数理解析研究所講究録
第 408 巻 1980 年 141-144

完備で有界な部分多様体の曲率の評価

東北大 理　北川 義久

3次元ユークリッド空間 E^3 の中に完備な曲面 S を考える。S が半径 λ の球の中に閉じ込められている時，S のガウス曲率 K と λ の間には $\sup K \geqq \frac{1}{\lambda^2}$ なる関係が成り立つように思われる。一般に $(2n-1)$ 次元ユークリッド空間 E^{2n-1} の中の n 次元完備部分多様体 M に対しても，M が半径 λ の球の中に閉じ込められているならば M の断面曲率 K_M と λ の間には $\sup K_M \geqq \frac{1}{\lambda^2}$ なる関係が成り立つように思われる。ただし $\sup K_M = \sup\{M$のすべての断面曲率$\}$。以下ではこのことに関連したいくつかの結果を紹介する。

Mがコンパクトである場合には Chern, Kuiper, Otsuki により次の定理が知られている。

定理1（[2],[6]）　M を $(2n-1)$次元ユークリッド空間

E^{2n-1}の中のn次元コンパクト部分多様体とすると，Mの断面曲率K_Mは$\sup K_M>0$をみたす。

Jacobowitz は定理1を精密化し次の定理を得ている。

定理2（[3]）　Mを$(2n-1)$次元ユークリッド空間E^{2n-1}の中のn次元コンパクト部分多様体とする。もしMが半径λの球に含まれるならば，Mの断面曲率K_Mは$\sup K_M \geqq \frac{1}{\lambda^2}$をみたす。

定理2はMが完備の時でも正しいだろうか。定理2の証明は，球の中心から最大の距離にあるM上の点をとり，そこでの第2基本形式を調べることによるのであるが，Mが完備なる時には一般にこのような点は存在しない。Baikousis－Koufogiorgos は Omori [5] の結果を応用することにより次の定理を得ている。

定理3（[1]）　Mを$(2n-1)$次元ユークリッド空間E^{2n-1}の中のn次元完備部分多様体でスカラー曲率が下に有界であるとする。もしMが半径λの球に含まれるならば，Mの断面曲率K_Mは$\sup K_M \geqq \frac{1}{\lambda^2}$をみたす。

ここで次の問題を考えることができる。

A。定理3はスカラー曲率に対する条件なしでも成り立つのではないか。

B。定理3における評価式 $\sup K_M \geqq \frac{1}{\lambda^2}$ は曲がった空間の中ではどうなるか。

Aについては今のところ不明である。Bについての結果を述べる為に，連続関数 $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$ を次で定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \cdots x=0 \\ x\coth(x) & \cdots x>0 \end{cases}$$

定理4（[4]）$\overline{M}$ を $(n+p)$ 次元完備，単連結リーマン多様体で $\overline{M}$ の断面曲率 $K_{\overline{M}}$ が $a \leqq K_{\overline{M}} \leqq b \leqq 0$ をみたすとする。M を $\overline{M}$ の中の n 次元完備部分多様体でスカラー曲率が下に有界であるとする。もし $p<n$ で M が半径 λ の測地球に含まれるなら，M の断面曲率 K_M は $\sup K_M \geqq a + \lambda^{-2} f(\sqrt{-b}\lambda)^2$ をみたす。

定理4に関する注意 (1) $a=b$ なる場合 評価式の右辺は $\overline{M}$ における半径 λ の測地超球面（定曲率）の曲率を表わす。

(2) 評価式の右辺はλに関し減少関数で, $\lim_{\lambda \to 0}\left(a + \frac{f(\sqrt{b}\lambda)^2}{\lambda^2}\right) = \infty$。

文　献

[1] C. Baikousis – T. Koufogiorgos, Isometric immersions of complete Riemannian manifolds into Euclidean space, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 87～88.

[2] S. S. Chern – N. H. Kuiper, Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space, Ann. of Math. 56 (1952), 422～430.

[3] H. Jacobowitz, Isometric embedding of compact Riemannian manifold into Euclidean space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 245～246.

[4] Y. Kitagawa, Curvature estimates for complete and bounded submanifolds in a Riemannian manifold, preprint.

[5] H. Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 205～214.

[6] T. Otsuki, On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application, Proc. Japan. Acad. 29 (1953), 99～100.