数理解析研究所講究録
第 408 巻 1980 年 152-155

極小曲面の安定性について

東北大・理　　武藤 秀夫

Barbosa - do Carmo [1,2] の極小曲面の安定性についての結果の紹介と、その条件の評価についての注意を述べる。$\overline{M}_a^n$を断面曲率 a の space form とする。M^2を境界をもつ単連結コンパクトな$\overline{M}_a^n$の中の極小曲面とする。M^2が安定とは、境界で消えるMに沿った任意の non-zero 法ベクトル場N に対して、体積の第2変分 I が、$I(N,N) > 0$ をみたす時をいう。

__問題__　どんなM^2が安定か？ (generalized) Gauss map の性質から安定性がわかるか？

__定理__ (Barbosa - do Carmo [1,2])　M^2を、境界をもつ単連結コンパクトな、$\mathbb{R}^n$ (resp. $S^n(r)$) の中の極小曲面とする。

(1) $n = 3$ の時、$\int_M -K\,dA < 2\pi$ (resp. $\int_M (\frac{2}{r^2} - K)\,dA < 2\pi$) ならば、$M^2$は安定。更に、定数$2\pi$ は、次の意味で"sharp"である。：$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\int_{M(\varepsilon)} -K\,dA = 2\pi + \varepsilon$ (resp. $\int_{M(\varepsilon)} (\frac{2}{r^2} - K)\,dA = 2\pi + \varepsilon$) をみたす不安定な極小曲面$M^2(\varepsilon)$が存在する。

(2) $n \geqq 4$ の時．$\int_M -K\,dA < \frac{4}{3}\pi$ (resp. $\int_M (\frac{2}{r^2}-K)\,dA < \frac{4}{3}\pi$) ならば，$M^2$は安定である。

ここで，Kは，M^2の断面曲率，dAは体積要素である。

方針　νをM^2に沿った単位法ベクトル場，uを∂M^2で消えるM上の滑らかな関数とする。M^2上のリーマン計量をgとし，gによる内積を$(\ ,\ )_g$とする。この時，$I(u\nu, u\nu) \geqq \int_M (|du|_g^2 - 2(2a-K)u^2)\,dA$。ここで，$n=3$の時，常に等号が成立することを注意する。以下，簡単のため，$a>0$，つまり，$\overline{M}^n(a) = S^n(1)$ の場合について考える。

1°) λ_1の比較問題への帰着。$\tilde{g} = (2a-K)g$と新しい計量を定義すると，レーリーの原理より，$I(u\nu, u\nu) \geqq \int_M (|du|_{\tilde{g}}^2 - 2u^2)\,d\tilde{A} \geqq (\tilde{\lambda}_1(M)-2)\int_M u^2\,d\tilde{A}$。ここで，$\tilde{\lambda}_1(M)$は，$\tilde{g}$によるLaplacianのDirichlet条件下での第1固有値である。したがって，$\tilde{\lambda}_1(M) > 2$となる条件を求める問題に帰着される。

2°) 等周不等式による第1固有値の比較。

定理 (Peetre [8], Bandle [3], Barbosa-do Carmo [2])．M^2を，境界をもつ単連結コンパクトな曲面で，Gauss曲率Kが，$K \leqq K_0$ (K_0: 定数) をみたすとする。この時，Mの面積Aが，$K_0 A < 4\pi$をみたすなら，$\lambda_1(M) \geqq \lambda_1(D)$。ここで，$D$は，定曲率$K_0$の2次元space formの中のgeodesic ball of area A。

3°) $\tilde{g}$ による断面曲率 $\tilde{K}$ の評価．$n=3$ の時．実際の計算により．$\tilde{K}\leq 1$ を得る。$G: M^2 \longrightarrow G_{2,n+1}=Q_{n-1}\subset \mathbb{C}P^n$ を generalized Gauss map とする。$\mathbb{C}P^n$ に，max.{sectional curvature} $=2$ となるように計量を normalize し．Q_{n-1} での induced metric を ds^2 とすれば．$\tilde{g}=G^*ds^2$。更に．G は．anti-hol。故に．$n\geq 4$ の時，$\tilde{K}\leq 2$。

4°) 命題（Barbosa－do Carmo [2]）D を $S^2(1)$ 上の geodesic ball とし．$A(D)$ を D の面積（$>2\pi$）とする。この時，$\lambda_1(D)\geq 2(4\pi - A(D))/A(D)$．

最後に．2次元多様体の場合．$\lambda_1 vol$ は．$g\longmapsto \alpha g$（α：定数）なる計量の変換で不変であることに注意すると、定理が得られる。

注意1　4°)の命題を．Barbosa－do Carmo [2]は．等周不等式を用いて示した。ところが．全く同じ評価式を．適当な関数に Barta の定理を適用させることにより示すことができる。そして．Barta の定理を振り返えることにより．定理（2）の定数 $\frac{4}{3}\pi$ が、"sharp"でないことがわかる。

注意2　この講究録の原稿を作成中に．定理（2）の定数 $\frac{4}{3}\pi$ を．1.4505π に置き換えてもよいことがわかった。

参 考 文 献

[1] J. L. Barbosa and M. do Carmo, On the size of a minimal surface in $\mathbb{R}^3$, Amer. J. Math. 98 (1976), 515-528.

[2] J. L. Barbosa and M. do Carmo, Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the Laplacian, Math. Z. 173 (1980), 13-28.

[3] C. Bandle, Konstruktion isoperimetrischer Ungleichungen der Mathematischen Physik aus solchen der Geometrie, Comment Math. Helv. 46 (1971), 182-213.

[4] J. Barta, Sur la vibration fondamentale d'une membrane C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), 472-473.

[5] D. Hoffman and R. Osserman, The area of the generalized Gaussian image and the stability of minimal surfaces in S^n and $\mathbb{R}^n$, (preprint).

[6] D. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, (preprint).

[7] R. Osserman, Minimal surfaces, Gauss map, total curvature, eigenvalue estimates and stability, (preprint).

[8] J. Peetre, A generalization of Courant's nodal domain theorem Math. Scand. 5 (1957), 15-20.