数理解析研究所講究録
第 408 巻 1980 年 145-149

球面のある部分多様体について

東工大 理　阪本邦夫

本題の部分多様体について述べる前に，Besse [1] に従って，調和多様体の定義と若干の事実を述べておきたい。

M を n 次元リーマン多様体，$x \in M$，$v \in T_xM - \{0\}$ とする。$\gamma : t \longmapsto \exp_x\left(\frac{t}{\|v\|}v\right)$ を弧長により媒介変数表示された測地線，$\{Y_i\}_{i=2,\cdots n}$ を γ に沿うヤコビ場で，$Y_i(0)=0$，$Y_i'(0)$ は $\{v\}^{\perp}$ の正規直交基となるものとする。その時 $\theta : TM \to \mathbb{R}$ を $\theta(v) = \|v\|^{1-n} \det(Y_2(\|v\|), \ldots, Y_n(\|v\|))$，$\theta(0)=1$ により定義する。

定義. 各 $x \in M$ に対し，正の数 $\varepsilon(x)$ と $\Theta_x : [0, \varepsilon(x)) \to \mathbb{R}$ が存在して $\theta(v) = \Theta_x(\|v\|)$，$(\|v\| < \varepsilon(x))$ が成立する時，M は locally harmonic と呼ばれる。特に M が完備で $\varepsilon(x) = \infty$ である時，M は globally harmonic と呼ばれる。

さらに，K を熱方程式の基本解，$\delta(x, y)$ を x と y の距離を表わすことにすれば，

定義．Mがコンパクトで，任意の$x, y \in M$に対し，$K(x, y, t) = \Phi(\delta(x, y), t)$を満たす$\Phi : [0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$が存在する時，$M$は strongly harmonic と呼ばれる。

ところで，Mが実解析的である時，locally harmonic であることと globally harmonic であることとは同値であり，Mがコンパクト単連結である時，globally harmonic であることと strongly harmonic であることとは同値であることが知られている。さらに次の事実が Besse により示されている。すなわち，Mが strongly harmonic である時，λをラプラス作用素の固有値，Vをその固有空間，$N = \dim V$，$\{\varphi_i\}_{i=1,\cdots,N}$を$V$の正規直交基とすれば，$F(\delta(x, y)) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x)\varphi_i(y)$をみたす$F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$が存在し，写像$f : M \to V$（$f(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x))$）は埋入と成る。$M$の計量を適当に相似拡大してやれば，次の定理を得る。

定理．（Besse [1]）．$f(M)$はVのある超球Sに含まれる。さらに$f : M \to S$は極小的等長埋入であり，Mの各測地線のfによる像はSの曲線として曲率がすべて曲線にそって定数である。しかも，すべての２つの測地線はS上で互いに合同である。

さて，本題に移ろう。上に述べた定理は次の概念を導いてくれる。

Mをn次元，$\bar{M}$を$(n+p)$次元リーマン多様体とし，$f: M \to \bar{M}$を等長的埋入とする。

<u>定義</u>．Mの各測地線γに対し，$\sigma = f \circ \gamma$の曲率$\kappa_1, \ldots, \kappa_{d-1}$は$\sigma$にそって0ではない定数，$\kappa_d \equiv 0$であり，しかも$d$及び$\kappa_1, \ldots, \kappa_{d-1}$は$\gamma$に依存しない時，$f$を<u>*helical immersion of order* d</u>という。

今後，$\bar{M}$は$(n+p+1)$次元ユークリッド空間における単位超球$S(1)$とする。$\iota: S(1) \hookrightarrow E^{n+p+1}$を包含写像とする。

$f: M \to S(1)$を*helical immersion of order* dとしよう。$\sigma = f \circ \gamma$のフレネー標構を計算することによって次の結果を得る。

<u>命題</u>．$d \leqq p+1$．

<u>命題</u>．埋入fは*isotropic*である。

<u>命題</u>．fが極小的であれば，Mはアインシュタイン空間である。

最後の結果は*harmonic manifold*がアインシュタイン空間であるという事実に対応している。さらに曲線$\tau = \iota \circ f \circ \gamma$の曲率，フレネー標構を調べれば，次の結果を得る。

<u>命題</u>．$\iota \circ f: M \longrightarrow E^{n+p+1}$は$d$が偶数のとき*order*が$d$，$d$が奇数の時*order*が$d+1$の*helical immersion*である。

以後，dが偶数の場合のみ述べることにする（dが奇数の

場合もほぼ同様である）$x_0 \in M$ を任意に固定された点，$X \in T_{x_0}M$ を単位接ベクトルとする。γ を $\gamma(0)=x_0$，$\dot{\gamma}(0)=X$ なる測地線とする。

さて，$\tau = \tau \circ f \circ \gamma$ の x_0 におけるフレネー標構 $\tau^{(1)}(X), \cdots, \tau^{(d)}(X)$ は，その点における f の第二基本形式やびその高階共変微分によって表現される。これらを初期値とし，τ が満たすフレネーの微分方程式を解けば，我々は次の命題を得る。

命題．x_0 を中心とする測地的極座標により f は次のように表現される。

$$f(t, X) = \tau(f(x_0)) + \sum_{\ell=1}^{d} f_\ell(t)\,\tau^{(\ell)}(X).$$

ここで，関数 $f_\ell(t)$ は次のように定義されるものである。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & 0 \\ \lambda_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\lambda_{d-1} \\ 0 & & & \lambda_{d-1} & 0 \end{pmatrix},$$ λ_i は τ の第 i 曲率としたとき

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix}$$ は $(e^{t\Lambda} - I)\Lambda^{-1}$ の第一列．

この命題により次の定理が証明される。

定理．$f: M \to S(1)$ が極小的であれば，M は locally harmonic である。

この定理により，上記 harmonic manifold についての事実を考慮をすれば，コンパクト調和多様体の研究は，ほぼ，$S(1)$

への極小的 helical immersion の研究と同等であるといえる。

参考文献

[1] Arthur L. Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed, Springer, 1978.

[2] H. Nakagawa, On a certain minimal immersion of a Riemannian manifold into a sphere, preprint.

[3] K. Sakamoto, Planar geodesic immersions, Tohoku Math. J., vol. 29, no. 1, 25-56, 1977.