

<u>定理</u>5.2. M, NをE^{n+p+q}のEinstein, pseudo-umblicな部

分多様体とする。すると g が共形的なら g_3 も共形的であり、逆も成立する。

<u>定理</u>5.3. N を定曲率で, E^{n+p+q} の pseudo-umbilic な部分多様体とする。すると次の3つの条件のうち, 2つが成立すると残りも従う。

(1) M は N の pseudo-umbilic な部分多様体である。

(2) N は Einstein である。

(3) ガウス写像 g ($\leftrightarrow g_3$) が共形的である。

参考文献

[1] B.Y. Chen, Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker, New York, 1973.

[2] B.Y. Chen and K. Yano, On Submanifolds of Submanifolds of a Riemannian Manifold, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 548-554.

[3] S.S. Chern and S.I. Goldberg, On the Volume-decreasing Property of a Class of Real Harmonic Mappings, Amer. J. Math. 97 (1975), 133-147.

[4] A. Fujimoto, On Automorphisms of G-structures, J.

Math. Kyoto Univ. 1(1961), 1-20.

[5] S. I. Goldberg and T. Ishihara, Harmonic Quasiconformal Mappings of Riemannian Manifolds, Amer. J. Math. 98 (1976), 225-240.

[6] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry I, II, Wiley (Interscience), New York, 1963, 1969.

[7] S. Nishikawa, The Gauss map of Kaehler Immersions, Tohoku Math. J. 27(1975), 453-460.

[8] M. Obata, The Gauss Map of Immersions of Riemannian Manifolds in Spaces of Constant Curvature, J. Differential Geometry 2(1968), 217-223.

[9] E. A. Ruh and J. Vilms, The Tension Field of the Gauss Map., Trans. Amer. Math. Soc. 149(1970), 569-573.

[10] J. A. Wolf, Space of Constant Curvature, Mcgraw-Hill, 1967.