

調和方程式としての Yang-Mills 方程式

名大・理 村瀬 元彦

0. はじめに

研究集会では、上の題のもとに任意の向きづけられた compact Riemann 多様体 M 上に Yang-Mills 方程式の解を構成する試みについてお話しさせて戴いた。これは、その後存在定理として一応の解決を見た。即ち、具体的構成という点ではよく判らないうもの、任意の M と、 M 上の任意の主 $SU(2)$ 束 P_M を与えた時、 P_M には Yang-Mills 方程式を満たす connection が存在することか判る。それは極めて幾何学的な話であり、いづれ幾何学の研究会等で紹介する機会があるので、ここで述べることはせずむしろ標題に直接従って、Yang-Mills 方程式の「調和性」がどのように現われてくるかを、いくつかの例をとって見ることにしたい。

1. 問題の由来

扱うのは $\mathbb{R}^4$ 上の Yang-Mills 方程式である。その形を

書いておこう. $(x_1, \dots, x_4)$ を $\mathbb{R}^4$ の直交座標系とする.

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i dx_i \in \mathfrak{su}(2) \otimes \Lambda^1$$

を Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ に値を持つ $\mathbb{R}^4$ 上の 1-form とする. A に関する 2 階非線型方程式

$$(1) \quad d*(dA + \frac{1}{2}[A, A]) + [A, *(dA + \frac{1}{2}[A, A])] = 0$$

を Yang-Mills 方程式という. ここで $[A, A]$ は, 係数に関しては Lie 環の $[\cdot, \cdot]$ 積をとり, form の方は外積をとったものを示す. 従ってともに反可換であることから 0 にはならず,

$$\frac{1}{2}[A, A] = \sum_{\mu < \nu} [A_\mu, A_\nu] dx_\mu \wedge dx_\nu$$

と計算される.

(1) は極めて扱いにくく, そこでもう少し易しい方程式になおすことを考えよう. まず

$$(2) \quad d(dA + \frac{1}{2}[A, A]) + [A, dA + \frac{1}{2}[A, A]] = 0$$

なる恒等式がある. 実際

$$(2) \text{ の左辺 } = \frac{1}{2}([dA, A] - [A, dA]) + [A, dA] + \frac{1}{2}[A, [A, A]]$$

$= \frac{1}{2} [A, [A, A]]$, これは Jacobi 律により $= 0$ となる。そこで, (1) のかわりに方程式

$$(3) \quad * (dA + \frac{1}{2} [A, A]) = dA + \frac{1}{2} [A, A]$$

を考えよう。これを Self-Dual 方程式と呼ぶ。今度は 1 階の方程式である。(2) により $(3) \Rightarrow (1)$ となることに注意。

ここで, はじめに $\mathbb{R}^4$ の直交座標をとったこと (従って $*$ もまた Euclid 的 metric に関して定義された Hodge 作用素であること) に注意したい。物理的背景を「少し」知っておられる方は $\mathbb{R}^4$ ではなくて metric $[-1, 1]$ の Minkowski 空間上で (1) や (3) を考えるべきではないか, と思われることであろう。確かに gauge 場の理論に於ける operator と見たときの A が満たすべき方程式は Minkowski 空間上の (1) である。しかしそのときの A はもはや有限個の函数から作られたものではなく, Hilbert 空間の無限個の tensor 積に作用する operators の組なのである。従って (1) は無限連立方程式ということになる。そういうものを「解く」とは何かを意味することなのだろうか。しかし, 少しでも量子化した場を扱おうとして, 例えば Feynman の path integral を使うことにしたとすると, 真

空から真空への transition や場の operators の真空期待値に,
metric を positive definite に変えた Lagrangean が現われる。
詳しい話は大変長いのでここでは述べられないうえ、結論を述べ
れば、普通の Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ 上の (1) の古典解がすべて
判れば、量子化出来たことになるのである。

Minkowski 空間で $ru(2)$ に値を持つ函数として (1) の解をお
めても何にもなりはしない。量子化された場はもっと高級で
あって、そんな解で何か判子のようなシロモノではないのだ。
もちろん、例えは重力場や電磁場のように、もし古典 gauge
場な子も何かあるのなら、Minkowski 空間上の話も意味を持
つたろうが、そんなものありはしない。従って、少なくとも
物理的には、(1) や (3) は $\mathbb{R}^4$ 上で考えてはじめて意味を持つ
のである。

量子論というのは無限連立方程式を扱う訳だから、path
integral になおしてみても決して話が有限のところで終わる訳
ではない。Minkowski 空間上の $SU(2)$ -gauge 場の量子論は、
3次元射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ 上の rank 2 の algebraic vector 束 E で
あって $c_1(E) = 0$, $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, E) = 0$ を満たすものの
moduli space を与える $c_2(E) \in \mathbb{Z}_+$ に対して同時に決定
することとほぼ同値である。(ここで $c_i(E) = E$ の第 i Chern

類) $c_2 \in \mathbb{Z}_+$ を与えたときに $c_2 = c_2(E)$ となるような束の moduli space を $\mathcal{M}_{c_2}$ とでも書けば, 局所有限次元多様体 $\mathcal{M} = \bigsqcup_{c_2=0}^{\infty} \mathcal{M}_{c_2}$ 上である函数を $11^{\text{dim}} \times 2^{\text{dim}}$ で定積分し, 無限和の形で与えられる $\sum_{c_2=0}^{\infty} f_{c_2}(11^{\text{dim}} \times 2^{\text{dim}})$ を, $11^{\text{dim}} \times 2^{\text{dim}}$ について解析的に表して, はいめて量子化した問題に応用出来る, という具合である. (この無限和を有限和で近似することはほとんどナンセンスである. というのは, $11^{\text{dim}} \times 2^{\text{dim}}$ に関与する解析的依存を知り必要があるから.)

(1) や (3) を $\mathbb{R}^4$ 上で扱うのは, hyperbolic だと難かしそうだから elliptic になおしてやった, などという理由によるのではなく, 上のような積極的理由による. 即ち物理への応用を目指したからに他ならぬ. だから, 物理を「よく」知った人なら「なぜ Minkowski space で (1) を解かないのか」とは言わないであろう.

近年では quarks の閉じこめを説明することか最大の話題と立てており (?), (1) や (3) の解がそぐとりおたされた. 今ではそれらが閉じこめにとれ程役立つのか疑問視されているようにだが, しかし次のような話がある.

2次元 non-linear σ -model というのがあって, それが最近 path integral でほとんど exact に解けたというのである.

る。(筑波大の物理学者岩崎氏が解かれた。[0])この場合には、2次元 Minkowski 空間を lattice で近似し、Computer 計算をすること、金と之をかければいくともよい精度で量子化した問題が解けるのである。岩崎氏が示したうは、2次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ 上の古典解をすべて調べて path integral を用いれば、Computer が出した結果を実際解析的にも出せよ、ということである。この場合の古典解は（おおよそ） S^2 から S^2 への harmonic map にあたる。従って、 $\mathbb{P}_C^1$ 上の meromorphic function を用いることにより、すべての古典解を表示することが出来る。こうして、この場合に量子論は解けてしまった。

従って、現実の quarks にどう応用出来るか、はとにかく、4次元 Minkowski 空間上の $SU(2)$ -gauge model というものを考えるならば、それは（先の σ -model と同様に）(1)や(3)の古典解（instanton 解）を用いて path integral で解けてもおかしくはないであろう。更に、1変数の有理型函数が出て来たか、それに対応するのか今度は $\mathbb{P}_C^3$ 上の algebraic vector 束なのである。しかし、代数幾何学に於いても moduli space を具体的に決定するのはとても難しい仕事である。手にとるように判子判なんてほとんどない。また Drinfeld - Manin によって instanton 解はすべて求め

られたとは言っても、彼等の方法は群 $SU(2)$ をどんどん拡大して $SU(2C_2)$ にしてゆくものなので、実際に $SU(2)$ -解だけを取り出すのは容易でない。

だからこそ (1) をもっと解析的に扱うことを考えねばならないのである。都合のよいことに、Bourguignon-Lawson^[1] によって (1) と (3) とは群が $SU(2)$ ($SU(3)$ でもよい) であればあまり差がないことが判っているので、(3) だけ考えればよいだろう。

そこで以下では (3) をくわしく見てゆくことにしよう。

2. 球対称解

問題. (3) の球対称解を一つ決定せよ。

これは E. Witten [2] が扱っている。彼に従ってやってみよう。

球対称というのは、 $\mathbb{R}^4$ の直交座標 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, t)$ に対し $SO(3)$ を (x_1, x_2, x_3) に作用させたとき不変に保たれる、という意味である。従って球対称な connection の成分は $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ と t の函数になると期待される。具体

的形式を求めてみよう.

$SO(3)$ の元を a で表わす. 以下記号を定める:

$$A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dt$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad dx = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

このとき $A = {}^t A \cdot dx + A_4 dt$ と書かれる. a の $\mathbb{R}^4$ の

作用により A は a^*A に変換される:

$$a^*A = {}^t A(ax, t) \cdot d(ax) + A_4(ax, t) dt.$$

Connection が球対称ということは $a^*A = A$ を意味するものではない. Gauge 変換 (束自己同型) の自由度が残されている. g を $\mathbb{R}^4$ 上の $SU(2)$ -valued 函数とすると A の

Gauge 変換 $g(A)$ は,

$$g(A) = g \cdot A \cdot g^{-1} - dg \cdot g^{-1}$$

で与えられる.

定義. Connection A が球対称.

$$\iff \forall a \in SO(3) \exists g_a : \text{gauge 変換 s.t.}$$

$$a^*A = g_a(A).$$

直交変換 a は変数 x, t によらないので, g_a も constant にとれる. ここで, 局所同型 $SO(3) \cong SU(2)$ によって g_a を $SO(3)$ -valued とおくことにしよう. ($\mathbb{R}^4$ 上の主束を考えた限りはいつでも可能なことである.) 条件式は

$$a^* A = g_a \cdot A \cdot g_a^{-1} \quad a, g_a \in SO(3)$$

と表す。

$so(3)$ の base $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in$

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} & -1 & \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{bmatrix}.$$

で表す。この base によつて $so(3)$ の $so(3)$ での adjoint-表現を表わしたものは通常の 3 次表現と一致する；即ち

$$a \in SO(3) \Rightarrow a \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1} \tau_1 a \\ a^{-1} \tau_2 a \\ a^{-1} \tau_3 a \end{bmatrix}.$$

$$A_\mu = {}^t \vec{A}_\mu \cdot \tau, \quad \vec{A}_\mu = \begin{bmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \\ A_\mu^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

と形式的に表わしておく。

$$A = {}^t A \cdot dx + A_4 dt \quad \text{に於て}$$

$$\begin{aligned} g_a(A) &= {}^t \begin{bmatrix} {}^t \vec{A}_1 \cdot (g_a \tau g_a^{-1}) \\ {}^t \vec{A}_2 \cdot (g_a \tau g_a^{-1}) \\ {}^t \vec{A}_3 \cdot (g_a \tau g_a^{-1}) \end{bmatrix} \cdot dx + {}^t \vec{A}_4 \cdot (g_a \tau g_a^{-1}) dt \\ &= {}^t \begin{bmatrix} {}^t \vec{A}_1 \cdot g_a^{-1} \tau \\ {}^t \vec{A}_2 \cdot g_a^{-1} \tau \\ {}^t \vec{A}_3 \cdot g_a^{-1} \tau \end{bmatrix} \cdot dx + {}^t \vec{A}_4 \cdot (g_a^{-1} \tau) \cdot dt \end{aligned}$$

と表す。一方 $a^* A$ の方は、

$$a^* A = {}^t A(ax, t) \cdot d(ax) + A_4(ax, t) dt$$

$$= \int \left[\begin{matrix} {}^t \vec{A}_1(ax, t) \cdot \tau \\ {}^t \vec{A}_2(ax, t) \cdot \tau \\ {}^t \vec{A}_3(ax, t) \cdot \tau \end{matrix} \right] a \cdot dx + {}^t \vec{A}_4(ax, t) \cdot \tau \cdot dt$$

であるから、

$$a^* A = g_a(A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int \begin{bmatrix} {}^t \vec{A}_1 \cdot g_a^{-1} \tau \\ {}^t \vec{A}_2 \cdot g_a^{-1} \tau \\ {}^t \vec{A}_3 \cdot g_a^{-1} \tau \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} {}^t \vec{A}_1(ax, t) \cdot \tau \\ {}^t \vec{A}_2(ax, t) \cdot \tau \\ {}^t \vec{A}_3(ax, t) \cdot \tau \end{bmatrix} a \\ {}^t \vec{A}_4 \cdot g_a^{-1} = {}^t \vec{A}_4(ax, t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int a \cdot \begin{bmatrix} {}^t \vec{A}_1(ax, t) \\ {}^t \vec{A}_2(ax, t) \\ {}^t \vec{A}_3(ax, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t \vec{A}_1(x, t) \\ {}^t \vec{A}_2(x, t) \\ {}^t \vec{A}_3(x, t) \end{bmatrix} g_a^{-1} \\ \vec{A}_4(ax, t) = g_a \vec{A}_4(x, t) \end{cases}$$

すなわち $\vec{A}_4(ax, t) = g_a \vec{A}_4(x, t)$ を調べてみよう。

$a_1, a_2 \in SO(3)$ に対し、

$$\begin{aligned} \vec{A}_4(a_1 a_2 x, t) &= g_{a_1} \vec{A}_4(a_2 x, t) \\ &= g_{a_1} g_{a_2} \vec{A}_4(x, t) \end{aligned}$$

であるから、 g は $SO(3)$ の 3 次表現を与えている。 g が trivial 表現の場合を調べてみる必要があるが、易しい。

で有る。それは $a^*A = A$ を意味し、結局 A に対応する curvature $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ は恒等的に 0 になってしまふ。従って gauge 変換ではいれから $A \equiv 0$ に出来てしまふので、つまらない。

そこで g が kernel を持たない場合をやってみよう。 g_a は、 $b \in O(3)$ によつて $g_a = b^{-1} a b$ と表わされる。不変式を工かすのだから、 $\vec{A}_4$ のかわりに $b \vec{A}_4$ をとればよく、結局 $g_a = a$ であるとして一般性を失はない。

問題は、 $\vec{A}_4(ax, t) = a \vec{A}_4(x, t)$ を満たす $\vec{A}_4$ をおめきこになる。 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ とおく。 $x \in \mathbb{R}^3$ に対し、

$$ax = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{となる } a \in SO(3) \text{ をとる。} \quad \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ の stabilizer}$$

$S (\cong SO(2))$ の元 b に対し、

$$\vec{A}_4(ax, t) = \vec{A}_4(b \cdot ax, t) = b \vec{A}_4(ax, t)$$

ゆえ、 $\vec{A}_4\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\right)$ は S で固定される。従つて

$$\vec{A}_4\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\right) = \begin{bmatrix} A_0(r, t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{と表わされる。}$$

$$a \vec{A}_4(x, t) = \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{と} \quad ax = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{とを合わせ}$$

$$\text{と、} \quad \boxed{\vec{A}_4(x, t) = \frac{1}{r} A_0(r, t) \cdot x} \quad \text{を得る。}$$

次に $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ を調べよう. 以下変数 t は省略する.

$$\left[A_i^j(x) \right]_{ij} = \begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1(x) \\ {}^t\vec{A}_2(x) \\ {}^t\vec{A}_3(x) \end{bmatrix} = M(x) \quad \text{とおく.}$$

$g_a = b^{-1} a b$ であることを調べておいたが, 余計な b は実は $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$ を一斉に $b \vec{A}_i$ ($i=1,2,3,4$) にするこゝも意味するのだから本質的ではない. そこで, $\vec{A}_4$ を決定した時と同様 $g_a = a$ としよ. 条件式は $\forall a \in SO(3)$ に対

$$({}^t a M(a x) a = M(x) \quad \text{である.}$$

前と同様に $x \in \mathbb{R}^3$ に対し $a x = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする a をとっておく. ${}^t a M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) a = M(x)$.

$S \cong SO(2) \subset SO(3)$ の同型を決めて,

$$S \ni b = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & b \end{array} \right] \in SO(3) \quad \text{のように表わせば,}$$

$$M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{c|c} m & {}^t n \\ \hline n & N \end{array} \right] \quad \text{とおいて}$$

$$\begin{aligned} M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= M(b \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = b M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) {}^t b \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & b \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} m & {}^t n \\ \hline n & N \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^t b \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} m & {}^t n {}^t b \\ \hline b n & b N {}^t b \end{array} \right]. \end{aligned}$$

従って $n=0$, $b N^t b = N$ と $\exists b \in SO(2)$

たから、結局

$$M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\right) = \begin{bmatrix} m(r, t) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(r, t) & \psi(r, t) \\ 0 & -\psi(r, t) & \varphi(r, t) \end{bmatrix}$$

$a x = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ なる a をして、例えは、

$$a = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{r} & \frac{x_2}{r} & \frac{x_3}{r} \\ -\frac{\rho}{r} & \frac{x_1 x_2}{r \rho} & \frac{x_1 x_3}{r \rho} \\ 0 & -\frac{x_3}{\rho} & \frac{x_2}{\rho} \end{bmatrix} \quad \rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

とすれば、

$M(x) = {}^t a \cdot M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot a$ によつて $M(x)$ が計算される；

$$M(x) = \frac{m}{r^2} x \cdot {}^t x + \frac{1}{r^2} (r^2 I - x \cdot {}^t x) \varphi + \frac{\psi}{r} {}^t x \cdot x$$

但し $I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, ${}^t x \cdot x = x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2 + x_3 \tau_3$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} (4) \quad A_1 &= \left(\frac{x_1^2}{r^2} m + \frac{r^2 - x_1^2}{r^2} \varphi \right) \tau_1 + \left(\frac{x_1 x_2}{r^2} m - \frac{x_1 x_2}{r^2} \varphi + \frac{x_3}{r} \psi \right) \tau_2 + \left(\frac{x_1 x_3}{r^2} m - \frac{x_1 x_3}{r^2} \varphi - \frac{x_2}{r} \psi \right) \tau_3 \\ A_2 &= \left(\frac{x_1 x_2}{r^2} m - \frac{x_1 x_2}{r^2} \varphi - \frac{x_3}{r} \psi \right) \tau_1 + \left(\frac{x_2^2}{r^2} m + \frac{r^2 - x_2^2}{r^2} \varphi \right) \tau_2 + \left(\frac{x_2 x_3}{r^2} m - \frac{x_2 x_3}{r^2} \varphi + \frac{x_1}{r} \psi \right) \tau_3 \\ A_3 &= \left(\frac{x_1 x_3}{r^2} m - \frac{x_1 x_3}{r^2} \varphi + \frac{x_2}{r} \psi \right) \tau_1 + \left(\frac{x_2 x_3}{r^2} m - \frac{x_2 x_3}{r^2} \varphi - \frac{x_1}{r} \psi \right) \tau_2 + \left(\frac{x_3^2}{r^2} m + \frac{r^2 - x_3^2}{r^2} \varphi \right) \tau_3 \\ A_4 &= \frac{x_1}{r} A_0 \tau_1 + \frac{x_2}{r} A_0 \tau_2 + \frac{x_3}{r} A_0 \tau_3 \end{aligned}$$

これが $a^*A = g_a(A)$ を満たす 1-form $A = \sum_{i=1}^4 A_i dx_i$ の一般式である。

この形のもとで 方程式 (3) を扱う為に、曲率形式

$$dA + \frac{1}{2}[A, A] = F \quad \text{を求めよう。} F \text{ は Lie 環}$$

$\mathfrak{so}(3)$ に値を持つ 2-form なのだから、

$$\begin{cases} F = \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \\ F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^1 T_1 + F_{\mu\nu}^2 T_2 + F_{\mu\nu}^3 T_3 \end{cases}$$

と表わす。定義に従って計算してゆくと、

$$(5) \quad \begin{bmatrix} F_{14}^1 & F_{14}^2 & F_{14}^3 \\ F_{24}^1 & F_{24}^2 & F_{24}^3 \\ F_{34}^1 & F_{34}^2 & F_{34}^3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{r^2} (A_0' - \dot{m}) + \frac{r^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{r^2} \left(\frac{A_0}{r} - \dot{\varphi} - A_0 \psi \right) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{r} (-\dot{\psi} + A_0 \varphi)$$

$$(6) \quad \begin{bmatrix} F_{23}^1 & F_{23}^2 & F_{23}^3 \\ -F_{13}^1 & -F_{13}^2 & -F_{13}^3 \\ F_{12}^1 & F_{12}^2 & F_{12}^3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{I}}{r} \psi + \frac{r^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{r^2} (\psi' - m\varphi) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{r^2} \left(\frac{\psi}{r} - \varphi^2 - \psi^2 \right) - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{r} (\varphi' + m\psi) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{r^2} (m - \varphi)$$

であることが判る。但し $\frac{\partial}{\partial r} \in \cdot$ で表わし、 $\frac{\partial}{\partial t} \in \cdot$ で示した。

(即ち $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \varphi'$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi}$, etc.)

Self-dual 方程式 (3) は, 3行3列の matrix として
(5) と (6) とが 等しいことを意味している. 即ち (4) の仮
定のもとに

$$(3) \iff (5) = (6)$$

その式を簡単な形で表わす為に

$$\begin{cases} A_0(r,t) = B_t(r,t) \\ m(r,t) = B_r(r,t) \\ \varphi(r,t) = \frac{1}{r} \varphi_0(r,t) \\ \psi(r,t) = \frac{1}{r} \varphi_1(r,t) + \frac{1}{r} \end{cases}$$

と書きかえておくと, 方程式は

$$(7) \quad \begin{cases} \partial_r \varphi_0 - \partial_t \varphi_1 = -(B_r \varphi_1 + B_t \varphi_0) \\ \partial_r \varphi_1 + \partial_t \varphi_0 = B_r \varphi_0 - B_t \varphi_1 \\ \partial_r B_t - \partial_t B_r = \frac{1}{r} (1 - \varphi_0^2 - \varphi_1^2) \end{cases}$$

となる. r は $\{\lambda \in \mathbb{R}^1 \mid \lambda > 0\} = \mathbb{R}_+$ を動く変数だが, 形式的に $\mathbb{R}^1$ の変数と見, $\mathbb{R}^2$ の volume element を $dr dt$ と思っ
て $\begin{cases} * dr = dt \\ * dt = -dr \end{cases}$, $*^2 = -1$ により, 2次元の $*$ を定

めるなら, (7) は微分形式を用い 2次元のようにならわされる;

$$\begin{cases} B = B_r dr + B_t dt \\ \varphi = \varphi_1 dr + \varphi_0 dt \end{cases}$$

$$v = dr \wedge dt$$

(8)

$$d\varphi = *B \wedge \varphi$$

$$d*B = *B \wedge *\varphi$$

$$dB = \frac{1}{r^2} (v - \varphi \wedge *\varphi).$$

かくして、球対称の場合には方程式 (3) は 4 つの 2 変数未知函数に対する 3 つの方程式 (7) に帰着されることが判った。ところで、(3) はもともと gauge 変換不変であったから、(7) にはなお (r, t) 空間上の 3 函数分の不定性が残っている。

まづその 1 つ分を入手するために条件

$$d*B = 0$$

を課す。このとき $\beta = \beta(r, t)$ により、

$$*B = d\beta$$

と表わされる。

$$\chi = \chi_1 dr + \chi_0 dt$$

により、

$$\varphi = e^\beta \cdot \chi$$

とおくと、(8) のはいめの 2 式から B (即ち β) を消去することが出来て、

$$(9) \quad d\chi = 0, \quad d*\chi = 0.$$

$$\begin{cases} z = r + it \\ f(z) = \chi_1(r, t) - i\chi_0(r, t) \end{cases}$$

とおく. このとき,

$$\chi + i*\chi = f(z) dz. \quad \text{従って}$$

$$(9)より \quad d(\chi + i*\chi) = d(f dz) = 0, \text{ かつ}$$

$$(10) \quad \bar{\partial} f(z) = 0$$

が判る.

最後に, (8) の第3式から φ を消去する為に

$$\beta = \log r - \frac{1}{2} \log f \bar{f} + \rho$$

とおく. 方程式は

$$d(**B) = \frac{1}{r} (v - \varphi \wedge * \varphi)$$

$$\Leftrightarrow -d*d\beta = \frac{1}{r^2} (v - e^{2\beta} \chi \wedge * \chi)$$

左辺は,

$$\begin{aligned} -d*d\beta &= -2i\partial\bar{\partial}\beta \\ &= -2i\partial\bar{\partial}(\log r - \frac{1}{2} \log f \bar{f} + \rho) \\ &= \frac{1}{r^2} v - \Delta\rho \cdot v. \end{aligned}$$

となる. 但し $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, また $\partial\bar{\partial} \log f \bar{f} = 0$ を用いた.

右辺は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} (v - e^{2\log r} e^{-\log f \bar{f}} e^{2\rho} f \bar{f} v) \\
&= \frac{1}{r^2} v - \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \frac{1}{f \bar{f}} \cdot e^{2\rho} f \bar{f} v \\
&= \frac{1}{r^2} v - e^{2\rho} v \quad \text{であるから, } \delta_0^* \text{局}
\end{aligned}$$

$$(11) \quad \boxed{\Delta \rho = e^{2\rho}} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

になお、こしもう、つまり、1つの2変数関数に11この単
独方程式に1つだけである。これはちょうどはいわの gauge 変
換の自由度を消したことにあたります。なぜなら、(8) を β と f
とで表わした式は

$$(8)' \quad \bar{\partial} f = 0, \quad -\Delta \beta = \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta} f \bar{f})$$

であるが、この方程式は $r > 0$ で 0 点を持たない正則関数 h
によつて

$$\begin{cases} f \longmapsto f \cdot h \\ \beta \longmapsto \beta - \frac{1}{2} \log h \cdot \bar{h} \end{cases}$$

と変換しても不変である。

従つて、上で行なつたことは、 f 自体を gauge 変換と思ひ、
 $f \equiv 1$ に固定するこゝで (8)' から $\Delta \beta = e^{2\beta}$ を出
した、とも考えられり。いづれにせよこうして gauge を固
定して、もはや余計な自由度のない方程式にしたものか (11)

である。(11) の形によつて、「調和方程式」としての Yang-Mills 方程式」たる中えんか判るであらう。以上で、

定理

$$\left[\begin{array}{l} \text{Self-dual 方程式の球対称解を求める問題,} \\ \iff \text{Liouville 方程式 } \Delta p = e^{2p} \quad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \text{ を解く} \\ \text{こと.} \end{array} \right]$$

が判る。

方程式 (3) の古典解を土かす場合は、 $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ の norm を有限にちる、という条件で土かすので（しかももちろん R^4 で non-singular なものを扱う）、(11) を解く場合でも特異点や増大度の条件をつけねばならぬ。例之は、 p は $r > 0$ に特異点を持つてはならぬ、等。

(11) の一般解法は知られてゐるので、これで §3 の問題は完全に解決する。

4変数の Yang-Mills 方程式では難かしいので、2変数にして調べてみる為には球対称、という条件をおいたのである。もちろん 2次元 Yang-Mills 方程式というのもあることはあるが、それはあまりに易くて解析的な性質を色々調べられりやうな豊土を持つてゐない。だから4次元で他の条件をおいて調べてみた訳である。

4. 'tHooft 解 — 即ち「向き」のそろった解.

ここでも R^4 上の解を考える. 記号を定めておこう.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^1 = R^4 \text{ 上の 1-forms の空間} \\ \Lambda^2 = R^4 \text{ 上の 2-forms の空間} \\ \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \Lambda^1 \text{ の orthonormal base} \\ * : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2 \text{ Hodge star operator} \\ \Lambda^2_{\pm} = * \text{ の固有値 } \pm 1 \text{ に属する固有空間} \end{array} \right.$$

記号 s.s. で skew-symmetric を表わすことにして,

$$\Lambda^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\text{s.s.}}(\Lambda^{1*} \otimes \Lambda^{1*}, R) \cong \Lambda^{1*} \otimes_{\text{s.s.}} \Lambda^{1*} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{metric による}}}{\cong} \Lambda^{1*} \otimes_{\text{s.s.}} \Lambda^1 \cong \text{Hom}_{\text{s.s.}}(\Lambda^1, \Lambda^1).$$

ここで, R^4 の直交計量によ, $\Lambda^1 \cong \Lambda^{1*}$ なる同型を固定し, 用い, 上.

$$\text{Hom}_{\text{s.s.}}(\Lambda^1, \Lambda^1) \cong \mathcal{M}\mathcal{O}(4) \quad \text{であるから,} \quad \Lambda^2 \cong \mathcal{M}\mathcal{O}(4) \quad \text{で}$$

あることが判る. この同型を base で表現しておこう:

$$e_1 \wedge e_2 = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$e_3 \wedge e_4 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$e_1 \wedge e_3 = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & \end{bmatrix}$$

$$e_2 \wedge e_4 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & -1 \\ \hline & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$e_1 \wedge e_4 = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

$$e_2 \wedge e_3 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ \hline & & -1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix}.$$

$\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ である. おのふの base も示しておく:

$$\Lambda_+^2: \begin{cases} e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & 1 \end{array} \right] = 2\sigma_1 \\ e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \end{array} \right] = 2\sigma_2 \\ e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 = \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline 1 & \end{array} \right] = 2\sigma_3 \end{cases} \quad [\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_3 \text{ cyclic.}$$

$$\Lambda_-^2: \begin{cases} e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \end{array} \right] = 2\tau_1 \\ e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 = \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & \end{array} \right] = 2\tau_2 \\ -e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 = \left[\begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \right] = 2\tau_3. \end{cases} \quad [\tau_1, \tau_2] = \tau_3 \text{ cyclic.}$$

Λ_+^2, Λ_-^2 はおのふの $\mathfrak{so}(3)$ に同型である. 特に Λ_+^2 の方は,

$$\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & \\ & -i \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & -1 \end{array} \right] \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline 1 & \end{array} \right] \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & i \\ i & \end{bmatrix}$$

によ, $\mathfrak{so}(2)$ の同型を定めることが出来る. これらは,

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3), \quad \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{so}(2) \quad \text{なす Lie 環の同型を base で表示したものである.}$$

以上の準備のもとで, Yang-Mills 方程式 (特に, (3) の符号を - にした anti-self-dual 方程式 (-3): $\star(dA + \frac{1}{2}[A, A]) + dA + \frac{1}{2}[A, A] = 0$) を解いてみよう. 2-form f に対し, $(f)_+$ で Λ^2_+ -成分をとることも示す. 従って $\Lambda^2 \ni f \mapsto (f)_+ \in \mathfrak{so}(3)$ であり

$$(12) \quad A = \sum_{\mu=1}^4 e_\mu \otimes (e_\mu \wedge a)_+, \quad a \in \Lambda^1.$$

上の形に表わされる A は $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(3)$ の元であり, (12) のような形の解をおめよう, という訳だが, ひとつ注意してあげよう.

Atiyah-Singer により (3) (あるいはその符号をかえた (-3)) の解は, instanton number k に対し $8k-3$ 次元ありことが判っている. (Instanton number の定義については, 例えば [3] 参照) これは, 直観的には次のように理解し得る:

- 1° Instanton の場所を与えるのに $4k$ 次元.
- 2° Instanton の大きさを与えるのに k 次元.
- 3° 各点での Instanton の方向を与えるのに $3k$ 次元.

(なぜなら A は 3次元 Lie 環に値を持つ.)

- 4° すべての Instanton を一斉にまわす自由度が -3 次元.

合計して instanton の configuration は $8k-3$ 次元.

方程式は非線型だから, 足し上げることが正しいかどうか問題点なしとはいえないが, Atiyah-Singer index theorem にした所で

線型近似をして次元を出していき誤差が、と、思、て目をつ
ぶ。ち、と、次のような思、い、か、に、う、か、ふ、;

『 $\mathbb{R}^4$ 上の $\mathfrak{so}(3)$ -値関数 ρ に対する方程式 (系) $L(\rho)=0$
が存在して、 $L(\rho)=0$ の解と (3) の (-3) の解が 1 対 1 に
対応するのではないか? 』

現在のところこのような方程式系は知られていない。しか
しそれが見つかれば大変重要になるであろう。おそろくは、

$$\Delta \rho = F(\rho) \quad \text{という形で見つかるだろうと思われる}$$

一般のままだではよく判らないので、instantons の向きがす
べからずである場合に調べてみよう。この場合には ρ は実数
値関数と思、て、よ、い、。

という訳で、(12) から出発しようというのである。従って、
ち、べ、の、解、が、(12) の形で書ける訳ではない。はいねから向き
が、さ、た、の、に、限、ら、ず、で、い、い、か、う、。しかしそれでも
(12) の形で 5 次元の解をつくることは期待出来る。

$\mathfrak{so}(3)$ の base σ_i を用いて (12) を書き直しておく:

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} A = dx_1 \otimes (a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2 + a_4 \sigma_3) \\ \quad + dx_2 \otimes (-a_1 \sigma_1 - a_4 \sigma_2 + a_3 \sigma_3) \\ \quad + dx_3 \otimes (a_4 \sigma_1 - a_1 \sigma_2 - a_2 \sigma_3) \\ \quad + dx_4 \otimes (-a_3 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 - a_1 \sigma_3) \\ a = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4 \in \mathcal{A}^1 \end{array} \right.$$

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A] \quad \text{に対し}$$

$$(-3) \quad *F = -F$$

としたが, (12) の形の A に対しては, (-3) は次の式と同値;

$$(13) \quad \begin{cases} d*a = a \wedge *a \\ da = *da. \end{cases}$$

ここで, $\pm$ の p を

$$a = -d \log p$$

という形で入れてみよう. すると, $da = 0$ となるから, 方程式は単独になり

$$\begin{aligned} 0 &= d*a - a \wedge *a \\ &= -d*d \log p - d \log p \wedge *d \log p \\ &= -d\left(\frac{*dp}{p}\right) - \frac{dp \wedge *dp}{p^2} \\ &= -\frac{1}{p} d*d p, \quad \text{即ち} \end{aligned}$$

$$(14) \quad \boxed{p \text{ の pole 以外で } \Delta p = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.}$$

となる. $5k$ 次元の解はすぐに作られて,

$$\begin{cases} p = 1 + \frac{\lambda^{(1)}}{(x-y^{(1)})^2} + \cdots + \frac{\lambda^{(k)}}{(x-y^{(k)})^2} \\ \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)} > 0, \quad y^{(1)}, \dots, y^{(k)} \in \mathbb{R}^4, \quad (x-y)^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i - y_i)^2 \end{cases}$$

とすればよい. $y^{(j)}$ が場所, $\lambda^{(j)}$ が大まかさを表わしている.

さて、ここでも調和方程式（文字通りの！）に遭遇した。
 この場合問題となるのは $\frac{1}{x^2}$ type の特異点をどうするか、と
 いうことである。F の norm を計算すると、ちゃんと収束する
 ので特異点があっても問題ない、という立場もあるうし、ま
 た各特異点のまわりで gauge 変換して、ちゃんと非特異に出
 来るからよい、という正化もあるうし。ついでにいえば、A
 が連続になるように gauge 変換するのは易しい。その gauge
 変換が S^4 上の $C_2 = \mathbb{R}$ なる $\mathbb{C}^2$ -vector 束を定めるのである。
 だがここでは幾何の話には深入りしない。

(12) の形には盛り込めなかつた instanton の方向をどううま
 くとらえるか。これが今後の課題である。

最も易しい 1-instanton solution を考えてみよう。それは、
 $\rho = 1 + \frac{1}{x^2}$, $x^2 = x_1^2 + \dots + x_4^2$ で与えられる。(12') に代入
 するのを a_μ は、

$$a_\mu = 2 \frac{x_\mu}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2 \frac{x_\mu}{x^2} - 2x_\mu + 2x_\mu \cdot x^2 - \dots$$

である。ところで、 $\rho_0 = \frac{1}{x^2}$ のときには $a_\mu^0 = \frac{2x_\mu}{x^2}$ であり、
 この 1-instanton solution の特異部分と一致しているが、 ρ_0 から
 作った connection を A_0 とすると、 $F_0 \stackrel{\text{def}}{=} dA_0 + \frac{1}{2}[A_0, A_0]$ は
 恒等的に 0 になることが判る。従って、 g を

$$dg + A_0 g = 0$$

の解であるような $SU(2)$ - 値函数とすれば, gauge 変換 g^{-1} を
 ほどこした ($p=1+\frac{1}{x^2}$ に対応する 1-instanton) A の主要部は
 0 になる. 実際 $(g^{-1})^* A = A_1 + \text{real analytic}$, $A_1 = \frac{x \text{ の 3 次式 }}{x^2}$,
 かつ A_1 は厚美で連続, という形になる.

もちろん完全に real analytic な表示も可能で, 例えば

$$\begin{aligned}
 (15) \quad A = & dx_1 \otimes \frac{2}{1+x^2} (-x_2 \sigma_1 - x_3 \sigma_2 - x_4 \sigma_3) \\
 & + dx_2 \otimes \frac{2}{1+x^2} (x_1 \sigma_1 - x_4 \sigma_2 + x_3 \sigma_3) \\
 & + dx_3 \otimes \frac{2}{1+x^2} (x_4 \sigma_1 + x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_3) \\
 & + dx_4 \otimes \frac{2}{1+x^2} (-x_3 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_1 \sigma_3)
 \end{aligned}$$

は (3) を満たす 1-instanton solution である. こういう表示を
 と, た場合に $dx_\mu \otimes \sigma_i$ の係数として出て来ているのは,
 $d \log \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$ の係数である. この $\frac{1}{1+x^2}$ はやはり調和函数で
 はないが,

$$\Delta \varphi = -8\varphi^3$$

の解である. この方程式は特徴的なものなので, 少しその
 origin を工ってみたい.

5. φ^4 -model とは関係するの?

実際のところ計算が十分進んでいるので, 答はよく判るな
 い. F. Wilczek は関係あり, と言うか [4], どうも [4]

で言うところにはサッパリ判じぬ。

さて, massless φ^4 -model といふのは, Lagrangean が

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} d\varphi \wedge * d\varphi - \frac{c}{4} \varphi^4 * 1$$

で与えられる場の model である。但し例によつて $\mathcal{L}$ は Euclid 空間で考へてゐる。Euler-Lagrange 方程式は

$$(16) \quad \boxed{\Delta \varphi = -c \varphi^3}$$

である。上の $\mathcal{L}$ が表わしてゐるのは自分自身と相互作用する質量のない最も簡単な場である。Gauge 場も自分自身と相互作用する massless 粒子であるが, φ^4 に比べればはるかにむづかしい。しかしそれでも尚, Euclidian field では両者はつながつてゐるのではないか, と思われよう。

(15) 式に現われた $\frac{1}{1+x^2}$ を思ひ出そう。これは一体何か? それは, $\mathbb{R}^4$ を 1 度 compact 化して S^4 にすると, metric にかかつてくる係数である。即ち $\mathbb{R}^4$ の conformal 変換なのである。そして, conformal 変換は確かに φ^4 -model と関係を持つてゐる。

命題

Flat metric を, 函数 φ^2 で conformal に変えたとき, 新しい metric が constant scalar curvature を持つための必要十分条件は, (4次元では) (16) 式で与えられる。

Riemann 幾何に ついて 少し 記号 を 復習 (して みる)

$$g_{ij} = \text{Riemann metric}, \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1}_{ij}$$

$$\Gamma_{ij}^k : \sum_{l=1}^4 g_{lk} \Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) \quad \text{と 定め る}$$

$$R_{ijkl} = \partial_k \Gamma_{ij}^l - \partial_l \Gamma_{ij}^k + \sum_{m=1}^4 (\Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{im}^l)$$

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^4 g_{im} R_{mjkl}$$

$$R_{jl} = \sum_{ik} g^{ik} R_{ijkl}$$

$$R = \sum_{ij} g^{ij} R_{ij}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{etc.}$$

この R のことを scalar curvature と呼ぶ. 証明したことは
 1) $\Gamma g_{ij} = \varphi^2 \delta_{ij}$ のとき, $R = \text{const} \Leftrightarrow (16) \perp$ である. と
 2) $R \in \varphi^2 \mathbb{R}$ であること.

$$R = \sum_{ij} g^{ij} R_{ij} = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{ij} \delta^{ij} R_{ij} = \frac{1}{\varphi^2} \sum_i R_{ii}$$

$$= \frac{1}{\varphi^2} \sum_i \left(\sum_{k,l} g^{kl} R_{kili} \right)$$

$$= \frac{1}{\varphi^2} \sum_i \frac{1}{\varphi^2} \sum_{kl} \delta^{kl} R_{kili}$$

$$= \frac{1}{\varphi^4} \sum_{ij} R_{ijij}$$

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{\varphi} (\partial_j \varphi \cdot \delta_{ki} + \partial_i \varphi \cdot \delta_{jk} - \partial_k \varphi \cdot \delta_{ij})$$

$$R_{ijij} = \varphi^2 R_{ijij}^0$$

$$R_{ijij}^0 = \partial_i \Gamma_{jj}^i - \partial_j \Gamma_{ii}^j + \sum_m (\Gamma_{ij}^m \Gamma_{im}^j - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{jm}^i)$$

代入し計算すると

$$R_{ijij} = 2\varphi \cdot \partial_i \partial_j \varphi \cdot \delta_{ij} - \varphi (\partial_i^2 \varphi + \partial_j^2 \varphi) - 4 (\partial_i \varphi)(\partial_j \varphi) \delta_{ij} \\ + 2 (\partial_i \varphi)^2 + 2 (\partial_j \varphi)^2 - L + L \cdot \delta_{ij}$$

$$\text{但し } L = \sum_{m=1}^4 (\partial_m \varphi)^2$$

従って,

$$R = \frac{1}{\varphi^4} \sum_{ij} R_{ijij} \\ = \frac{1}{\varphi^4} \sum_i (2\varphi \partial_i^2 \varphi - 4\varphi \partial_i^2 \varphi - \varphi \Delta \varphi - 4(\partial_i \varphi)^2 \\ + 8(\partial_i \varphi)^2 + 2L - 4L + L) \\ = \frac{1}{\varphi^4} \sum_i (-2\varphi \partial_i^2 \varphi - \varphi \Delta \varphi + 4(\partial_i \varphi)^2 - L) \\ = \frac{1}{\varphi^4} (-2\varphi \Delta \varphi - 4\varphi \Delta \varphi + 4L - 4L) \\ = -\frac{6}{\varphi^3} \Delta \varphi$$

$$\therefore \underline{R = \text{constant} \iff \Delta \varphi = -\frac{R}{6} \varphi^3}$$

もし sectional curvature k が constant ならば,

$$R_{ijkl} = k (g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{li}),$$

$$R_{ijij} = \varphi^4 k (1 - \delta_{ij})$$

$$R = k \sum_{ij} (1 - \delta_{ij}) \\ = 12k$$

$$\text{により, } \underline{\Delta \varphi = -2k \cdot \varphi^3} \quad \text{と得る.}$$

こうして (16) は Riemann 幾何学に関する方程式であることが判った。そこで、次に Riemann 幾何に於ける instanton を考えてみよう。

これまでと同様に conformally flat space を考える。従って metric は

$$(17) \quad g_{\mu\nu} = \rho^2 \delta_{\mu\nu}$$

で与えておく。(以下都合により φ のかわりに ρ とかく。)

Riemann curvature R_{ijkl} は, i, j については 2-form の係数であり, k, l については反対称になっているので,

$$\sum_{i < j} [R_{ijkl} dx_i \wedge dx_j]_{kl}$$

は $\mathfrak{so}(4)$ -値 2-form になる。そこで, 考えている空間上の

$SO(4)$ -gauge field theory を展開してみよう。まず, gauge field $F \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(4)$ を

$$(18) \quad F_{ijkl} = \frac{1}{\rho^2} R_{ijkl}$$

によって定義する。もちろん

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_{i < j} F_{ijkl} dx_i \wedge dx_j \right]_{kl}.$$

このとき, 構造方程式 $F = dA + \frac{1}{2} [A, A]$ を解いて connection A を作り出すことが出来る。(17) の仮定のもとで A と F の具体的な形を考えておこう。

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_{\mu} A_{\mu ab} dx_{\mu} \right]_{ab} \in \Lambda^1 \otimes \mathcal{H}(4)$$

とすると、

$$(19) \quad A_{\mu ab} = -\frac{1}{\rho} (\partial_a \rho \cdot \delta_{\mu b} - \partial_b \rho \cdot \delta_{\mu a})$$

(20)

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu ab} &= \frac{2}{\rho^2} (\partial_a \rho \cdot \partial_{\mu} \rho \cdot \delta_{\nu b} - \partial_b \rho \cdot \partial_{\mu} \rho \cdot \delta_{\nu a} - \partial_a \rho \cdot \partial_{\nu} \rho \cdot \delta_{\mu b} \\ &\quad + \partial_b \rho \cdot \partial_{\nu} \rho \cdot \delta_{\mu a}) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} (-\partial_a \partial_{\mu} \rho \cdot \delta_{\nu b} + \partial_b \partial_{\mu} \rho \cdot \delta_{\nu a} \\ &\quad + \partial_a \partial_{\nu} \rho \cdot \delta_{\mu b} - \partial_b \partial_{\nu} \rho \cdot \delta_{\mu a}) \\ &\quad + \frac{L}{\rho^2} (\delta_{\nu a} \delta_{\mu b} - \delta_{\nu b} \delta_{\mu a}). \quad \text{但し } L = \sum_c (\partial_{\mu} \rho)^2. \end{aligned}$$

先程 (18) 式で Riemann curvature を改めて gauge field と思ったが、その時次のことが成り立つ：

定理 (17), (18) の仮定のもとに、

Scalar curvature $R = \text{constant}$

$\Leftrightarrow$ Gauge field F が Yang-Mills 方程式 (1) を満たす。

この定理も、今のところなぜそうなったのかよく判らないが、

証明は計算すれば出まゝ。みて中こゝ。

また, $R = \text{constant} \iff \Delta \rho = -C\rho^3$ を前に証明してあった。そこで次に

$$d * F + [A, * F] = 0 \iff \Delta \rho = -C\rho^3$$

を証明しよう。その為には、とにかく全部を ρ で表わさねばならぬ。

$$\begin{aligned} & (d * F + [A, * F])_{\nu ab} \\ &= \sum_{\mu} \partial_{\mu} F_{\mu\nu ab} + \sum_{\mu} \sum_c (A_{\mu ac} F_{\mu\nu cb} - F_{\mu\nu ac} A_{\mu cb}) \end{aligned}$$

第1項か $\overbrace{\sum_{\mu}}^{\text{問題12}} \partial_{\mu} F_{\mu\nu ab}$ (20), (19) を用いて計算して中こゝ,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \partial_{\mu} F_{\mu\nu ab} &= -\frac{2L}{\rho^3} (\partial_a \rho \cdot \delta_{vb} - \partial_b \rho \cdot \delta_{va}) \\ &+ \frac{1}{\rho^2} (\partial_v \partial_a \rho \cdot \partial_b \rho - \partial_v \partial_b \rho \cdot \partial_a \rho) \\ &+ \frac{2}{\rho^2} \Delta \rho (\partial_a \rho \cdot \delta_{vb} - \partial_b \rho \cdot \delta_{va}) + \frac{1}{2\rho^2} (\partial_a L \cdot \delta_{bv} - \partial_b L \cdot \delta_{av}) \\ &- \frac{1}{\rho} (\partial_a \Delta \rho \cdot \delta_{vb} - \partial_b \Delta \rho \cdot \delta_{av}), \quad \Delta = \sum_c \frac{\partial^2}{\partial x_c^2} = \sum_c \partial_c^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} \sum_c A_{\mu ac} F_{\mu\nu cb} \\ &= \frac{1}{\rho^3} (-2 \partial_a \rho \cdot \partial_b \rho \cdot \partial_v \rho + 2L \partial_a \rho \cdot \delta_{vb} - L \partial_v \rho \cdot \delta_{ab}) \\ &+ \frac{1}{\rho^2} (\partial_a \rho \cdot \Delta \rho \cdot \delta_{bv} + \partial_a \rho \cdot \partial_v \partial_b \rho + \partial_v \rho \cdot \partial_a \partial_b \rho) \\ &+ \frac{1}{2\rho^2} (\partial_v L \cdot \delta_{ab} - \partial_a L \cdot \delta_{bv}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} \sum_c F_{\mu\nu ac} A_{\mu cb} &= \sum_{\mu} \sum_c A_{\mu bc} F_{\mu\nu ca} \\
&= \frac{1}{\rho^3} (-2 \partial_a \rho \cdot \partial_b \rho \cdot \partial_\nu \rho + 2L \cdot \partial_b \rho \cdot \delta_{va} - L \cdot \partial_\nu \rho \cdot \delta_{ab}) \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2} (\partial_b \rho \cdot \Delta \rho \cdot \delta_{av} + \partial_b \rho \cdot \partial_\nu \partial_a \rho + \partial_\nu \rho \cdot \partial_a \partial_b \rho) \\
&\quad + \frac{1}{2\rho^2} (\partial_\nu L \cdot \delta_{ab} - \partial_b L \cdot \delta_{av})
\end{aligned}$$

これを全部足し上げると、大中は打ち消し合っか生いて

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} \partial_{\mu} F_{\mu\nu ab} + \sum_{\mu} \sum_{\nu} (A_{\mu ac} F_{\mu\nu cb} - F_{\mu\nu ac} A_{\mu cb}) \\
= \frac{3}{\rho^2} \Delta \rho (\partial_a \rho \cdot \delta_{bv} - \partial_b \rho \cdot \delta_{av}) - \frac{1}{\rho} (\partial_a \Delta \rho \cdot \delta_{bv} - \partial_b \Delta \rho \cdot \delta_{av}) \\
= \left(\frac{3}{\rho^2} \Delta \rho \cdot \partial_a \rho - \frac{1}{\rho} \partial_a \Delta \rho \right) \delta_{bv} - \left(\frac{3}{\rho^2} \Delta \rho \cdot \partial_b \rho - \frac{1}{\rho} \partial_b \Delta \rho \right) \delta_{av}
\end{aligned}$$

と計算される。従って、

$$\begin{aligned}
d * F + [A, * F] &= 0 \\
\Leftrightarrow \forall a \quad \frac{3}{\rho^2} \Delta \rho \cdot \partial_a \rho - \frac{1}{\rho} \partial_a \Delta \rho &= 0 \\
\Leftrightarrow \forall a \quad 3 \cdot \frac{\partial_a \rho}{\rho} &= \frac{\partial_a \Delta \rho}{\Delta \rho} \\
\Leftrightarrow 3 d \log \rho &= d \log |\Delta \rho| \\
\Leftrightarrow \Delta \rho &= \pm c \rho^3
\end{aligned}$$

こゝで (16) が回復された!

もう一度まとめておこう.

$g_{\mu\nu} = p^2 \delta_{\mu\nu}$ によつて metric を定め, それから作
つた Riemann curvature を用いて gauge field F を

$$F_{ijkl} = \frac{1}{p^2} R_{ijkl}$$

で与えられるならば, F が Yang-Mills 方程式 (1) を満
たすことと p が φ^4 -方程式 (16) を満たすこと
とは同値である.

尚, F は (3) と (-3) を満たすもの. これは群が simple では
ない為におこつたことであり, $\mathcal{M}(4) = \mathcal{M}(3) \oplus \mathcal{M}(3)$
によつて F を分解してしまえば, 実は (3) の解と (-3) の解の
直和になることが判る.

かくして Yang-Mills と φ^4 -model とが (少なくとも
ある程度) 関係することが判つた.

今度は, (16) の最も易しい解である

$$p = \frac{1}{1+x^2}, \quad x^2 = \sum_f x_f^2$$

について調べておこう. §.4 で $\Lambda^2 \cong \mathcal{M}(4)$ なる同型を具
体的に base をとつて与えておいたので, 以下 2-form は
Lie 環の元たつて見做す. また, $\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ の分解も用
いて, 2-form を $\mathcal{M}(3)$ の 2 種類の bases $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ と
 $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ を用いて表示することにしよう. (19) により,

$$\begin{cases}
 A_1 = \frac{2}{1+\chi^2} (-x_2 e_1 \wedge e_2 - x_3 e_1 \wedge e_3 - x_4 e_1 \wedge e_4) \\
 \quad = \frac{2}{1+\chi^2} (-x_2 \sigma_1 - x_3 \sigma_2 - x_4 \sigma_3) \oplus \frac{2}{1+\chi^2} (-x_2 \tau_1 - x_3 \tau_2 + x_4 \tau_3) \\
 A_2 = \frac{2}{1+\chi^2} (x_1 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_2 \wedge e_3 + x_4 e_2 \wedge e_4) \\
 \quad = \frac{2}{1+\chi^2} (x_1 \sigma_1 - x_4 \sigma_2 + x_3 \sigma_3) \oplus \frac{2}{1+\chi^2} (x_1 \tau_1 + x_4 \tau_2 + x_3 \tau_3) \\
 A_3 = \frac{2}{1+\chi^2} (x_1 e_1 \wedge e_3 - x_2 e_2 \wedge e_3 + x_4 e_3 \wedge e_4) \\
 \quad = \frac{2}{1+\chi^2} (x_4 \sigma_1 + x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_3) \oplus \frac{2}{1+\chi^2} (-x_4 \tau_1 + x_1 \tau_2 - x_2 \tau_3) \\
 A_4 = \frac{2}{1+\chi^2} (-x_3 e_3 \wedge e_4 - x_2 e_2 \wedge e_4 + x_1 e_1 \wedge e_4) \\
 \quad = \frac{2}{1+\chi^2} (-x_3 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_1 \sigma_3) \oplus \frac{2}{1+\chi^2} (x_3 \tau_1 - x_2 \tau_2 - x_1 \tau_3)
 \end{cases}$$

これの Λ_+^2 -part, 即ち σ_i で展開されている部分は, (15) 式の 1-instanton にあたりと一致している。 (15) に $\frac{1}{1+\chi^2}$ が出て来たタネあかしは, まさにこういう訳だった。

また, 上の Λ_-^2 -part で, $x_4 \mapsto -x_4$, $A_4 \mapsto -A_4$ のように orientation をかえると, それは Λ_+^2 -part と同じ形になることが判るから, Λ_-^2 -part そのものは (3) の解である。(注: (3) と (-3) とは orientation を入れかえることと結び合う。) 即ち, 上の A を, $\mathcal{M}(4) = \Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ に応じて分解して

$$A = A^+ \oplus A^-$$

と書けば, A^+ は (-3) の 1-instanton solution であり, A^- は (3) の 1-instanton solution であることが判る。

真空中での Einstein 方程式は $R_{\mu\nu} = 0$ であるから、特に $R = 0$ である。従って (16) の意味する $R = \text{const.}$ は弱められた Einstein 方程式という解釈が出来る。(過去にそういうものが研究されたこともあったようである。"Perspectives in Geometry and Relativity" (ed. by B. Hoffmann, Indiana Univ. Press (1966)) に収められている C.W. Kilmister の論文参照。題は「別の場の方程式」である！)

[3] の中で筆者は Yang-Mills 方程式を非線型調和方程式ととらえたが、ある場合には

$$\text{Yang-Mills eq.} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \rho = -\rho^3, \quad \Delta = \sum_{i=1}^4 \partial_i^2$$

となり、まさに「非線型」調和方程式である。ところで、 φ^4 -方程式 (16) の解は、実はあまり知られていない。定数の部分は適当に調整出来たので、-1 とすると、

$$(21) \quad \boxed{\varphi = \frac{2\sqrt{2} \lambda}{\sum_{i=1}^4 (x_i - a_i)^2 + \lambda^2} \quad \text{は} \quad \Delta \varphi = -\varphi^3 \text{ を満たす.}}$$

但し $a = (a_1, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \in \mathbb{R}$ は任意の 11° ラ × タ

§5 で見てきたように、(21) は (3) or (-3) の 1-instanton solution に関係した解である。では、一般に n -instanton solution に

関係した $\Delta\varphi = -\varphi^3$ の解はあるのだろうか？ 今の所その答を知る人はない。もともと Instanton number というのは空間の cohomology の元なのであるが、 $\Delta\varphi = -\varphi^3$ に cohomology が出てくる余地はあるのだろうか？

Yang-Mills 方程式 (1) と φ^4 -方程式 (16) のつながり具合は、
 (16) $\Rightarrow$ (1) というものであった。何等かの制限つまでもよ
 いから逆向主が判子と φ^4 -model の解析に役に立つのだが、
 今のところ何とも言えない。

∞. おわりに

幾何学の応用で (±3) の解について色々なことが判ってま
 っているが、方程式そのものの性質・解析はまだほとんど出来
 ていない、という印象を受け子。また、(3) は何等かの意味
 で Quaternion structure の integrability にな、っているような印象
 も持つのだが、どう定式化したらよいかよく判らない。重力
 場との関連が出てきたように、これから思いもかけない発
 展があるかも知れぬ。Yang-Mills の興味は (仲々) 尽きた
 い。

5 節の内容に関して、東北大学の山岸賢吾氏に色々と御教
 示戴いた。深く感謝の意を表す子。また、所属がかわったり
 して多忙だった為、原稿を書くべきことを失念してしまい、

こちらにもおそく、そして、た事に対し小松彦三郎先生に
お詫い申し上げたい。
(1980年11月)

文献

- [0] Y. Iwasaki : Instanton Contributions in 2d
non-linear $O(3)$ σ -model. Tsukuba pre-
print n°. UTHEP-73 (1980)
- [1] Bourguignon & Lawson : to appear in Commun.
Math. Phys.
- [2] E. Witten : Phys. Rev. Letters 38 n°. 3
121-124 (1977)
- [3] 村瀬 元彦 : 科学 50 n°. 10 668-673 (1980)
- [4] F. Wilczek : Geometry and Interactions of
Instantons. in "Quark Confinement- and Field
Theory" Ed. by Stump & Weingarten, Rochester
会議報告集 J. Wiley & sons (1976).