数理解析研究所講究録
第408巻 1980年 150-151

Parallel immersionのもとでの測地線の挙動について

筑波大 数学研究科　　間下 克哉

$\iota : M \to \mathbb{E}^N$ を対称R空間Mのユークリッド空間内への，平行な第2基本形式を持つ等長はめこみとする。ここでMの階数が1であればM内の任意の測地線のιによる像は円になることが知られている。一般に次が成り立つ。

定理 A. $p \in M$を固定する。Aをpを含むMの極大平坦全測地的部分多様体とする。$r = \dim A = \operatorname{rank} M$。Aのpにおける接空間$T_pA$の正規直交基$X_1, \cdots, X_r$で，$X_i$を初期ベクトルとするMの測地線$\gamma_i(t) = \exp tX_i$の$\iota$による像が円になるものが存在する。

$\mathbb{E}^r$の原点の近傍からAにおけるpの近傍への局所等長写像

$$\Phi : \mathbb{E}^r \longrightarrow A \ ; \ (t_1, \cdots, t_r) \longmapsto \exp\left(\sum_{i=1}^r t_i X_i\right)$$

をとる。$\iota \circ \gamma_i$を含む2次元アファイン部分空間から$\mathbb{E}^2$への

/

等長写像φ_iを，$\iota\circ\gamma_i$ の中心のφ_iによる像がE^2の原点となるようにとり，$f_i = \varphi_i\circ\iota\circ\gamma_i$ とおく。

<u>定理 B.</u> $\iota\circ\Phi : E^r \longrightarrow E^N$ はE^rの原点の近傍で，はめこみの積 $f_1\times\cdots\times f_r : E^r \longrightarrow E^{2r}$ と同値。

<u>系.</u> Mの十分短い測地線分γのιによる像は，高々 $2r$ 次元のアファイン部分空間に含まれる。またM内には，いかなる$(2r-1)$次元アファイン部分空間にも含まれない測地線分が存在する。

$\iota : M \longrightarrow E^N$ を対称空間Mのユークリッド空間内への等長はめこみとする。ιが定理A，定理Bの主張をみたせばιの第2基本形式は平行である。